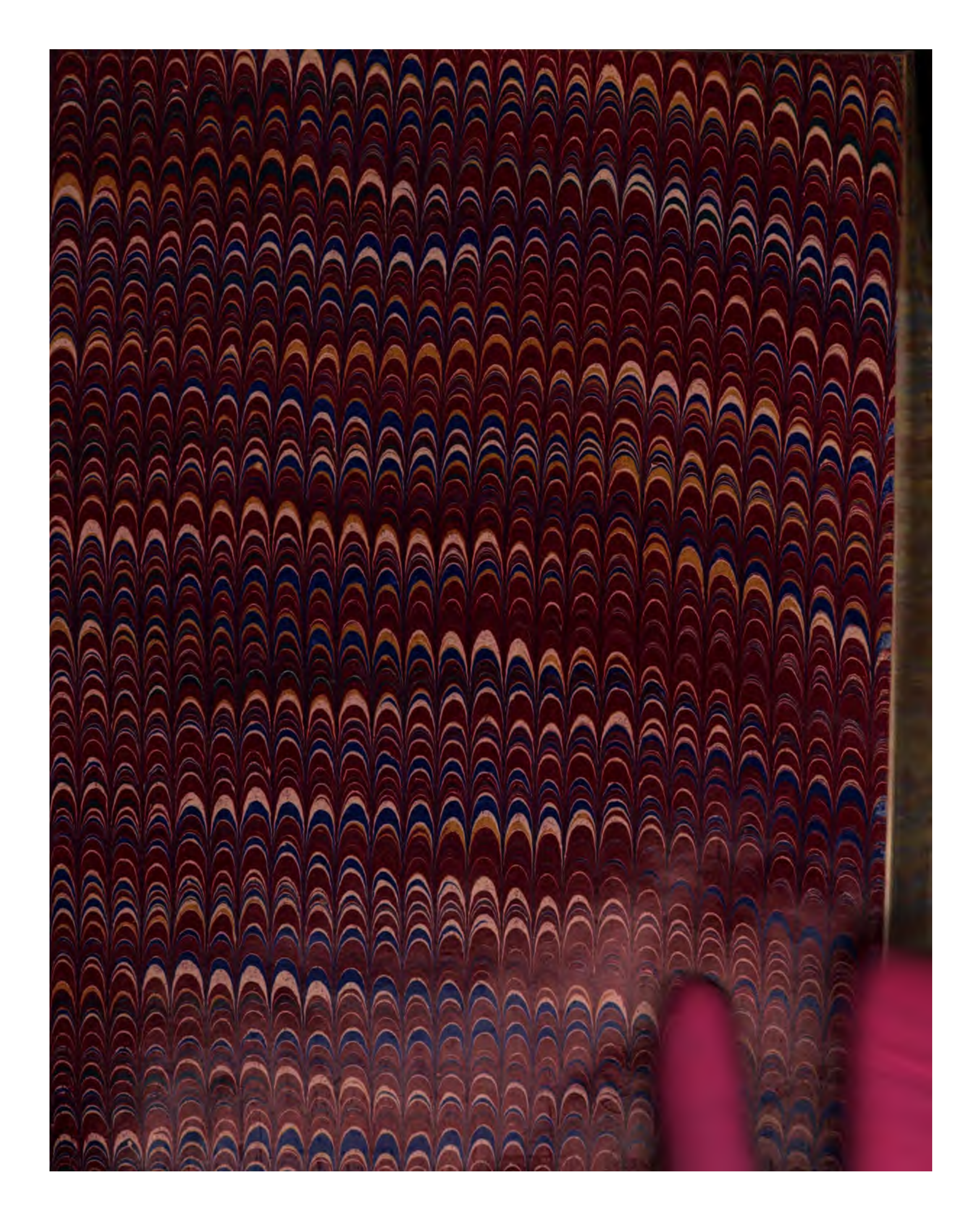



G. 1. K. 4
OXFORD MUSEUM.
LIBRARY AND READING-ROOM.
THIS Book belongs to the "Student's Library."
It may not be removed from the Reading Room without permission of the Librarian.
Math. c. 45







Theorie

der

algebraischen Curven,

gegründet

auf eine

neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie.

Von

Dr. Julius Plücker,
ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Bonn.

Mit einer Tafel.

Bonn,
bei Adolph Marcus.
1839.

2-18.

Dem

Geheimen Ober-Regierungs-Rathe

Herrn Dr. Kortüm,

unter dessen Leitung

das Düsseldorfer Gymnasium seinen Aufschwung nahm
und dem es seine Blüthe verdankt,

mit

der Pietät eines ehemaligen Schülers und der Verehrung
eines Freundes

Der Verfasser.

Vorrede.

Am Schlusse der Vorrede zu meinem »Systeme der analytischen Geometrie« habe ich die Verpflichtung übernommen, der Darstellung der allgemeinen Gesetze, welchen die algebraischen Curven überhaupt unterworfen sind, eine besondere Schrift zu widmen. Indem ich dieser Verpflichtung hiermit nachkomme, liegt der Cyclus meiner Arbeiten im Gebiete der analytischen Geometrie vollständig vor.

Von den beiden Haupt-Abschnitten, in welche die vorliegende Schrift zerfällt, beschäftigt sich der erste mit der Theorie der unendlichen Zweige. Die neue Art der Behandlung gestattet uns diesen Gegenstand weit über diejenigen Gränzen, welche den bisherigen Methoden zugänglich waren, auszudehnen und ihn, in gewissem Sinne, zu erschöpfen. Um das eben Ausgesprochene zu bestätigen, möge, beispielsweise, die Unterscheidung der Curven vierter Ordnung, nach der Natur ihrer unendlichen Zweige, als Anhaltpunct dienen. Es sind neunzig Jahre her, dass Euler, dieser, nicht hoch genug zu feiernde, Geometer, seine Aufzählung der verschiedenen möglichen Fälle niederschrieb, die unverändert, bis auf die neueste Zeit, in alle Ausgaben und Uebersetzungen seiner »Introductio« übergegangen ist. Ich habe meinerseits im 7. Paragraphen des ersten Abschnittes eine Eintheilung der Curven vierter Ordnung nach der Art ihrer unendlichen Zweige gegeben und in den beigefügten Noten diejenigen Resultate, zu denen ich gelangt bin, mit den Euler'schen zusammengestellt. Ein Blick auf diese Noten weiset eine Reihe von Unrichtigkeiten nach, deren grosse Anzahl uns befremden müsste, wenn wir nicht erwögen, dass Euler, ohne den abstracten Gedanken durch irgend eine Anschauung zu unterstützen, nach Analogieen schliesst und dass man solchen Schlüssen nirgendwo mehr misstrauen muss, als gerade in Untersuchungen der fraglichen Art. Der Keim des Irthümlichen liegt schon in der Aufzählung der Curven dritter Ordnung, stellt sich

uns hier indess mehr als blosse Ungenauigkeit dar*); hätte Euler die Aufzählung der Curven fünfter Ordnung auf gleiche Weise ausgeführt, so hätte das Unrichtige und Ungenaue das Richtige weit überwogen. Von der Möglichkeit der aufgezählten Fälle hat sich Euler meistens nicht überzeugt; er hätte es auf seinem Wege, wenn überhaupt, doch wenigstens nicht ohne die grösste Weitläufigkeit, vermocht. Unsere Methode erlaubt uns, ohne allen Anstand, für jeden besondern Fall die entsprechende allgemeine Gleichung hinzuschreiben, so dass zugleich in der Form dieser Gleichung die Natur der verschiedenen unendlichen Zweige der Curve, unmittelbar und vollständig, ausgedrückt liegt. Bei der systematischen Zusammenstellung der verschiedenen Fälle ist es eine abstracte Zahl, die uns leitet und controlirt; wir brauchen blòss zu zählen, wie viele Constanten in unsern Gleichungen vorkommen. Für die Unterscheidung der Curven fünfter Ordnung, nach der Natur ihrer unendlichen Zweige, finden sich alle Elemente vor; diese zu einer vollständigen Aufzählung der verschiedenen Arten zu vereinigen, schien mir überflüssig, weil die Curven dieser Ordnung im Ganzen noch zu weit ausser dem Bereiche unserer Anschauung liegen. Ich habe, um alle Schwierigkeiten einer allgemeinen Discussion zu heben, oft Curven von höherer Ordnung betrachten müssen. Während auf diese Weise das Feld der Untersuchungen sich durch das Ansteigen der Ordnung erweitert hat, erhalten andrerseits, bei Curven der niedern Ordnungen speciellere Untersuchungen ein erhöhtes Interesse. In dieser Rücksicht haben wir, in dem Falle der Curven dritter Ordnung, nicht nur das, was auf die blosse asymptotische Berührung, sondern auch Alles dasjenige, was die Osculation der unendlichen Zweige solcher Curven mit Curven der zweiten und selbst mit andern Curven der dritten Ordnung betrifft, vollständig behandelt. Hier sind wir namentlich zu der linearen Construction desjenigen neunten Punctes gelangt, in welchem, nach einem merkwürdigen Satze, eine gegebene Curve der dritten Ordnung von allen andern Curven dieser Ordnung, welche durch acht, auf dem Umfange der gegebenen willkührlich angenommenen, Puncte gehen, geschnitten wird: eine Construction, die auch dann noch ihre Geltung behält, wenn die fraglichen acht Puncte alle oder zum Theil zusammenfallen, oder auf einem oder auf mehreren Zweigen der gegebenen Curve unendlich weit liegen. In den Gleichungen der Curven der vierten Ordnung, denen ich überhaupt eine besondere Vorliebe geschenkt habe, weil wir sie eben noch mit unserer Anschauung erreichen können, habe ich, um den Lauf der unendlichen Zweige so genau als möglich

---

*) System der analytischen Geometrie. Vorrede, Seite V, und Note zur 209. Nummer, Seite 165

darzustellen, nicht bloss fünfpunctig osculirende Kegelschnitte, sondern auch achtpunctig osculirende Curven der dritten Ordnung in Evidenz gebracht.

Die Theorie der singulären Puncte bildet den Gegenstand des zweiten Abschnittes. Hier bin ich von der Grund-Ansicht ausgegangen, dass, wenn wir diese Theorie an die Discussion des wahren Werthes des gewöhnlichen Differential-Coefficienten, welcher, auf einen solchen Punct bezogen, unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, anknüpfen, wir nothwendiger Weise zu dem Resultate gelangen, dass, zur Erforschung der Art des singulären Punctes, der Lauf der Curven-Zweige in der Nachbarschaft desselben discutirt werden muss; während aus der Betrachtung der beiden partiellen Differential-Coefficienten, deren Quotient der oben erwähnte gewöhnliche Differential-Coefficient ist, die Natur des singulären Punctes sich unmittelbar erkennen und analytisch bestimmen lässt. Dieses neue Princip für die Discussion der singulären Puncte, das von dem gewöhnlichen ganz verschieden ist, schliesst sich enge an unsere übrigen Betrachtungsweisen an, wonach wir in der Gleichung der Curve einen singulären Punct, von welcher Art dieser auch sein mag, und auch mehrere solche Puncte zugleich, in Evidenz bringen können. Aus der Form einer solchen Gleichung tritt uns hierbei diejenige Particularisation, welche überhaupt eine Curve dadurch erleidet, dass sie einen oder mehrere Puncte der fraglichen Art erhält, unmittelbar und vollständig entgegen. Bei Curven der vierten Ordnung haben wir alle möglichen Fälle erschöpft; die entsprechenden analytischen Formen konnten wir auch hier ohne Anstand hinschreiben, wobei das Zählen der Constanten dieselbe Bedeutung hat, als früher.

Was einer systematischen Discussion der singulären Puncte bisher am meisten entgegenstand, war, dass man Singularitäten von ganz heterogener Art in einer Untersuchung zusammenschmolz. Ich habe bereits im »Systeme« darauf hingewiesen, wie das Singuläre sich einmal auf die Entstehung der Curve durch die Bewegung eines Punctes, das andere Mal auf die Entstehung derselben durch die Bewegung einer, sie umhüllenden, geraden Linie bezieht. Der Uebergang von der einen Entstehungsweise der Curve zur andern ist ein discontinuirlicher; indem das Princip der Reciprocität beide verknüpft, gibt es unerwartete Aufschlüsse über die eigentliche Natur der singulären Puncte und regt Fragen von einer ganz neuen Art an. Mit diesen habe ich mich mit Vorliebe im 4. Paragraphen des zweiten Abschnittes beschäftigt. Unter andern Resultaten, nenne ich hier bloss eine merkwürdige Gleichung des vierten Grades zwischen der Anzahl der Doppelpuncte, der Anzahl der Doppel-Tangenten, der Anzahl der Spitzen und der Anzahl der Wendungen irgend einer Curve, von der wir bloss voraussetzen, dass sie eine algebraische sei. Im letzten Paragraphen findet man

die ersten directen Untersuchungen über Doppel-Tangenten, welche, in so weit sie die Curven der vierten Ordnung betreffen, an die Discussion einer symmetrischen Form sich anschliessen. In solchen Discussionen spricht sich der Character unserer Methoden am klarsten aus und daher bin ich gern in ein grösseres Detail eingegangen; den Gegenstand erschöpfen, hiesse indess die Curven der vierten Ordnung, deren allgemeine Gleichung diesen Entwicklungen zu Grunde liegt, vollständig discutiren.

Das Kriterium für den Werth oder Unwerth eines neuen Resultates, wie einer neuen Methode, liegt keinesweges in ihrer möglichen Nutzanwendung, sondern unmittelbar in ihnen selbst: sie müssen, ich glaube mich nicht bezeichnender ausdrücken zu können, ein rein ästhetisches Interesse für sich in Anspruch nehmen. Keine der verschiedenen mathematischen Disciplinen ist einer solchen Eleganz mehr fähig, als die analytische Geometrie, der Einfluss, den, in dieser Beziehung, namentlich Monge's Arbeiten auf mathematische Darstellung überhaupt gehabt haben, ist allgemein anerkannt. Hier ist es, wo ich gelernt habe und wo sich die Richtung, welche meine mathematischen Bestrebungen genommen haben, bestimmt hat. Um das Characteristische der vorliegenden Schrift hervorzuheben, komme ich nicht mehr auf dasjenige zurück, was dieselbe mit meinen frühern Arbeiten gemein hat. Eigenthümlich ist ihr ein, schon oben erwähntes, höheres Princip, welches diejenigen, von denen ich bisher ausgegangen bin, beherrscht und welches darin besteht, dass **wir die Constanten, von welchen eine Curve abhängt, zählen.** Schon die Sätze der 7.—11. Nummer in den einleitenden Betrachtungen bieten hierher gehörige Belege. Niemals hätte ich früher geahndet, dass abstracte Zahlen so allgewaltige Bedeutung im Gebiete der geometrischen Anschauung haben könnten. Das neue Princip rückt die, dem Anscheine nach, verschiedenartigsten Resultate einander näher und, indem es sie in gegenseitige Abhängigkeit bringt, brauchen wir uns nicht mehr damit zu begnügen, uns von der Richtigkeit derselben überzeugt zu haben, sondern, wir können auch nach der **Nothwendigkeit** eines geometrischen Resultats und nach der Stellung fragen, die dasselbe im grossen Ganzen der Geometrie einnimmt.

Bonn, am 4. September 1839.

Uebersicht des Inhalts.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Singularitäten in dem Laufe der Curven.

Druckfehler.

Seite 30, Zeile 24 lese man 55554 . 22 statt 55555 . 22.
» 149 » 34 » » die » der.

Ueber die allgemeinen Gesetze,

welche den Lauf der Curven einer beliebigen Ordnung bestimmen.

---

1. Bevor wir in den eigentlichen Gegenstand dieser neuen Untersuchungen aus dem Gebiete der analytischen Geometrie eingehen, scheint es mir wesentlich, gleich von Vorne herein zwei Puncte scharf ins Auge zu fassen: den Algorithmus und das allgemeine Princip unserer Entwicklungsweisen. Auf dieses werden wir bald zurückkommen (6.-11.). Was jenen Algorithmus betrifft, so besteht derselbe durchaus nicht in einer neuen und fremden Bezeichnung, sondern einzig und allein darin, dass wir gewöhnliche algebraische Symbole unter einem eigenthümlichen Gesichtspuncte auffassen und behandeln. Der Keim dieser Auffassungsweise liegt schon in den beiden Bänden der *analytisch geometrischen Entwicklungen*, sie selbst ist in dem *Systeme der analytischen Geometrie* entwickelt und in Anwendung gebracht worden und hat sich, auch noch nach Erscheinen desselben, immer reiner und characteristischer ausgebildet. Die nächstfolgenden Nummern, die einer kurzen Darlegung des fraglichen Algorithmus bestimmt sind, werden sich um so übersichtlicher darstellen, weil wir hier ausschliesslich ihre Beziehung zu der allgemeinen Theorie der algebraischen Curven im Auge haben, während in der zuletzt genannten Schrift ausserdem auch noch andere Gesichtspuncte festgehalten werden mussten. Zugleich wird auf diese Weise die vorliegende Arbeit zu einem selbstständigen Ganzen abgeschlossen.

2. Wir werden überall gerade Linien nach einem einzigen Buchstaben des grossen lateinischen Alphabets, zum Beispiel nach P, Q, R, S . . benennen, und dann die Abstände irgend eines zu bestimmenden Punctes von diesen geraden Linien, oder allgemeiner, diese Abstände, nachdem sie zuvor mit willkührlichen Coefficienten multiplicirt worden sind, durch die entsprechenden Buchstaben des kleinen Alphabets, also durch p, q, r, s . . bezeichnen. *) In dem Verlaufe derselben Entwicklung bleiben die eben erwähnten Coefficienten unverändert dieselben, sie sind constant. In den allgemeinsten Entwicklungen brauchen wir auf ihre Werthe durchaus keine Rücksicht zu nehmen; in besondern Fällen werden wir dieselben von Vorne herein willkührlich annehmen und dann dadurch erst den Ausdrücken p, q, r, s . .,

---

*) Da wir im Verlauf unserer Untersuchungen oft auch ganze Zahlen zu bezeichnen haben, wollen wir diese zwar auch durch Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets ausdrücken, aber, der Unterscheidung wegen, hierzu der Cursiv-Schrift *n*, *m* . . uns bedienen. Constante Coefficienten werden wir, wie bisher, überall durch die Buchstaben des kleinen griechischen Alphabets bezeichnen.

nachdem die bezüglichen geraden Linien gegeben sind, eine vollkommen bestimmte geometrische Bedeutung beilegen. Diese Ausdrücke ändern im Allgemeinen, bei einer Orts-Veränderung desjenigen Punctes, auf welchen sie bezogen werden, ihre Werthe: sie sind veränderliche Grössen, die von der Lage dieses Punctes abhängen. Ihre Werthe verschwinden und verschwinden nur dann, wenn der fragliche Punct auf den bezüglichen geraden Linien liegt, das heisst mit andern Worten: es sind die Gleichungen:

$$p = o, \qquad q = o, \qquad r = o, \qquad s = o, \ldots$$

die Gleichungen der geraden Linien P, Q, R, S . . . Die Lage eines Punctes ist durch die Werthe irgend zweier der obigen veränderlichen Grössen, wenn die beiden bezüglichen geraden Linien gegeben sind, auf lineare Weise bestimmt, denn es wird dadurch der fragliche Punct, als der Durchschnitt zweier gerader Linien, die den beiden gegebenen bezüglich parallel sind, bezeichnet. Die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen solchen zwei veränderlichen Grössen ist die Gleichung einer geraden Linie und da jede beliebige gerade Linie auch durch ein einziges Symbol bezeichnet werden kann, so folgt dass jede der veränderlichen Grössen p, q, r, s . . eine lineare Function irgend zweier andern ist, die wir unter denselben willkührlich auswählen können. In die Reihe dieser Grössen gehören auch gewöhnliche, auf irgend zwei Coordinaten-Axen bezogene, Parallel-Coordinaten, y und x. (Hierbei ist jedoch nicht zu übersehen, dass die gerade Linie Y, welche, unserer Bezeichnung gemäss, zu dem Abstande y gehört, nach der gebräuchlichen Benennung, die Axe der x, und die gerade Linie X, welche zu x gehört, die Axe der y ist.) Wir werden überhaupt jene veränderlichen Grössen, in so fern wir nicht an ihre geometrische Bedeutung, sondern nur an ihre gegenseitige analytische Bestimmung denken, lineare Functionen nennen; sie sind insbesondere lineare Functionen gewöhnlicher Parallel-Coordinaten.

3. In unsern Betrachtungsweisen ergibt sich die Theorie der entgegengesetzten Zeichen unmittelbar; wir wollen sie hier an die Schluss-Bemerkung der vorigen Nummer, dass p, q, r, s . . lineare Functionen gewöhnlicher Parallel-Coordinaten sind, anknüpfen. Zu diesem Ende können wir die Coordinaten-Axen immer so annehmen, dass für alle zu betrachtenden Puncte die beiden Coordinaten y und x positiv sind: eine Voraussetzung, die immer statthaft bleibt, selbst dann, wenn wir Curven mit unendlichen Zweigen und asymptotische Annäherungen betrachten, weil bei allen solchen Betrachtungen der Begriff des Unendlichen bloss der Begriff einer Gränze ist, der wir uns im endlichen Raume immer mehr annähern können und es die Art dieser Annäherung ist, die wir eigentlich betrachten. In dieser Voraussetzung sei

$$p = \mu\,(y + \alpha x + \beta),$$

wonach wir für die Gleichung der entsprechenden geraden Linie P jede der folgenden beiden nehmen können: $p = o, \qquad y + \alpha x + \beta = o.$

Für solche Puncte, die in gleicher Entfernung auf den beiden Seiten der Linie P liegen, ist, der Definition gemäss, der absolute Werth von p derselbe. Ob, für einen gegebenen Punct, p positiv oder negativ ist, hängt gleichzeitig vom Zeichen von μ und vom Zeichen des Ausdrucks $(y + \alpha x + \beta)$ ab. Es ändert also p, weil μ constant ist, sein Zeichen nur dann, wenn der gegebene Punct von einer Seite der Linie P auf die andere hinüberrückt. Wir können, für einen willkührlich angenommenen Punct, den Werth von p gleich von Vorne herein positiv setzen, alsdann ist das Zeichen von p für alle Puncte gegeben: für solche Puncte, welche mit dem angenommenen auf derselben Seite der Linie P liegen, ist der Werth von p positiv, für Puncte auf der entgegengesetzten Seite negativ. Die gemachte Voraussetzung kommt aber darauf hinaus nachträglich das Zeichen von μ, oder die Richtung der Linie X (Coordinaten-Axe der y) gehörig zu bestimmen. Was nemlich den Ausdruck $(y + \alpha x + \beta)$ angeht, so ist der Werth desselben von der Lage und Richtung der Linie Y (Coordinaten-

Axe der x) ganz unabhängig, während er, wenn die Linie X ihre Richtung ändert im Allgemeinen sich ebenfalls ändert und wenn diese Richtungs-Aenderung insbesondere zwei Rechte beträgt, zwar unverändert bleibt aber sein Zeichen vertauscht. Erst nachdem wir von Vorne herein zum Behuf der Bestimmung unserer linearen Functionen die positive Erstreckung der letztgenannten Axe ein für alle Mal festgesetzt haben, hängt das Zeichen jeder einzelnen linearen Function p, wenn sie auf einen gegebenen Punct bezogen wird, einzig und allein noch vom Zeichen des Coefficienten μ ab. Aber auch ohne uns irgend darum zu kümmern, wodurch das Zeichen von p eigentlich bedingt wird, können wir, ohne Weiteres, eine positive und eine negative Seite der Linie P annehmen.

Auf gleiche Weise können wir eine positive und eine negative Seite für jede der andern Linien Q, R, S . . von Vorne herein beliebig annehmen und die Zeichen-Bestimmung ist vollständig, wenn wir für einen beliebig angenommenen Punct die Zeichen der Werthe aller linearen Functionen p, q, r, s . . willkührlich und unabhängig von einander feststellen.

Hierbei verdient bemerkt zu werden, dass wenn diese Zeichen-Bestimmung einmal gemacht ist nur gewisse Combinationen der Zeichen der verschiedenen linearen Functionen für denselben Punct Statt finden können und die übrigen Combinationen ausgeschlossen sind, sobald die Anzahl der linearen Functionen Zwei übersteigt. Denn, wenn wir diese Anzahl überhaupt n nennen, so ist die Anzahl aller Zeichen-Combinationen n^2; die Anzahl derjenigen aber, die möglicherweise Statt finden können, ist nur der Anzahl derjenigen Flächen-Räume gleich, in welche die Ebene von den n geraden Linien P, Q, R, S . . getheilt wird und beträgt hiernach nur $\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)$. Wenn wir zum Beispiel bei vier linearen Functionen stehen bleiben, so bilden die denselben entsprechenden vier geraden Linien im Ganzen elf Flächen-Räume und fünf Zeichen-Combinationen sind nicht möglich. Unter jenen elf Flächen-Räumen befindet sich ein geschlossenes Viereck ohne einspringenden Winkel und wenn wir etwa den vier linearen Functionen für die Puncte innerhalb dieses Vierecks allen das positive Zeichen beilegen, so befindet sich unter den unmöglichen Combinationen namentlich auch diejenige, in welchen alle vier Functionen-Werthe negativ sind.

4. Jede unserer linearen Functionen hängt von drei Constanten ab. Diese treten in Evidenz, wenn wir irgend zwei lineare Functionen q und p von Vorne herein willkührlich bestimmen, und dann alle übrigen durch diese beiden ausdrücken. So hängt indem wir

$$s \equiv \mu q + \lambda p + \varkappa \text{ *)}$$

---

*) Wir wenden hier wiederum das Zeichen $\equiv$ an, um identische Gleichungen von gewöhnlichen zu unterscheiden; eine Unterscheidung, die gerade für unsere Betrachtungsweisen von Wichtigkeit ist. Gewöhnliche Gleichungen drücken Grössen-Beziehungen, identische Gleichungen bloss analytische Form-Beziehungen aus. So bedeutet die Gleichung des Textes *explicite*, dass wir s als eine Function von p und q einführen oder auch *implicite*, dass wir s, so wie p und q, als Functionen irgend zweier veränderlichen Grössen betrachten und dass alsdann, wenn wir Alles durch diese ausdrücken, die Gleichung auf $o = o$ sich reducirt und also nichts mehr aussagt. Oft macht man den Uebergang von einer gewöhnlichen zu einer identischen Gleichung ohne sich dessen klar bewusst zu werden. Eine gewöhnliche Gleichung zwischen drei oder mehreren Functionen, wird, wenn wir uns diese von zwei andren abhängig denken, in Beziehung auf diese eine identische, und umgekehrt wird jede identische, wenn wir die in ihr vorkommenden Functionen gruppenweise zusammennehmen, und selbstständig für sich construiren, eine gewöhnliche. So enthält die identische Gleichung, in der wir uns des später einzuführenden Algorithmus bedienen,

$$\Omega_n \equiv \Omega'_n + \Omega''_n,$$

setzen, die Function s von den drei Constanten μ, λ und $\varkappa$ ab, von den Werthen dieser Constanten zur Bestimmung der Function s kann aber erst nach der vollständigen Bestimmung von p und q die Rede sein.

Wir können die drei Constanten, von welchen eine lineare Function abhängt, so absondern, dass zwei derselben auf die Bestimmung der bezüglichen geraden Linie kommen, und die dritte ein constanter Coefficient ist, von welchem unsere Definition überdiess noch eine solche Function abhängig macht. Diess kommt dann darauf hinaus, die letzte Gleichung unter der nachstehenden Form zu schreiben:

$$s \equiv \mu\ (q + \alpha p + \beta).$$

Die Bestimmung der Functionen p und q behält hierbei ihre ganze Willkührlichkeit; wir können sie insbesondere so feststellen, dass sie kürzeste Abstände von zwei willkührlich angenommenen geraden Linien, P und Q, oder auch Parallel-Coordinaten bedeuten. In dem letztern Falle bedeutet alsdann der Ausdruck $(q+\alpha p+\beta)$ den, nach der Richtung der geraden Linie P genommenen, Abstand des bezüglichen Punctes von der geraden Linie S. Diese Richtung bleibt also dieselbe für die Construction aller linearen Functionen, so dass die Werthe derselben, wenn sie auf einen gegebenen Punct bezogen werden, als diejenigen Segmente sich darstellen, welche auf einer durch den gegebenen Punct gehenden geraden Linie, zwischen diesem Puncte und den, jenen linearen Functionen entsprechenden, geraden Linien liegen. Hierbei wird also die Beziehung der verschiedenen linearen Functionen zu einander durch zwei derselben auf analytischem Wege vermittelt. Wir können auch q und p so annehmen, dass der Ausdruck $(q+\alpha p+\beta)$ den kürzesten Abstand des Punctes, auf welchen er bezogen wird, von der Linie S ausdrückt; dann aber ist diese Annahme von der jedesmaligen Richtung der Linie S nicht unabhängig, und die analytische Beziehung der verschiedenen Functionen zu einander wird weniger einfach. Aber in allen diesen Fällen bestimmen sich, nach vorläufiger Annahme von q und p, die Function $(q+\alpha p+\beta)$ und die Linie S gegenseitig auf vollständige Weise. In diesem Sinne werden wir in den spätern Untersuchungen μs, νr . . an die Stelle von s, r . . schreiben, und dann auf die Functionen s, r . . nur zwei Constante rechnen.

Jede beliebige Function des ersten Grades einer beliebigen Anzahl der linearen Functionen p, q, r, s . . gehört in die Reihe dieser Functionen selbst und bedeutet, wie diese, den mit einem constanten Coefficienten multiplicirten Abstand des Punctes, auf welchen die fragliche Function von der Form

$$\alpha p+\beta q+\gamma r+\delta s+\ .\ ..+\xi$$

bezogen wird, von einer geraden Linie, deren Gleichung man erhält, wenn man diese Function gleich Null setzt. Eine solche Function schliesst überzählige Constante ein; nachdem die verschiedenen linearen Functionen willkührlich angenommen worden sind, erhalten, um eine gegebene gerade Linie auszudrücken, die Coefficienten $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ ..\ \xi$ keine absolut bestimmten Werthe; wir können alle, bis auf drei, willkührlich annehmen, und dann sind auch diese auf lineare Weise bestimmt. Insbesondere können wir unsere linearen Functionen auch als homogene Functionen dreier, die wir willkührlich von Vorne herein annehmen, betrachten.

---

bloss eine analytische Form-Bestimmung; sobald wir aber die drei Functionen Ω einzeln für sich betrachten, und vermittelst dreier gegebenen Curven der n. Ordnung als drei Producte von n Segmenten construiren, drückt die gewöhnliche Gleichung:

$$\Omega_n = \Omega'_n + \Omega''_n,$$

eine metrische Relation zwischen diesen $3n$ Segmenten aus.

Dann wird die Construction jeder beliebigen Function durch die drei willkührlich angenommenen vermittelt, und hängt von drei vollkommen bestimmten Constanten ab.

Wir wollen Producte linearer Functionen, der Kürze wegen, durch

$$\Theta_n, \Theta'_n, \Theta_{n-1}, \Theta_m, \ldots$$

darstellen, indem wir die Anzahl der Factoren jedes Productes durch unten angehängte Marken bezeichnen, und, wo es nöthig ist, verschiedene solche Producte durch Accente unterscheiden.

5. Die allgemeine Function zweier linearen Functionen von irgend einem n. Grade ist zugleich die allgemeine Function desselben Grades irgend zweier andern linearen Functionen. Die Anzahl der Constanten von denen diese Functionen abhängen ist beidesmal dieselbe, aber ihre Werthe sind verschieden, weil die Functionen-Bestimmung durch zwei andere, von Vorne herein willkührlich angenommene, lineare Functionen vermittelt wird. Wir wollen eine solche Function des n. Grades durch Ω_n bezeichnen, indem eine unten angehängte Marke den Grad angibt und verschiedene Functionen desselben Grades durch oben hinzugefügte Accente oder Marken in folgender Art unterscheiden:

$$\Omega'_n, \Omega''_n, \Omega^o_n, \Omega^h_n.$$

Es hat jede solche Function Ω_n, was für unsere Betrachtungsweisen ein wesentlicher Gesichtspunct ist, eine selbstständige Existenz für sich, welche von der Wahl der beiden linearen Functionen ganz und gar unabhängig ist. Ihr entspricht eine Curve der n. Ordnung, deren Gleichung die folgende ist:

$$\Omega_n = 0,$$

und wir wollen, um uns kurz auszudrücken, als Curve Ω_n diejenige bezeichnen, welche durch diese Gleichung dargestellt wird. Ist diese Curve gegeben, so erhält die Function Ω_n, wenn sie auf einen gegebenen Punct bezogen wird, einen mit einem unbestimmten, für alle gegebenen Puncte sich gleich bleibenden (constanten), Coefficienten multiplicirten, vollkommen bestimmten Werth, welcher sich geometrisch als ein Product von n Segmenten, die auf einer, nach willkührlich angenommener constanter Richtung durch den gegebenen Punct gehenden, geraden Linie zwischen diesem Puncte und den n Durchschnittspuncten mit der Curve liegen, darstellen lässt.*) Die constante Richtung dieser geraden Linie und der constante Coefficient stehen in gegenseitiger Abhängigkeit, so dass man jene beliebig ändern kann, wenn man diesen nachher gehörig bestimmt. Wenn wir daher, wie überall in den folgenden Entwicklungen, die allgemeine Function des n. Grades mit Hinzufügung eines unbestimmten Coefficienten durch $\mu\Omega_n$ statt durch Ω_n, darstellen, so hängen die Function Ω_n und die Curve Ω_n von denselben Constanten ab. Hierbei ist nur vorauszusetzen, dass wir eine constante Richtung von Vorne herein annehmen; eine Annahme die vorher Statt gefunden haben muss, ehe wir μ einen bestimmten Zahlen-Werth beilegen können. Die Anzahl der in Rede stehenden Constanten beträgt $\frac{n(n+3)}{2}$. Sie treten uns, so lange wir die Function Ω_n von zwei von Vorne herein und ohne Beziehung zu der entsprechenden Curve angenommenen linearen Functionen abhängen lassen, in der gleichen Anzahl der Coefficienten der Gleichung der Curve entgegen. Bei dieser Art die Curve analytisch zu bestimmen, bringen wir nothwendiger Weise dadurch, dass wir Alles von zwei willkührlichen linearen Functionen abhängen lassen, auch Willkührliches in die Coefficienten ihrer Gleichung und nur durch

*) Von solchen Betrachtungen bin ich in dem *System der analytischen Geometrie* ausgegangen.

mehr oder minder zusammengesetzte Bedingungs - Gleichungen zwischen diesen Coefficienten (Gleichungen, in denen das Willkührliche sich gegenseitig aufheben muss, damit sie auf die eigentliche Natur der Curve sich beziehen können) wird es möglich untergeordnete Curven-Arten zu unterscheiden. Wir aber werden Ω_n durch vermittelnde Functionen, welche vom ersten oder auch von höhern Graden sind, ausdrücken. Diese vermittelnden Functionen hängen einerseits zwar auch von den beiden willkührlichen Functionen ab, andrerseits aber haben sie nach den vorstehenden Erörterungen, eine selbstständige geometrische Existenz. Die ihnen entsprechenden Curven stehen alle in ausgezeichneter Beziehung zur Curve Ω_n und durch sie wird diese Curve geometrisch bestimmt.

6. Die vorstehenden Andeutungen haben ihre Anwendung und Erläuterung schon in den beiden letzten Abschnitten des *Systems* gefunden; auf noch mehr characteristische Weise, wird diess fast auf jedem Blatte dieses neuen Werkes geschehen. Deshalb vermeide ich hier jede weitere Ausführung, und hebe nur einen Punct, welcher der Nerv aller unserer Entwicklungen ist, noch besonders hervor: die Bedeutung der Anzahl der Constanten in unsern Gleichungen. Auf das Zählen dieser Constanten reducirt sich Alles, und dieses um so mehr, je mehr unsere Untersuchungen allgemeiner und als Folge hiervon, zugleich einfacher sich gestalten.

Eine Gleichung, unter welcher Form sie auch erscheinen mag, und welche vermittelnde Functionen in ihr in Evidenz treten mögen, muss, wenn sie die allgemeine des n. Grades sein soll, die nothwendige Anzahl von Constanten haben, nemlich $\frac{n(n+3)}{2}$ und sie ist dann jedesmal die allgemeine, wenn sie diese Anzahl unabhängiger Constanten einschliesst. So ist zum Beispiel $\Theta_3 + \mu s \equiv pqr + \mu s = o$
die allgemeine Gleichung der Curven dritter Ordnung und enthält neun Constante, die wir unmittelbar zählen können. Denn auf jede der vier vermittelnden linearen Functionen p, q, r und s kommen zwei Constante und μ ist die neunte. Diese neun Constanten sind von einander ganz unabhängig; wir können keine der vier linearen Functionen ändern, ohne dadurch zugleich die Form der Gleichung zu ändern. Darum stehen die geraden Linien P, Q, R und S in einer vollkommen bestimmten geometrischen Beziehung zur Curve. Die drei ersten jener vier linearen Functionen kommen auf symmetrische Weise in der obigen Gleichung vor; die entsprechenden drei geraden Linien stehen daher in gleicher Beziehung zur Curve. Es sind ihre drei Asymptoten, und da die Curve nur drei Asymptoten hat, können wir der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung (der allgemeinen Gleichung dritten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen) nur auf einmalige Weise die obige Form geben. In andern Fällen ist es eine rein combinatorische Aufgabe, welche bestimmt, auf wievielfache Art eine Curve durch eine Gleichung von gegebener Form sich ausdrücken lässt. (Vergl. *System*, Dritter Abschnitt, §. 7. und §. 8.).

Es kann eine Gleichung überzählige Constanten enthalten; dann sind die vermittelnden Functionen durch ihre Beziehung zur gegebenen, durch diese Gleichung dargestellten, Curve erst dann vollkommen bestimmt, wenn wir eine gewisse Anzahl von Constanten unabhängig von der Curve willkührlich annehmen. Es gibt also unendlich viele andere Functionen und ihnen entsprechende Curven, welche wir an die Stelle der ursprünglichen setzen können, und die in gleicher geometrischer Beziehung zu der gegebenen Curve stehen. Die unvollständig bestimmten Constanten, welche in den verschiedenen vermittelnden Functionen der Gleichung der gegebenen Curve vorkommen, sind von einander abhängig; die bezüglichen Curven stehen also ebenfalls in einer gegenseitigen Abhängigkeit. Es enthält zum Beispiel die folgende Gleichung des dritten Grades $p\Omega_2 + \mu s = o$

zehn und folglich **eine** überzählige Constante. Von diesen zehn Constanten kommen **fünf** auf die Function Ω_2, **zwei** auf jede der beiden linearen Functionen p und s, und μ ist die **zehnte**. Die Functionen Ω_2 und s sind nicht vollständig bestimmt, aber sie stehen in gegenseitiger Abhängigkeit. Wir können Ω_2 um eine willkührliche Constante $\varkappa$ wachsen lassen, dann bleibt sowohl die vorstehende Gleichung, als auch ihre Form unverändert, wenn wir μs mit $(\mu s - \varkappa p)$ vertauschen. Es gibt also unendlich viele Curven der zweiten Ordnung, welche zu der durch die gegebene Gleichung dargestellten Curve in gleicher Beziehung stehen, als die Curve Ω_2. Alle diese Curven haben mit der gegebenen in unendlicher Entfernung auf zwei der drei Asymptoten derselben einen doppelten Contact. Erst wenn wir eine einzelne derselben willkührlich auswählen, und durch Ω_2 darstellen, wird die Linie S vollkommen bestimmt. Umgekehrt wird, wenn wir die Linie S, welche überhaupt jede beliebige gerade Linie sein kann, welche durch den Durchschnitt der gegebenen Curve mit ihrer Asymptote P geht, unter dieser Beschränkung willkührlich annehmen, dadurch die Curve Ω_2 vollkommen bestimmt.

Wir können mit leichter Mühe, in jedem vorliegenden Falle, aus einer gegebenen Gleichung die überzähligen Constanten durch Aenderung der Form derselben fortschaffen. (Die Form der letzten Gleichung zum Beispiel können wir unmittelbar auf die Form der vorhergehenden zurückführen.) Erst dann erkennen wir die eigentliche Natur der Curve, in so fern sie sich characteristisch in der neuen Form ausspricht, und wenn diese die nothwendige Anzahl von Constanten nicht mehr behalten haben sollte, und also nur eine **particuläre** Curven-Gattung der allgemeinen Ordnung anzeigt, so ergibt sich unmittelbar, worin das Wesen dieser Particularisation besteht. —

7. Die Bedeutung der Anzahl der Constanten in den Gleichungen der Curven, als einer rein abstracten Zahl, tritt uns ganz besonders in den folgenden Sätzen, mit welchen ich diese einleitenden Betrachtungen beschliesse, entgegen. Diese Sätze sind gleichsam die Axe um welche, was freilich nicht immer unmittelbar zu Tage liegt, alle unsere Untersuchungen sich drehen.

Es sei
$$\Omega_n = 0$$
die allgemeine Gleichung der Curven der n. Ordnung, welche, wenn wir Ω_n als Function zweier von Vorne herein willkührlich bestimmten linearen Functionen betrachten, und als solche vermittelst $\frac{n(n+3)}{2}$ unbestimmter Coefficienten ausdrücken, als von eben diesen Constanten abhängig anzusehen ist. Eine einzelne Curve dieser Ordnung ist hiernach auf einzige Weise gegeben, wenn wir die Werthe dieser $\frac{n(n+3)}{2}$ Constanten, oder statt dessen eine gleiche Anzahl linearer Bedingungs-Gleichungen zwischen allen diesen Constanten oder einigen derselben, oder endlich, weil jedem gegebenen Puncte der Curve eine lineare Bedingungs-Gleichung zwischen allen ihren Constanten entspricht, eine gleiche Anzahl unabhängig von einander auf der Curve angenommener Puncte kennen.

Durch $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right)$ gegebene Puncte lassen sich unendlich viele Curven der n. Ordnung legen; irgend zwei dieser Curven, wollen wir durch die folgenden beiden Gleichungen:
$$\Omega_n' = 0, \qquad \Omega_n'' = 0, \tag{1}$$
darstellen. Dann ist, indem wir durch μ einen unbestimmten Coefficienten bezeichnen,
$$\Omega_n' + \mu\Omega_n'' = 0 \tag{2}$$
die allgemeine Gleichung aller Curven der n. Ordnung, welche durch die gegebenen Puncte

gehen. Denn diese Gleichung wird für jeden dieser Puncte, unabhängig von μ, befriedigt, weil für jeden dieser zugleich auf den beiden Curven (1) liegenden Puncte, Ω'_n und Ω''_n zugleich verschwinden. Der Werth von μ (und jedem andern Werthe von μ entspricht eine andere Curve) ist durch einen neu hinzukommenden Punct der Curve (2) vollkommen und auf lineare Weise bestimmt. Nur in dem besondern Falle, dass dieser neue Punct der Curve (2) zugleich auf einer und also auch auf der andern der beiden Curven (1) liegt, verschwinden auch für diesen Punct die beiden Werthe von Ω'_n und Ω''_n zu gleicher Zeit, und dann stellt sich μ unter der unbestimmten und unbestimmbaren Form $\frac{0}{0}$ dar. Also bleibt in diesem Falle auch die Bestimmung der bezüglichen Curve unvollständig. Dieselbe Unvollständigkeit in der Bestimmung der Curve (2) besteht auf gleiche Weise dann immer noch fort, wenn zu den $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right)$ gegebenen Puncten, durch welche diese Curve gehen soll, eine beliebige Anzahl solcher Puncte, welche

$$n^2 - \left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right) \equiv \frac{n(n-3)}{2} + 1$$

nicht übersteigt, noch hinzukommt, vorausgesetzt, dass alle gegebenen Puncte, deren Anzahl hiernach bis n^2 ansteigen kann, ausser auf der zu bestimmenden Curve (2) auch noch auf einer der beiden Curven (1) oder mit andern Worten auf einer zweiten beliebigen Curve derselben Ordnung, und hiernach also zugleich auf unendlich vielen solchen Curven liegen.*) Die Curve (2) ist also ganz auf gleiche Weise vollständig bestimmt, wenn n^2 ihrer Puncte, welche zugleich auf irgend einer zweiten Curve derselben Ordnung liegen, oder wenn von diesen n^2 Puncten bloss irgend $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right)$ gegeben sind, und in beiden Fällen dann noch ein letzter gegebener Punct zur Bestimmung des Werthes von μ hinzukommt. Hierin liegt der Beweis des folgenden Satzes.

Alle Curven einer beliebigen n. Ordnung, welche durch $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right)$ willkührlich angenommene Puncte gehen, schneiden sich ausserdem auch noch in denselben $\left(\frac{n(n-3)}{2} + 1\right)$ Puncten, deren Lage allein durch die willkührlich angenommenen Puncte bestimmt ist.

---

*) Wir können nemlich, unserer Bezeichnungsweise gemäss, indem wir durch Ω'''_n eine ganz willkührlich angenommene Function des n. Grades bezeichnen, schrittweise mit der Gleichung (2) die nachstehenden Form-Aenderungen vornehmen:

$$\begin{aligned} o = \Omega'_n + \mu\Omega''_n &\equiv (1+\mu)\,\Omega_n, \\ &\equiv \Omega'''_n + [(1+\mu)\,\Omega_n - \Omega'''_n], \\ &\equiv \Omega'''_n + \mu\Omega''''_n; \end{aligned}$$

wonach die Curven Ω'''_n und Ω''''_n in ganz derselben Beziehung zu der, durch die Gleichung (2) dargestellten Curve Ω_n stehen, als die beiden Curven Ω'_n und Ω''_n und wir erhalten gleichmässig:

$$\mu = -\frac{\Omega'_n}{\Omega''_n} = -\frac{\Omega'''_n}{\Omega''''_n}$$

Es ist offenbar, dass diese Bestimmung von der Construction einer einzigen Gleichung des $\left(\frac{n(n-3)}{2}+1\right)$. Grades abhängt.

Acht Puncte einer Curve dritter Ordnung bestimmen nach dem vorstehenden Satze einen neunten Punct derselben Curve und hiernach unendlich viele andere Curven dritter Ordnung, welche in denselben neun Puncten sich schneiden. Wenn also neun von Vorne herein willkührlich angenommene Puncte einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, so sind dadurch unendlich viele neue Puncte derselben Curve durch lineare Constructionen gegeben; denn je acht der neun gegebenen und der durch diese allmählig gefundenen Puncte der Curve geben einen neuen Punct derselben.

Dreizehn Puncte einer Curve vierter Ordnung bedingen drei neue Puncte derselben Curve. Durch vierzehn willkührlich angenommene Puncte einer solchen Curve, sind unendlich viele Puncte derselben, unter der Voraussetzung der Auflösung von Gleichungen des dritten Grades, gegeben. Und so weiter.

8. Wir können die Curven einer beliebigen n. Ordnung dadurch particularisiren, dass wir sie $\left(\frac{n(n+3)}{2}-m\right)$ (wobei m eine beliebige ganze Zahl zwischen Null und $\frac{n(n+3)}{2}$ bedeutet) linearen Bestimmungen, das heisst solchen Bestimmungen unterwerfen, welche, wenn wir die Curven durch eine Gleichung zwischen zwei willkührlichen linearen Functionen ausdrücken, zu Bedingungs-Gleichungen des ersten Grades zwischen den Coefficienten dieser Gleichung führen. Alsdann hängen die so particularisirten Curven nur noch von m linearen Constanten ab und sind durch eine gleiche Anzahl von Puncten vollkommen bestimmt. So hängen zum Beispiel Curven zweiter Ordnung, die dadurch particularisirt sind, dass sie gleichseitige Hyperbeln sein sollen, statt von fünf nur von vier linearen Constanten ab. Mit Bezugnahme auf die Anfangs-Bemerkungen der vorigen Nummer erhalten wir hiernach, neben dem letzten Satze, sogleich den folgenden.

Alle Curven einer beliebigen n. Ordnung, die so particularisirt sind, dass sie durch m willkührlich angenommene Puncte auf lineare Weise bestimmt sind, gehen, wenn $(m-1)$ dieser Puncte gegeben sind, ausserdem auch noch durch andere $(n^2-(m-1))$ feste Puncte, deren Lage einzig von der Lage der gegebenen Puncte abhängt.

Wenn wir $m=\frac{n(n+3)}{2}$ setzen, so kommen wir auf den Satz der vorigen Nummer zurück. Ausserdem können wir für m jede kleinere ganze Zahl nehmen, die Zahl Eins nicht ausgeschlossen. Dadurch erhalten wir eine grosse Menge neuer geometrischer Anwendungen.

9. Es gibt noch eine zweite Art, den Satz der 7. Nummer zu verallgemeinern und dadurch seine Anwendbarkeit zu vermehren. Nach diesem Satze nehmen wir nemlich $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ Puncte willkührlich an und durch diese Puncte sind alsdann $\left(\frac{n(n-3)}{2}+1\right)$ neue Puncte bestimmt. Die Anzahl aller Puncte beträgt hiernach n^2 und durch diese n^2 Puncte gehen unendlich viele Curven der n. Ordnung, die wir durch die allgemeine Gleichung

$$\Omega_n=0$$

darstellen wollen. Wir wollen ferner von den willkührlich angenommenen Puncten $\frac{p(p+3)}{2}$ beliebig absondern. Durch diese abgesonderten Puncte ist alsdann irgend eine Curve der p. Ordnung, deren Gleichung die folgende sei:

$$\Omega_p=0,$$

auf lineare Weise bestimmt. Wir nehmen hierbei p kleiner als n und wollen dem entsprechend

$$n = p + q$$

setzen, wonach die Anzahl der noch übrigen willkührlich angenommenen Puncte:

$$\frac{n(n+3)}{2} - \frac{p(p+3)}{2} - 1 \equiv nq - \left(\frac{q(q-3)}{2} + 1\right)$$

beträgt. Wenn wir endlich nun noch die Voraussetzung machen, dass alle diese noch übrigen Puncte auf ein und derselben Curve der q. Ordnung liegen, deren Gleichung

$$\Omega_q = o$$

sei, so ist klar, dass insbesondere auch das System der beiden Curven Ω_p und Ω_q, deren Gleichungen wir in die folgende zusammenziehen können:

$$\Omega_p \, \Omega_q = o,$$

in die Reihe der Curven Ω_n gehört und dass also die, durch die willkührlich angenommenen Puncte nach unserm Satze bestimmten neuen $\left(\frac{n(n-3)}{2} + 1\right)$ Puncte auf die beiden Curven Ω_p und Ω_q sich vertheilen. Die ganze Anzahl der Durchschnittspuncte aller einzelen Curven Ω_n mit der letztgenannten dieser beiden Curven beträgt nq; also werden durch die obigen $\left(nq - \left(\frac{q(q-3)}{2} + 1\right)\right)$ Puncte, welche, nach unserer Voraussetzung, in dieser Anzahl einbegriffen sind, neue $\left(\frac{q(q-3)}{2} + 1\right)$ Puncte bestimmt. Und somit ist der nachstehende Satz bewiesen.

Alle Curven der n. Ordnung, welche durch $\left(nq - \left(\frac{q(q-3)}{2} + 1\right)\right)$ auf dem Umfange einer gegebenen Curve der q. Ordnung willkührlich angenommenen Puncte gehen, schneiden dieselbe Curve ausserdem auch noch in neuen $\left(\frac{q(q-3)}{2} + 1\right)$ festen Puncten.

Die Lage dieser neuen Puncte wird einzig und allein durch die Lage der willkührlich angenommenen, vermittelst der Auflösung einer Gleichung des $\left(\frac{q(q-3)}{2} + 1\right)$. Grades, bestimmt.

10. Die Beziehung, in welcher der Satz der vorigen Nummer zu dem Satze der 7. Nummer steht, ergibt sich bei einer neuen Verallgemeinerung noch deutlicher. Wir können nemlich, nachdem wir einmal die Voraussetzung gemacht haben, dass in die Reihe der Curven Ω_n ein System zweier Curven Ω_p und Ω_q gehört, die willkührlich anzunehmenden Puncte, innerhalb gewisser Gränzen, beliebig auf diese beiden Curven vertheilen; in der Art dass, wenn g und h zwei durch die Bedingungs-Gleichung

$$g + h = \frac{n(n-3)}{2} + 1 \tag{1}$$

von einander abhängigen Zahlen bedeuten, auf die eine Curve $(np - g)$ und auf die andere $(nq - h)$ jener willkührlich angenommenen Puncte kommen. Damit diese beiden Curven durch die angenommenen Puncte vollkommen bestimmt seien, ist erforderlich, dass

$$np - g \overset{=}{>} \frac{p(p+3)}{2}, \qquad nq - h \overset{=}{>} \frac{q(q+3)}{2},$$

also

$$g \overset{=}{<} \frac{p(p-3)}{2} + pq, \qquad h \overset{=}{<} \frac{q(q-3)}{2} + pq, \tag{2}$$

und wenn wir nach einander für h und g die Werthe aus (2) in die Gleichung (1) substituiren,

und berücksichtigen dass $n = p + q$, wird dadurch zugleich bedingt, dass

$$g \overset{=}{>} \frac{p(p-3)}{2} + 1, \qquad h \overset{=}{>} \frac{q(q-3)}{2} + 1.$$

Hiernach ergeben sich zwei Gränz-Werthe zwischen welchen g liegen muss, und hiervon gegenseitig abhängend zwei Gränz-Werthe für h. Auf diese Weise sind wir zu dem nachstehenden Satze gelangt.

Wenn man voraussetzt, dass p und q irgend zwei ganze Zahlen bedeuten, deren Summe n betrage, dass ferner g und h, alle willkührlichen Zahlen sein können, die bloss der Bedingung unterworfen sind, dass g zwischen den Gränzen $\left(\frac{p(p-3)}{2} + 1\right)$ und $\left(\frac{p(p-3)}{2} + pq\right)$, diese Gränz-Werthe selbst nicht ausgenommen, liege und dass $(g+h)$ gleich $\left(\frac{n(n-3)}{2} + 1\right)$ sei — und man hiernach auf einer gegebenen Curve der p. Ordnung $(np - g)$ und auf einer gegebenen Curve der q. Ordnung $(nq - h)$ Puncte willkührlich annimmt, so schneiden alle Curven der n. Ordnung, welche zugleich durch alle auf den beiden gegebenen Curven willkührlich angenommenen Puncte gehen, die erste dieser beiden Curven, ausser in den auf ihr angenommenen, noch in denselben g und die zweite Curve, ausser in den auf ihr angenommenen, noch in h neuen festen Puncten.

Alle Curven der 4. Ordnung zum Beispiel, welche durch 13 Puncte gehen, von welchen 7 auf einem ersten und 6 auf einem zweiten gegebenen Kegelschnitte willkührlich angenommen worden sind, schneiden den ersten Kegelschnitt überdiess noch in einem und den zweiten in 2 neuen festen Puncten. Alle Curven der 5. Ordnung, welche eine gegebene Curve der 3. Ordnung bezüglich in

10, 11, 12, 13, 14,

und überdiess einen gegebenen Kegelschnitt bezüglich in

9, 8, 7, 6, 5,

willkührlich angenommenen Puncten schneiden, schneiden ausserdem noch die gegebene Curve dritter Ordnung bezüglich in

5, 4, 3, 2, 1,

und den gegebenen Kegelschnitt bezüglich in

1, 2, 3, 4, 5,

neuen festen Puncten.

Wir können auch, indem wir $n = p + q + r + \cdots$ nehmen, gehörig vertheilt auf gegebenen Curven, deren Ordnungen $p, q, r \ldots$ sind, $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right)$ Puncte willkührlich annehmen; dann sind neue Puncte bestimmt, in welchen alle Curven der n. Ordnung, welche durch die willkührlich angenommenen Puncte gehen, die gegebenen Curven schneiden. Die weitere Discussion bietet keine Schwierigkeiten dar.

11. Als Corollarium zu dem Satze der vorigen Nummer erhalten wir den folgenden.

Wenn durch die n^2 Durchschnitts-Puncte irgend zweier Curven der n. Ordnung ein System zweier Curven der p. und der q. Ordnung gehen soll, so ist nothwendig und hinreichend, dass von diesen Durchschnittspuncten $(np - g)$ auf der Curve der p. und $(nq - h)$ auf der Curve der q. Ordnung liegen.

Hierbei gelten die Zahlbestimmungen der vorigen Nummer fort. Wenn wir für g insbesondere den kleinsten Werth nehmen, ergibt sich der folgende Satz.

Wenn von den n^2 Durchschnittspuncten irgend zweier Curven der n. Ordnung $\left(np - \left(\frac{p(p-3)}{2} + 1\right)\right)$ auf dem Umfange einer Curve der p. Ordnung liegen, so geht durch $n(n-p)$ der übrigen Durchschnittspuncte eine Curve der $(n-p)$. Ordnung. *)

12. In der Wichtigkeit der Sätze der letzten Nummern für unsere Betrachtungsweisen finde ich die Aufforderung über das Historische derselben einige Andeutungen hinzuzufügen. Der Satz der 7. Nummer, welcher, wie seine Verallgemeinerungen, sowohl algebraisch als auch geometrisch aufgefasst und ausgedrückt werden kann, trat mir zuerst, während der Ausarbeitung des ersten Bandes der *Entwicklungen* bei der Discussion über die Ordnung der Osculation zweier Curven entgegen und findet sich zuerst in einer Note **) erwähnt. In Cramer's oft citirtem Werke ***) fand ich darauf als Paradox ausführlich erörtert, dass zwei Curven in mehr Puncten sich schneiden als zur Bestimmung jeder derselben erforderlich sind, und die richtige aber zu unbestimmte algebraische Erklärung gegeben, dass die n^2 Wurzeln derjenigen Gleichung, welche man aus zwei gegebenen Gleichungen des n. Grades zwischen zwei unbekannten Grössen durch Elimination einer dieser Grössen erhält, nicht unabhängig von einander sind. In mathematischen Dingen kann nicht lange etwas ein Paradox bleiben, eben so wenig als ein Kunstgriff lange als solcher sich behaupten kann; das Paradox verschwindet, wenn verdeckte Mittelglieder der Verkettung mathematischer Sätze hervortreten und der Kunstgriff verliert sich in einer neuen durchgreifenden Behandlungsweise. Einer ausführlichern Discussion des Satzes der 7. Nummer und der entsprechenden Sätze für Constructionen des Raumes widmete ich später zwei besondere Abhandlungen †) und fügte dann noch, zugleich mit Berücksichtigung des Princips der Reciprocität, im zweiten Bande der *Entwicklungen* die in der 8. Nummer enthaltenen Erweiterungen des Satzes, wodurch derselbe seine Anwendbarkeit bis auf Gleichungen des ersten Grades erstreckt, hinzu. ††) Die Verallgemeinerung der 9. Nummer findet sich mehrere Jahre später zuerst in zwei von einander unabhängigen Abhandlungen des Journals für Mathematik. (Da diese beiden Abhandlungen nicht in demselben Hefte des Journals abgedruckt sind, und auch die zweite von keiner Bemerkung des Herrn Herausgebers begleitet ist, so scheint es mir nöthig hinzuzufügen, dass beide

---

*) Die identische Gleichung:
$$\Omega'_n + \mu\Omega''_n \equiv (1+\mu)\,\Omega_n,$$
drückt aus, dass die Curve Ω_n durch die n^2 Durchschnitte der beiden Curven Ω'_n und Ω''_n geht und, bei gehöriger Bestimmung von μ, erhält man hiernach jede beliebige Curve der n. Ordnung, welche durch dieselben n^2 Puncte geht. Wenn insbesondere Ω_n einen Factor Ω_p hat, so geht die, diesem Factor entsprechende Curve der p. Ordnung durch np dieser Puncte und umgekehrt. Dann aber ist der andere Factor von Ω_n vom $(n-p)$. Grade und es geht die entsprechende Curve Ω_{n-p} durch die übrigen $n(n-p)$ Durchschnittspuncte. Den entsprechenden Satz hat Herr Gergonne (Ann. T. XVII) zuerst *explicite* aufgestellt: »Wenn von den n^2 Durchschnittspuncten zweier Curven der n. Ordnung np auf einer Curve der p. Ordnung liegen, so geht durch die übrigen $n(n-p)$ eine Curve der $(n-p)$. Ordnung.« Um diesen Satz, oder vielmehr um das analytische Princip, das der obigen Beweisführung desselben zu Grunde liegt, bewegen sich alle meine frühern Arbeiten. Aber wir sehen, dass dieser Satz unvollständig ist. An die neuen Sätze von potenzirter Allgemeinheit knüpft sich ein neues Princip der Behandlungsweise; das Zählen der Constanten und die Betrachtung ihrer abstracten Anzahl tritt an die Stelle der Verbindung allgemeiner Curven-Symbole.

**) Entw. I, S. 228.

***) Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques. Genève 1750.

†) Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés. Gerg. Ann. XIX. p. 97. Recherches sur les surfaces algébriques, de tous les degrés, p. 129.

††) Entw. II, S. 242.

Abhandlungen als Manuscript zugleich in den Händen desselben waren). In der ersten dieser beiden Abhandlungen *) ist lediglich nur eine Abhandlung Euler's aus dem Jahre 1748 citirt, **) aus welcher hervorgeht, dass Euler wohl früher als Cramer auf das fragliche Paradox stiess, aber in der Erklärung desselben nicht weiter ging als dieser. Er erwähnt desselben aber nicht in seiner in demselben Jahre erschienenen *Introductio in Analysin infinitorum*, und ich weiss nicht, dass seitdem ein anderer Mathematiker dasselbe wieder aufgenommen hat. Die zweite der genannten Abhandlungen ***) rührt von mir her und war ursprünglich für den ersten Band des *Journal de mathématiques pures et appliquées*, in dem unter der trefflichen Redaction des Herrn Liouville die Gergonne'schen Annalen wieder ins Leben getreten sind, bestimmt; ein berühmter Analyst hatte durch eine mündliche Bemerkung über die Schwierigkeit der Uebertragung der Relationen, welche die Wurzeln einer Gleichung mit einer einzigen unbekannten Grösse betreffen, auf den Fall der zusammengehörigen Wurzeln eines Systems zweier oder mehrerer Gleichungen zwischen zwei oder mehrern unbekannten Grössen die Abfassung derselben veranlasst; zu dem Neuen, welches sie enthält hatte mich der Satz der 20. Nummer, der schon seit längerer Zeit ausgearbeiteten, ersten Abtheilung des gegenwärtigen Bandes hingeführt. Aus dem eben Bemerkten geht der Grund hervor, weshalb die Abhandlung französisch abgefasst und ins algebraische Gewand eingekleidet worden ist. Endlich ist noch hinzuzufügen, dass in der vorstehenden 10. Nummer der Satz der 7. Nummer eine neue letzte Verallgemeinerung erhalten hat. —

---

*) De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis simul cum enodatione paradoxi algebraici. Auctore G. G. J. Jacobi. Crelle's Journal XV. 4. Heft.

**) Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes.

***) Théorêmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues. Crelle's Journal XVI. 1. Heft.

Erster Abschnitt.

Ueber die unendlichen Zweige der algebraischen Curven und ihre geradlinigen und krummlinigen Asymptoten.

§. 1.

Zweige mit geradlinigen Asymptoten.

13. Eine Curve der n. Ordnung wird von einer geraden Linie, im Allgemeinen in n Puncten geschnitten. Wenn die Curve, in besondern Fällen von einer geraden Linie nur in $(n-1)$ Puncten geschnitten wird, so geschieht diess, weil der n. Durchschnittspunct unendlich weit liegt; wird sie nur in $(n-2)$ Puncten geschnitten, so geschieht es weil zwei Durchschnittspuncte, wird sie nur in $(n-3)$ Puncten geschnitten, so geschieht es weil drei Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, und so weiter.

Wollen wir diese Behauptung nicht bloss auf Gränz-Betrachtungen in der Construction gründen, so können wir ihre Richtigkeit auch unmittelbar auf analytischem Wege darlegen, indem wir erwägen, dass, wenn wir die Curve und die schneidende gerade Linie bezüglich durch die allgemeinen Gleichungen des n. und des ersten Grades zwischen zwei willkührlich angenommenen linearen Functionen darstellen und dann zwischen diesen beiden Gleichungen eine der beiden linearen Functionen eliminiren: die resultirende Gleichung, welche nur noch die andere lineare Function enthält, vom n. Grade ist und also n Durchschnittspuncte gibt. Soll der Grad dieser Gleichung, und demnach die Anzahl der Durchschnittspuncte sich reduciren, so kann diess bloss dadurch geschehen, dass die Coefficienten der höchsten Glieder durch eine besondere Constanten-Bestimmung verschwinden. Alsdann aber wird eine entsprechende Anzahl der n Wurzeln der ursprünglichen Gleichung unendlich. So reducirt sich zum Beispiel die folgende Gleichung des dritten Grades:

$$\varkappa z^3 + \lambda z^2 + \mu z + \nu = o,$$

nur dann auf den zweiten Grad, wenn der Coefficient $\varkappa$ verschwindet und demnach ein Werth von z unendlich wird; nur dann auf den ersten, wenn zugleich λ verschwindet und demnach zwei Werthe von z unendlich werden und endlich reducirt der erste Theil dieser Gleichung sich nur dann auf eine Constante, wenn, dadurch dass auch μ verschwindet, alle drei Wurzeln der ursprünglichen Gleichung unendlich werden.

Weil ferner die Lage einer geraden Linie von zwei Constanten abhängt, so können wir dieselbe, wenn die Curve der n. Ordnung gegeben ist, im Allgemeinen so bestimmen, dass zwei ihrer Durchschnittspuncte mit der Curve unendlich weit rücken. In diesem Falle erhält die gerade Linie ganz den Character einer Tangente, auf welcher der Berührungspunct unendlich weit liegt, und wir legen ihr den Namen Asymptote bei. Drei oder mehr Durchschnittspuncte mit einer geraden Linie können aber nur bei Curven von besonderer Art unendlich weit liegen; alsdann wird die Curve von der geraden Linie in unendlicher Entfernung

osculirt. Es ist, wenn wir bei drei unendlich weit entfernten Durchschnittspuncten stehen bleiben, die Asymptote als eine Tangente in einem unendlich weit gerückten Wendungspuncte anzusehen.

14. Es sei hiernach $$\Omega_n = o$$ die allgemeine Gleichung der Curven einer beliebigen n. Ordnung und $$p = o$$ die Gleichung einer beliebigen geraden Linie P. Indem wir alsdann, den Bemerkungen der 5. Nummer über Functionen-Bestimmung gemäss, Ω_n als eine Function von p und irgend einer zweiten linearen Function, die wir z nennen wollen, betrachten, dann alle Glieder dieser Function, welche p enthalten, in dem Ausdrucke $p\Omega'_{n-1}$ zusammenfassen, und endlich alle übrigen Glieder, die eine Function des n. Grades in z bilden werden, durch $\varphi_n(z)$ bezeichnen, können wir die nachstehende identische Gleichung bilden

$$\Omega_n \equiv p\Omega'_{n-1} + \varphi_n(z). \tag{1}$$

Für die Durchschnitte der Curve mit der Linie P verschwinden zugleich Ω_n und p, wonach die vorstehende identische Gleichung, zur Bestimmung dieser Durchschnitte,

$$\varphi_n(z) = o$$

gibt. Diese Gleichung muss, wenn zwei ihrer n Wurzeln unendlich werden sollen, dadurch, dass die Coefficienten der beiden höchsten Potenzen von z verschwinden, auf den $(n-2)$. Grad sich reduciren. Wenn also die beliebige gerade Linie P insbesondere eine Asymptote der Curve sein soll, so ist nothwendig, dass, indem $\varphi_{n-2}(z)$ eine Function des $(n-2)$. Grades in z darstellt, die obige identische Gleichung (1) die nachstehende Form annehme:

$$\Omega_n \equiv p\Omega'_{n-1} + \varphi_{n-2}(z). \tag{2}$$

Wenn wir durch Ω_{n-3} irgend eine beliebige Function des $(n-3)$. Grades derselben beiden linearen Functionen p und z darstellen und der Kürze halber,

$$\Omega'_{n-1} + \lambda\Omega_{n-3} \equiv \Omega_{n-1},$$

$$p\Omega_{n-3} + \varphi_{n-2}(z) \equiv \mu\Omega_{n-2},$$

setzen, können wir die Gleichung (2) auch unter der folgenden allgemeinen Form schreiben:

$$\Omega_n \equiv p\Omega_{n-1} + \mu\Omega_{n-2}. \tag{3}$$

Es behält diese Gleichung, nach der 5. Nummer, ihre volle Geltung, was für zwei lineare Functionen wir auch für die beiden veränderlichen Grössen nehmen mögen, denn Ω_n, Ω_{n-1} und Ω_{n-2} sind bezüglich die allgemeinen Functionen des n., $(n-1)$. und $(n-2)$. Grades.

15. Wenn die Gleichung $$q = o$$ eine zweite, gerade Linie, Q, darstellt, welche ebenfalls eine Asymptote der gegebenen Curve der n. Ordnung sein soll, so muss, wenn wir p und q als die beiden linearen Functionen, von welchen Ω_n abhängt, betrachten, und dann q gleich Null setzen, die Function Ω_n und also auch der ihr identische zweite Theil der Gleichung (3), auf eine Function des $(n-2)$. Grades von p sich reduciren. Ω_{n-2} reducirt sich stets auf eine solche Function; soll auch $p\Omega_{n-1}$, es thun, so muss sich Ω_{n-1}, nach dem Verschwinden von q, auf eine Function des $(n-3)$. Grades von p reduciren. Diess bedingt die folgende identische Gleichung:

$$\Omega_{n-1} \equiv q\Omega^o_{n-2} - \varrho\Omega_{n-3}.$$

Setzen wir hiernach, der Kürze wegen,

$$\varrho p\Omega_{n-3} + \mu\Omega_{n-2} \equiv \mu'\Omega'_{n-2},$$

so verwandelt sich die Gleichung (3) in die folgende:

$$\Omega_n \equiv pq\Omega^o_{n-2} + \mu'\Omega'_{n-2}. \tag{4}$$

Wenn $$r = o$$ eine dritte Asymptote, R, der gegebenen Curve darstellen soll und wir etwa p und r als die

beiden unabhängigen linearen Functionen nehmen, so muss sich Ω_n, auch wenn wir r gleich Null setzen, auf eine Function des $(n-2)$. Grades in p reduciren. Es wird durch diese Voraussetzung bedingt, dass, weil q, als Function von p und r betrachtet, diese Grössen in der ersten Potenz enthält, die Function Ω^{o}_{n-2} in der identischen Gleichung (4) durch das Verschwinden von r auf eine Function des $(n-4)$. Grades von p sich reducire und dass mithin:

$$\Omega^{o}_{n-2} \equiv r\Omega_{n-3} - \sigma\Omega_{n-4}.$$

Setzen wir hiernach, der Kürze wegen,

$$\sigma pq\Omega_{n-4} + \mu'\Omega'_{n-2} \equiv \mu''\Omega''_{n-2},$$

so nimmt die identische Gleichung (4) folgende neue Form an:

$$\Omega_n \equiv pqr\Omega_{n-3} + \mu''\Omega''_{n-2}. \tag{5}$$

Wenn wir auf demselben Wege fortfahren, können wir alle Asymptoten der gegebenen Curve in ihrer Gleichung in Evidenz bringen. Die resultirende Form wird mit Hinweglassung der Accente durch die folgende identische Gleichung angezeigt:

$$\Omega_n \equiv pqr\,.\,.\,.\,st + \mu\Omega_{n-2}, \tag{6}$$

in welcher das erste Glied des zweiten Theils ein Product von n linearen Functionen, denen die n Asymptoten der Curve P, Q, R . . . S, T entsprechen, und Ω_{n-2} eine vollkommen bestimmte Function des $(n-2)$. Grades ist.

16. Wir können die Form der letzten identischen Gleichung nach der Methode der unbestimmten Coefficienten unmittelbar bestätigen, indem wir Ω_n als die allgemeine Function irgend zweier unabhängigen linearen Functionen betrachten und durch dieselben beiden linearen Functionen und die gehörige Anzahl unbestimmter Constanten die allgemeine Function des $(n-2)$. Grades, Ω_{n-2} und die n linearen Functionen p, q, r . . s, t ausdrücken. Auf diesem Wege, den ich in meinem *Systeme der analytischen Geometrie* *) in Beziehung auf die Curven der dritten Ordnung eingeschlagen habe, ergibt sich, dass die allgemeine Gleichung der Curven einer beliebigen n. Ordnung sich immer und zwar nur auf einzige Weise, auf die Form (6) bringen lässt. Es können die hiernach bestimmten linearen Functionen p, q, r . . s, t sowohl imaginär als auch reell sein; aber auch im ersten Fall ist das Product dieser Functionen, paarweise genommen, nothwendig reell.

17. Auch ohne zwei lineare Functionen willkührlich anzunehmen, und die Methode der unbestimmten Coefficienten zur Bestimmung der in der Form (6) vorkommenden Functionen anzuwenden, können wir Alles aus dieser Form selbst entnehmen. Es ist

$$pqr\,.\,.\,st + \mu\Omega_{n-2} = 0$$

die Gleichung der Curve Ω_n und indem wir zwei Constante auf jede der linearen Functionen im ersten Gliede und $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ Constante auf Ω_{n-2} rechnen, erhalten wir, auch μ mitgezählt, im Ganzen

$$2n + \frac{(n-2)(n+1)}{2} + 1 \equiv \frac{n(n+3)}{2}$$

Constante. Für Curven der n. Ordnung ist diess die nothwendige Constanten-Anzahl. Diese Constanten sind ferner von einander unabhängig, denn wir können die Constanten keiner der linearen Functionen, die in der Form (6) vorkommen, ändern, ohne diese Form selbst zu ändern. Wir gelangen hiernach, auch ohne zu der Ableitung der Form (6) in der 15. und 16. Nummer zurückzugehen, zu der Folgerung, dass die Gleichung der Curven der n. Ordnung im Allgemeinen sich auf die Form (6) bringen lässt.

---

*) Dritter Abschnitt. §. 1.

Diese Form zeigt darin, dass sie zum n. Grade ansteigt, dass eine Curve der n. Ordnung n Asymptoten haben kann, und weil diese Form die allgemeine ist, dass sie so viele Asymptoten haben muss. Auch legt dieselbe Form dar, dass eine solche Curve nicht mehr als n Asymptoten haben kann. Denn wäre Z eine $(n+1)$. Asymptote und

$$z = 0$$

die Gleichung derselben, so müsste aus der algebraischen Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung der Curve eine Gleichung des $(n-2)$. Grades sich ergeben. Das Product der n linearen Functionen des ersten Theiles dieser Gleichung müsste dadurch also auch, weil es nicht verschwinden kann, wenigstens auf denselben Grad sich reduciren. Setzen wir, um zu zeigen, dass diess nicht Statt findet,

$$\begin{aligned} q &\equiv z+\alpha p+\beta, \\ r &\equiv z+\alpha' p+\beta', \\ s &\equiv z+\alpha'' p+\beta'', \end{aligned}$$

und so fort, so springt in die Augen, dass das Product $pqr\,..\,st$ so lange noch, auch nachdem wir z gleich Null gesetzt haben, p in der n. Potenz enthält, als nicht einer der Coefficienten α, α', α''... verschwindet. Wenn aber einer dieser Coefficienten verschwindet, so reducirt sich dieses Product dadurch, dass die Linie Z einer Asymptote der Curve parallel ist, auf den $(n-1)$. Grad. Es reducirt sich nur dann auf den $(n-2)$. Grad, wenn zwei der genannten Coefficienten, etwa α und α', zugleich verschwinden, wonach zwei der n Asymptoten, nach unserer Annahme Q und R, beide der Linie Z und also auch unter einander parallel sind. Solche particuläre Beziehungen sind aber hier von unsern allgemeinen Betrachtungen einstweilen ganz ausgeschlossen. Die Curve kann also nicht mehr als n Asymptoten haben, und da diese in der fraglichen Form auf symmetrische Weise vorkommen, kann die Gleichung der Curve diese Form auch nur auf einzige Weise annehmen.

18. Dass die allgemeine Gleichung der Curven der n. Ordnung nur auf einzige Weise die Form der Gleichung (6) annehmen könne, folgt aber auch, wenn wir uns nicht begnügen wollen, diese Form ohne Weiteres hinzuschreiben und dann allein aus sich selbst zu deuten, aus der obigen Ableitung dieser Form. Wenn P irgend eine Asymptote der Curve Ω_n ist, so ergibt sich nach der 12. Nummer die folgende identische Gleichung:

$$\Omega_n \equiv p\Omega_{n-1} + \mu\Omega_{n-2}$$

und wenn dann Q irgend eine zweite Asymptote derselben Curve ist, fordert die 15. Nummer:

$$\Omega_{n-1} \equiv q\Omega^0_{n-2} + \varrho\Omega_{n-3}.$$

Hiernach ist aber Q nicht nur eine Asymptote der Curve Ω_n sondern auch der Curve Ω_{n-1}, in der Art dass, ausser P, die gegebene Curve keine Asymptote haben kann, die nicht zugleich auch eine Asymptote der letztgenannten Curve wäre. Und, umgekehrt, jede Asymptote dieser Curve ist nothwendig eine Asymptote der gegebenen. Die Anzahl der Asymptoten einer Curve steigt also jedesmal um eine Einheit, wenn die Ordnung der Curve um Eins wächst: und ist also dieser Ordnung gleich.

19. Die Form der identischen Gleichung:

$$\Omega_n \equiv pqr\,..\,st + \mu\Omega_{n-2},$$

ist dadurch algebraisch bedingt, dass eine gegebene Function des n. Grades von zwei unbekannten Grössen, nach Hinzufügung einer gehörig bestimmten Function dieser Grössen, welche bloss bis zum $(n-2)$. Grade ansteigt, im Allgemeinen sich in n Factoren des ersten Grades zerlegen lässt.

Wenn wir dieselbe Form geometrisch deuten, so erhalten wir den nachstehenden, in seiner allgemeinen Aussage schon von Herrn Poncelet gegebenen Satz.

Eine Curve der n. Ordnung wird von ihren n Asymptoten in solchen

$n(n-2)$ **Puncten geschnitten, welche alle auf dem Umfange ein und derselben Curve der** $(n-2)$. **Ordnung liegen.**

So liegen zum Beispiel die drei Durchschnitte einer Curve dritter Ordnung mit ihren drei Asymptoten in gerader Linie, die $4.2 \equiv 8$ Durchschnitte einer Curve vierter Ordnung mit ihren vier Asymptoten auf einer Linie zweiter Ordnung. Und so weiter.

20. Diejenige Curve, welche durch die Gleichung

$$\Omega_{n-2} = 0$$

dargestellt wird, hängt, weil es die allgemeine der $(n-2)$. Ordnung ist, von $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ Constanten ab, und ist durch eine gleiche Anzahl gegebener Puncte, durch welche sie gehen muss, vollkommen bestimmt. Wenn also von den $n(n-2)$ Durchschnittspuncten dieser Curve mit den n Asymptoten der gegebenen Curve n. Ordnung $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ gegeben sind, so sind dadurch zugleich auch die Uebrigen $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ vollkommen bestimmt. Es tritt uns hiernach die Frage entgegen, nach welchem Gesetze wir, zur geometrischen Bestimmung einer Curve n. Ordnung, deren n Asymptoten gegeben sind, auf diesen verschiedenen Asymptoten die gehörige Anzahl von Durchschnittspuncten annehmen können.

Um dieses Gesetz darzulegen, wollen wir von den n Asymptoten der Curve in der Gleichung derselben nur eine beliebige Anzahl m, nemlich P, Q .. in Evidenz treten lassen. Die Form dieser Gleichung ist nach der 15. Nummer die folgende:

$$pq \ldots \Omega_{n-m} + \mu' \Omega'_{n-2} = 0,$$

die wir, indem wir, nach der, am Ende der 4. Nummer festgestellten, Bezeichnungsweise,

$$pq \cdots \equiv \Theta_m$$

setzen, auf die nachstehende Art schreiben wollen:

$$\Theta_m \Omega_{n-m} + \mu' \Omega'_{n-2} = 0. \tag{1}$$

In dieser Form sind die beiden Functionen Ω_{n-m} und Ω_{n-2} durch die gegebene Curve nicht absolut bestimmt, und die bezüglichen Curven stehen daher auch in keiner ausschliesslichen Beziehung zu der gegebenen. Denn, wenn wir durch Ω_{n-m-2} eine durchaus willkührliche Function des $(n-m-2)$. Grades bezeichnen und dann

$$\Omega_{n-m} - \lambda \Omega_{n-m-2} \equiv \Omega'_{n-m}, \tag{2}$$

$$\varrho \Theta_m \Omega_{n-m-2} + \mu' \Omega'_{n-2} \equiv \mu'' \Omega''_{n-2} \tag{3}$$

setzen, können wir die Gleichung (1) auch in die folgende verwandeln:

$$\Theta_m \Omega'_{n-m} + \mu'' \Omega''_{n-2} \equiv 0,$$

welche ganz dieselbe Form hat, und in welcher dieselben m Asymptoten in Evidenz treten. Die beiden neuen Curven Ω'_{n-m} und Ω''_{n-2} stehen also ganz in derselben Beziehung zu der gegebenen Curve der n. Ordnung als die frühern beiden Curven Ω_{n-m} und Ω'_{n-2}; und zwar kann Ω''_{n-2}, was die Gleichung (3) zeigt, jede beliebige Curve sein, welche wie die Curve Ω'_{n-2} durch die Durchschnittspuncte der gegebenen Curve der n. Ordnung mit ihren m Asymptoten Θ_m geht, und Ω'_{n-m}, was aus (2) sich ergibt, jede beliebige Curve der $(n-m)$. Ordnung, welche wie die Curve Ω_{n-m}, die übrigen $(n-m)$ Asymptoten der gegebenen Curve zu den ihrigen hat. *) Nachdem aber eine der beiden Curven Ω'_{n-m} und Ω''_{n-2}, etwa die

*) Was die letztere Behauptung betrifft so können wir, um die fraglichen $(n-m)$ Asymptoten in Evidenz

erstgenannte, durch willkührliche Voraussetzungen bestimmt worden ist, ist es die andere ebenfalls durch ihre Beziehung zu der gegebenen Curve Ω_n. Es zeigt aber die Gleichung (3), dass die Curve Ω'_{n-2} von so vielen willkührlichen Constanten abhängt, als die ganz willkührliche Function $\varrho\Omega_{n-m-2}$, nemlich von $\left(\frac{(n-m-2)\,(n-m+1)}{2}+1\right)$. (Das ist zugleich die Anzahl der **überzähligen** Constanten in der Form der Gleichung (1).) Wir können diese Curve also durch eine gleiche Anzahl von Puncten, die wir willkührlich und unabhängig von der gegebenen Curve Ω_n, annehmen, legen und dadurch vollkommen bestimmen. Im Ganzen sind aber zu der vollständigen Bestimmung einer Curve der $(n-2)$. Ordnung $\frac{(n-2)\,(n+1)}{2}$ Puncte erforderlich und hinreichend, also ausser den schon willkührlich angenommenen nur noch:

$$\frac{(n-2)\,(n+1)}{2}-\frac{(n-m-2)\,(n-m+1)}{2}-1\equiv m\,(n-2)-\frac{m(m-3)}{2}-1\equiv\lambda.$$

So viele Puncte können wir also unter den $m\,(n-2)$ Durchschnittspuncten, in welchen überhaupt die gegebene Curve Ω_n von ihren m Asymptoten Θ_m geschnitten wird, beliebig auswählen. Dann sind die übrigen dieser Durchschnittspuncte, deren Anzahl noch

$$\frac{m(m-3)}{2}+1\equiv\gamma$$

beträgt, durch die beliebig angenommenen bestimmt. Diese Anzahl ist, wie man sieht, von n, dem Grade der gegebenen Curve, unabhängig.

Wir können also auf m geraden Linien, welche ganze Zahl m auch bezeichnen mag, nie mehr als λ Durchschnittspuncte zur Bestimmung einer Curve der n. Ordnung, welche die m geraden Linien unter ihre Asymptoten zählt, willkührlich annehmen. Alsdann sind die übrigen γ Durchschnittspuncte vollkommen bestimmt. Für $m=1$ und $m=2$, ergibt sich $\gamma=0$; wonach man auf einer und auf zweien Asymptoten **alle** Durchschnittspuncte beliebig annehmen kann. Der Zuwachs den γ erhält, wenn wir von $(m-1)$ zu m übergehen, beträgt

$$\frac{m\,(m-3)}{2}-\frac{(m-1)(m-4)}{2}\equiv m-2.$$

Wenn wir also auf $(m-1)$ Asymptoten das *maximum* der willkührlichen Durchschnittspuncte bereits angenommen haben, können wir auf der m. Asymptote nur noch

$$(n-2)-(m-2)=n-m$$

neue Durchschnittspuncte willkührlich annehmen.

Wenn wir als Beispiel die Curven der 7. Ordnung nehmen, so können wir, zur Bestimmung einer solchen Curve, auf der ersten Asymptote alle 5 Durchschnittspuncte beliebig annehmen, ebenso auch noch auf der zweiten; hernach aber können wir auf der dritten nur 4, dann auf der vierten nur 3, auf der fünften nur 2 Durchschnittspuncte, endlich auf der sechsten nur **einen** und auf der letzten **keinen** Durchschnittspunct mehr, willkührlich annehmen. Im Ganzen können wir also

---

zu bringen, folgende identische Gleichung bilden:

$$\Omega_{n-m}\equiv\Theta_{n-m}+\sigma'\Omega'_{n-m-2},$$

und indem wir auf beiden Seiten die ganz willkührliche Function $\varrho\Omega_{n-m-2}$ addiren, und (2) berücksichtigen:

$$\Omega'_{n-m}\equiv\Theta_{n-m}+\sigma''\Omega''_{n-m-2},$$

wobei Ω''_{n-m-2} so willkührlich als Ω'_{n-m-2} betrachtet werden kann.

$$5+5+4+3+2+1+0 \equiv 20$$

Durchschnittspuncte willkührlich annehmen, durch welche eine einzige Curve der 5. Ordnung sich legen lässt, und dann sind durch diese Puncte die übrigen

$$0+0+1+2+3+4+5 \equiv 15 \equiv 7.\,5-20$$

Durchschnittspuncte der Curven der 7. Ordnung mit ihren sieben Asymptoten vollkommen bestimmt.

21. Die Nothwendigkeit der Resultate, zu denen wir in der vorigen Nummer gelangt sind, liegt, für den Fall, dass $n=3$ und $n=4$, unmittelbar vor Augen. Denn in dem erstern Falle können wir offenbar nur auf jeder von zwei Asymptoten einen einzigen Punct willkührlich annehmen; weil der Durchschnitt auf der dritten Asymptote mit den beiden ersten Durchschnittspuncten in gerader Linie liegt. Im letztern Falle liegen alle Durchschnittspuncte auf einem Kegelschnitte, und dieser ist durch zwei Puncte auf jeder von zwei Asymptoten und einem fünften Puncte auf einer dritten Asymptote vollkommen bestimmt. Auch für den Fall, dass $n=5$, sieht man die Nothwendigkeit noch ein. Alsdann liegen nemlich die 15 Durchschnitte der Curve mit ihren fünf Asymptoten alle auf einer Curve der dritten Ordnung. Wenn wir aber auf drei Asymptoten

$$3+3+2 \equiv 8$$

Puncte willkührlich annehmen, so ist, nach dem von mir zuerst aufgestellten Satze der 7. Nummer, bekannt, dass durch acht Puncte überhaupt unendlich viele Curven der dritten Ordnung sich legen lassen und dass alle diese Curven ausserdem noch in ein und demselben neunten Puncte sich schneiden, welcher im vorliegenden Falle, weil das System der drei Asymptoten als in die Reihe dieser Curven gehörig, zu betrachten ist, nothwendig auf der dritten Asymptote liegt. Damit aber die fragliche Curve dritter Ordnung vollständig bestimmt sei, ist erforderlich, dass (auf einer vierten Asymptote) noch ein neuer Punct angenommen werde.

Wir erkennen überhaupt leicht, dass die in Rede stehenden Resultate durch einen allgemeinen Satz bedingt sind, der in den vorliegenden Betrachtungen nur eine specielle Anwendung erhalten hat. Dieser Satz bezieht sich nemlich offenbar auf die Gesetze, nach denen wir auf einem Systeme von geraden Linien die gehörige Anzahl von Puncten annehmen können, wenn durch diese Puncte eine Curve von einer gegebenen Ordnung sich legen lassen soll. Für $n=6$ particularisirt dieser Satz, wie sogleich hervortritt, sich dahin, dass alle Curven der vierten Ordnung, welche durch

$$4+4+3 \equiv 11$$

Puncte gehen, welche auf drei geraden Linien vertheilt liegen, die dritte dieser Linien in demselben 12. Puncte schneiden; dass ferner, wenn diese Curven vierter Ordnung überdiess eine vierte gerade Linie in zwei willkührlich angenommenen Puncten schneiden, diese Curven alle auch noch durch zwei andere feste Puncte derselben vierten geraden Linie gehen, und zur vollständigen Bestimmung der Curve nur noch ein letzter Punct (auf einer fünften geraden Linie) nothwendig ist. Wir durchsehen endlich bald, dass die Systeme von drei und vier geraden Linien hierbei nur die Rolle von Curven der dritten und vierten Ordnung spielen; und dass der allgemeine Satz, zu dem wir auf diesem Wege durch Induction geführt werden, der Satz der 9. Nummer ist, nach welchem alle Curven der n. Ordnung, welche durch solche $\left(nq-\left(\frac{q(q-3)}{2}+1\right)\right)$ Puncte gehen, die auf dem Umfange einer Curve der q. Ordnung (wobei $n>q-1$ und $q>2$) willkührlich angenommen worden sind, diese Curve ausserdem auch noch in denselben $\left(\frac{q(q-3)}{2}+1\right)$ festen Puncten schneiden.

Ich halte die Bemerkungen der vorliegenden Nummer nicht für überflüssig; es wird durch dieselben den Resultaten der vorigen Nummer ihre richtige Stelle angewiesen, damit das Zufällige einer Einkleidung, die einer besondern Anwendung entspricht, nicht als das Wesentliche erscheine.

22. Zur vollständigen Bestimmung der durch die allgemeine Gleichung

$$\Theta_n + \mu\Omega_{n-2} = 0$$

dargestellten Curve n. Ordnung, bleibt, nachdem ihre n Asymptoten und die Curve Ω_{n-2} bekannt sind, nur der Coefficient μ zu bestimmen noch übrig. Wir können (nach der 5. Nummer) den Werth der Function Θ_n bezogen auf einen beliebigen Punct, als ein Product aus n Segmenten, die auf einer durch diesen Punct gehenden geraden Linie, deren Richtung von Vorne herein beliebig bestimmt worden ist, zwischen dem Puncte und den n Durchschnitten mit den Asymptoten liegen und andrerseits Ω_{n-2} als ein Product aus denjenigen $(n-2)$ Segmenten, welche, auf derselben geraden Linie, zwischen dem Puncte und den $(n-2)$ Durchschnitten mit der Curve Ω_{n-2} liegen, nachdem wir überdiess noch jedes Product mit einem von Vorne herein angenommenen constanten Coefficienten multiplicirt haben, betrachten und construiren. Von dem Quotienten dieser beiden constanten Coefficienten hängt der Werth von μ ab. Ist dieser Quotient durch eine willkührliche Annahme einmal bestimmt, so erhält man aus der Gleichung der Curve:

$$\mu = -\frac{\Theta_n}{\Omega_{n-2}}$$

wodurch μ gefunden wird, wenn man, nachdem das Asymptoten-System Θ_n und die Curve Ω_{n-2} gegeben sind, noch einen letzten Punct der Curve Ω_n kennt, welcher auf keiner ihrer n Asymptoten liegt, und dann auf diesen Punct die Functionen Θ_n und Ω_{n-2} der vorstehenden Gleichung bezieht.

23. Eine Curve der n. Ordnung ist nach den vorhergehenden Nummern im Allgemeinen also dadurch auf lineare Weise bestimmt, dass man

e r s t e n s ihre n Asymptoten;

z w e i t e n s auf diesen n Asymptoten $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ Durchschnittspuncte, welche jedoch so auf den verschiedenen Asymptoten vertheilt sein müssen, dass (indem wir durch m nach einander alle ganzen Zahlen die kleiner als n sind, bezeichnen) auf je beliebige m Asymptoten mindestens $\left(\frac{m(m-3)}{2}+1\right)$ Puncte weniger kommen, als auf denselben im Ganzen wirklich liegen;

d r i t t e n s einen letzten Punct der Curve, welcher nicht auf den Asymptoten liegt, willkührlich annimmt.

24. Wenn Ω_n die allgemeine Function des n. Grades bedeutet, so ist in der identischen Gleichung

$$\Omega_n \equiv \Theta_n + \mu\Omega_{n-2} \qquad (1)$$

Ω_{n-2} die allgemeine Function des $(n-2)$. Grades und wir erhalten also auch die neue identische Gleichung:

$$\Omega_{n-2} \equiv \Theta_{n-2} + r\Omega_{n-4},$$

in der das erste Glied des zweiten Theils ein Product aus $(n-2)$ linearen Functionen und Ω_{n-4} die allgemeine Function des $(n-4)$. Grades ist. Die identische Gleichung (1) nimmt hiernach auch folgende Form an:

$$\Omega_n \equiv \Theta_n + \mu\Theta_{n-2} + \nu\Omega_{n-4}.$$

Wir können ferner in dieser neuen Gleichung

$$\Omega_{n-4} \equiv \Theta_{n-4} + \rho\Omega_{n-6}$$

setzen und so fortfahren, bis zuletzt bloss Producte von linearen Functionen in dem Ausdrucke für Ω_n vorkommen, wobei in jedem folgenden Producte die Anzahl der Factoren um zwei

Einheiten abnimmt. Auf diesem Wege gelangen wir zu der nachstehenden allgemeinen Gleichung für die Curven der n. Ordnung:

$$\Theta_n + \mu\Theta_{n-2} + \nu\Theta_{n-4} + \varrho\Theta_{n-6} + \cdots = 0, \tag{2}$$

eine Gleichung, die, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, mit einem Gliede, das auf eine blosse Constante oder auf eine lineare Function sich reducirt, abbricht. So erhalten wir zum Beispiel für Curven der 6. und 7. Ordnung die folgenden allgemeinen Gleichungen:

$$\Theta_6 + \mu\Theta_4 + \nu\Theta_2 + \varrho = 0,$$
$$\Theta_7 + \mu\Theta_5 + \nu\Theta_3 + \varrho p = 0.$$

In der allgemeinen Gleichung der Curven n. Ordnung unter der Form (2) treten, den Functionen Θ entsprechend, verschiedene Gruppen gerader Linien in Evidenz. Wenn n eine gerade Zahl ist, so beträgt die Anzahl aller geraden Linien dieser Systeme $\frac{(n+1)^2-1}{4}$, wenn n eine ungerade Zahl ist, $\frac{(n+1)^2}{4}$. Wenn wir jeder Function Θ, wie in der obigen Gleichung einen constanten Coefficienten hinzufügen, so sind diese Functionen als gegeben zu betrachten, wenn die entsprechenden geraden Linien es sind. Die Anzahl dieser Coefficienten in der Gleichung (2) beträgt, nach Fortschaffung des etwaigen Coefficienten der Function Θ_n, wenn n eine gerade Zahl ist, $\frac{n}{2}$ und wenn n eine ungerade Anzahl ist, $\frac{n-1}{2}$. Hiernach erhalten wir, indem wir für jede gerade Linie zwei Constante zählen, im Ganzen

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot\frac{(n+1)^2-1}{4} + \frac{n}{2} \\ 2\cdot\frac{(n+1)^2}{4} \;\; + \frac{n-1}{2} \end{array}\right\} = \frac{n(n+3)}{2}$$

Constante, also die hinreichende und nothwendige Anzahl für Curven der n. Ordnung. Nachdem die verschiedenen Functionen Θ bestimmt worden sind; kann man die constanten Coefficienten μ, ν, ϱ . . ., welche in der Gleichung (2) vorkommen, durch eine gleiche Anzahl gegebener Puncte der bezüglichen Curve bestimmen. Denn für jeden solchen gegebenen Punct erhalten jene Functionen bestimmte Werthe, wonach jeder zu einer linearen Gleichung zwischen diesen Coefficienten führt. Also:

Eine Curve der n. Ordnung lässt sich, im Allgemeinen,

1) wenn n eine gerade Zahl ist, durch $\frac{(n+1)^2-1}{4}$ (in bestimmter Beziehung zu der Curve stehenden) geraden Linien und $\frac{n}{2}$ ihrer Puncte,

2) wenn n eine ungerade Zahl ist, durch $\frac{(n+1)^2}{4}$ solcher geraden Linien und $\frac{n-1}{2}$ ihrer Puncte

vollständig und auf einzige Weise bestimmen. —

25. Die Form der Gleichung

$$\Theta_n + \mu\Omega_{n-2} = 0$$

kann, weil sie nur die nothwendige Anzahl von Constanten enthält, sich nicht weiter particularisiren, wenn sie die allgemeine Gleichung der Curven n. Ordnung bleiben soll. Jeder Particularisation dieser Form entsprechen untergeordnete Curven-Gattungen und die Stufe der Unterordnung bestimmt sich durch die Grösse der Reduction in der Anzahl der Constanten. Wir wollen hier zunächst diejenigen Form-Beschränkungen ins Auge fassen, welche dadurch

bedingt sind, dass die Curven einer beliebigen n. Ordnung osculirende Asymptoten haben und zunächst denjenigen Fall betrachten, wo eine einzige solche Asymptote vorhanden ist, auf der aber die Osculation zu irgend einer beliebigen Ordnung ansteigt.

Wenn die Curve Ω_n eine dreipunctig osculirende Asymptote, P, hat, das heisst, wenn es eine solche gerade Linie gibt, welche die Curve nur in $(n-3)$ Puncten schneidet, weil drei Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, so findet nothwendig, wenn wir, der 14. Nummer gemäss, für die Gleichung der Curve, in welcher überhaupt die gerade inie P als Asymptote in Evidenz tritt, die folgende nehmen:

$$p\Omega'_{n-1} + \mu\Omega_{n-2} = o, \tag{1}$$

liese Gleichung durch die Annahme, dass p verschwindet, auf den $(n-3)$. Grad sich eine identische Gleichung von nachstehender Form Statt:

$$\Omega_{n-2} \equiv p\Omega'_{n-3} + \sigma\Omega_{n-3}. \tag{2}$$

iernach

$$\Omega'_{n-1} + \Omega'_{n-3} \equiv \Omega_{n-1},$$

die Curve die folgende Gleichung

$$p\Omega_{n-1} + \sigma\Omega_{n-3} = o, \tag{3}$$

dreipunctig osculirende Asymptote in Evidenz tritt. Die iden- igt, dass die gewöhnliche Asymptote P dadurch in eine dreipunctig gen ist, dass sie einer Asymptote der Curve Ω_{n-2} parallel geworden ist. mptote P der Curve (1) eine vierpunctig osculirende sein soll, so wird lichen Gründen eine identische Gleichung von folgender Form bedingt:

$$\Omega_{n-2} \equiv p\Omega''_{n-3} + \varrho\Omega_{n-4}, \tag{4}$$

m wir, der Kürze halber,

$$\Omega'_{n-1} + \Omega''_{n-3} \equiv \Omega_{n-1}$$

tzen, geht die Gleichung (1) in die folgende über:

$$p\Omega_{n-1} + \varrho\Omega_{n-4} = o, \tag{5}$$

in welcher P als vierpunctig osculirende Asymptote in Evidenz tritt. Die identische Gleichung (4) zeigt, dass diese vierpunctig osculirende Asymptote der gegebenen Curve eine gewöhnliche Asymptote der Curve Ω_{n-2} ist.

Wir können auf dem betretenen Wege weiter gehen, und erhalten, wenn P eine $m$punctig osculirende Asymptote der gegebenen Curve (1) sein soll, als Bedingung die identische Gleichung:

$$\Omega_{n-2} \equiv p\Omega'''_{n-3} + \chi\Omega_{n-m}, \tag{6}$$

und indem wir

$$\Omega'_{n-1} + p\Omega'''_{n-3} \equiv \Omega_{n-1}$$

setzen, für die allgemeine Form der Gleichung der Curve, in welcher P als $m$punctig osculirende Asymptote in Evidenz tritt, die folgende:

$$p\Omega_{n-1} + \chi\Omega_{n-m} = o. \tag{7}$$

P ist zugleich, was die identische Gleichung (6) zeigt eine $(m-2)$ punctig osculirende Asymptote der Curve Ω_{n-2}.

26. Die Gleichungen der vorigen Nummer, in welchen die nach verschiedenen Ordnungen osculirende Asymptote P in Evidenz tritt, enthalten noch überzählige Constanten, die wir indess durch eine einfache Form-Aenderung fortschaffen können. Wir wollen hierbei die allgemeine Gleichung, die sich auf eine $m$punctige Osculation bezieht:

$$p\Omega_{n-1} + \varrho\Omega'_{n-m} = o \tag{1}$$

zu Grunde legen, und die beiden Fälle, dass m eine gerade und ungerade Zahl bedeutet, unterscheiden.

Einheiten abnimmt. Auf diesem Wege gelangen wir zu der nachstehenden allgemeinen Gleichung für die Curven der n. Ordnung:

$$\Theta_n + \mu\Theta_{n-2} + \nu\Theta_{n-4} + \varrho\Theta_{n-6} + \cdots = 0, \qquad (2)$$

eine Gleichung, die, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, mit einem Gliede, das auf eine blosse Constante oder auf eine lineare Function sich reducirt, abbricht. So erhalten wir zum Beispiel für Curven der 6. und 7. Ordnung die folgenden allgemeinen Gleichungen:

$$\Theta_6 + \mu\Theta_4 + \nu\Theta_2 + \varrho = 0,$$
$$\Theta_7 + \mu\Theta_5 + \nu\Theta_3 + \varrho p = 0.$$

In der allgemeinen Gleichung der Curven n. Ordnung unter der Form (2) treten, den Functionen Θ entsprechend, verschiedene Gruppen gerader Linien in Evidenz. Wenn n eine gerade Zahl ist, so beträgt die Anzahl aller geraden Linien dieser Systeme $\frac{(n+1)^2-1}{4}$, wenn n eine ungerade Zahl ist, $\frac{(n+1)^2}{4}$. Wenn wir jeder Function Θ, wie in der obigen Gleichung einen constanten Coefficienten hinzufügen, so sind diese Functionen als gegeben zu betrachten, wenn die entsprechenden geraden Linien es sind. Die Anzahl dieser Coefficienten in der Gleichung (2) beträgt, nach Fortschaffung des etwaigen Coefficienten der Function Θ_n, wenn n eine gerade Zahl ist, $\frac{n}{2}$ und wenn n eine ungerade Anzahl ist, $\frac{n-1}{2}$. Hiernach erhalten wir, indem wir für jede gerade Linie zwei Constante zählen, im Ganzen

$$\left.\begin{aligned} 2\cdot\frac{(n+1)^2-1}{4} + \frac{n}{2} \\ 2\cdot\frac{(n+1)^2}{4} + \frac{n-1}{2} \end{aligned}\right\} = \frac{n(n+3)}{2}$$

Constante, also die hinreichende und nothwendige Anzahl für Curven der n. Ordnung. Nachdem die verschiedenen Functionen Θ bestimmt worden sind; kann man die constanten Coefficienten μ, ν, ϱ . . ., welche in der Gleichung (2) vorkommen, durch eine gleiche Anzahl gegebener Puncte der bezüglichen Curve bestimmen. Denn für jeden solchen gegebenen Punct erhalten jene Functionen bestimmte Werthe, wonach jeder zu einer linearen Gleichung zwischen diesen Coefficienten führt. Also:

Eine Curve der n. Ordnung lässt sich, im Allgemeinen,

1) wenn n eine gerade Zahl ist, durch $\frac{(n+1)^2-1}{4}$ (in bestimmter Beziehung zu der Curve stehenden) geraden Linien und $\frac{n}{2}$ ihrer Puncte,

2) wenn n eine ungerade Zahl ist, durch $\frac{(n+1)^2}{4}$ solcher geraden Linien und $\frac{n-1}{2}$ ihrer Puncte

vollständig und auf einzige Weise bestimmen. —

25. Die Form der Gleichung

$$\Theta_n + \mu\Omega_{n-2} = 0$$

kann, weil sie nur die nothwendige Anzahl von Constanten enthält, sich nicht weiter particularisiren, wenn sie die allgemeine Gleichung der Curven n. Ordnung bleiben soll. Jeder Particularisation dieser Form entsprechen untergeordnete Curven-Gattungen und die Stufe der Unterordnung bestimmt sich durch die Grösse der Reduction in der Anzahl der Constanten. Wir wollen hier zunächst diejenigen Form-Beschränkungen ins Auge fassen, welche dadurch

bedingt sind, dass die Curven einer beliebigen n. Ordnung osculirende Asymptoten haben und zunächst denjenigen Fall betrachten, wo eine einzige solche Asymptote vorhanden ist, auf der aber die Osculation zu irgend einer beliebigen Ordnung ansteigt.

Wenn die Curve Ω_n eine dreipunctig osculirende Asymptote, P, hat, das heisst, wenn es eine solche gerade Linie gibt, welche die Curve nur in $(n-3)$ Puncten schneidet, weil drei Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, so findet nothwendig, wenn wir, der 14. Nummer gemäss, für die Gleichung der Curve, in welcher überhaupt die gerade Linie P als Asymptote in Evidenz tritt, die folgende nehmen:

$$p\Omega'_{n-1} + \mu\Omega_{n-2} = 0, \tag{1}$$

damit diese Gleichung durch die Annahme, dass p verschwindet, auf den $(n-3)$. Grad sich reducire, eine identische Gleichung von nachstehender Form Statt:

$$\Omega_{n-2} \equiv p\Omega'_{n-3} + \sigma\Omega_{n-3}. \tag{2}$$

Setzen wir hiernach

$$\Omega'_{n-1} + \Omega'_{n-3} \equiv \Omega_{n-1},$$

so ergibt sich für die Curve die folgende Gleichung

$$p\Omega_{n-1} + \sigma\Omega_{n-3} = 0, \tag{3}$$

in welcher P als eine dreipunctig osculirende Asymptote in Evidenz tritt. Die identische Gleichung (2) zeigt, dass die gewöhnliche Asymptote P dadurch in eine dreipunctig osculirende übergegangen ist, dass sie einer Asymptote der Curve Ω_{n-2} parallel geworden ist.

Wenn die Asymptote P der Curve (1) eine vierpunctig osculirende sein soll, so wird dadurch aus ähnlichen Gründen eine identische Gleichung von folgender Form bedingt:

$$\Omega_{n-2} \equiv p\Omega''_{n-3} + \varrho\Omega_{n-4}, \tag{4}$$

und indem wir, der Kürze halber,

$$\Omega'_{n-1} + \Omega''_{n-3} \equiv \Omega_{n-1}$$

setzen, geht die Gleichung (1) in die folgende über:

$$p\Omega_{n-1} + \varrho\Omega_{n-4} = 0, \tag{5}$$

in welcher P als vierpunctig osculirende Asymptote in Evidenz tritt. Die identische Gleichung (4) zeigt, dass diese vierpunctig osculirende Asymptote der gegebenen Curve eine gewöhnliche Asymptote der Curve Ω_{n-2} ist.

Wir können auf dem betretenen Wege weiter gehen, und erhalten, wenn P eine $m$punctig osculirende Asymptote der gegebenen Curve (1) sein soll, als Bedingung die identische Gleichung:

$$\Omega_{n-2} \equiv p\Omega'''_{n-3} + \chi\Omega_{n-m}, \tag{6}$$

und indem wir

$$\Omega'_{n-1} + p\Omega'''_{n-3} \equiv \Omega_{n-1}$$

setzen, für die allgemeine Form der Gleichung der Curve, in welcher P als $m$punctig osculirende Asymptote in Evidenz tritt, die folgende:

$$p\Omega_{n-1} + \chi\Omega_{n-m} = 0. \tag{7}$$

P ist zugleich, was die identische Gleichung (6) zeigt eine $(m-2)$ punctig osculirende Asymptote der Curve Ω_{n-2}.

26. Die Gleichungen der vorigen Nummer, in welchen die nach verschiedenen Ordnungen osculirende Asymptote P in Evidenz tritt, enthalten noch überzählige Constanten, die wir indess durch eine einfache Form-Aenderung fortschaffen können. Wir wollen hierbei die allgemeine Gleichung, die sich auf eine $m$punctige Osculation bezieht:

$$p\Omega_{n-1} + \varrho\Omega'_{n-m} = 0 \tag{1}$$

zu Grunde legen, und die beiden Fälle, dass m eine gerade und ungerade Zahl bedeutet, unterscheiden.

Ist m eine **gerade** Zahl, so können wir nach der 24. Nummer die Function Ω_{n-1} auf folgende Weise entwickeln:

$$\Omega_{n-1} \equiv \Theta_{n-1} + \mu\Theta_{n-3} + \cdots + \sigma\Theta_{n-m+1} + \gamma\Omega_{n-m-1}$$

wonach, wenn wir der Kürze wegen

$$\varrho\Omega'_{n-m} + \gamma p\Omega_{n-m-1} \equiv \tau\Omega_{n-m}$$

setzen, die Gleichung der Curve (1) in die nachstehende übergeht:

$$p[\Theta_{n-1} + \mu\Theta_{n-3} + \cdots + \sigma\Theta_{n-m+1}] + \tau\Omega_{n-m} = 0; \tag{2}$$

eine Gleichung, welche gerade die nothwendige Anzahl von Constanten enthält, nemlich

$$\frac{n(n+3)}{2} - (m-2).$$

Ist m eine **ungerade** Zahl, so ergibt sich

$$\Omega_{n-1} \equiv \Theta_{n-1} + \mu\Theta_{n-3} + \cdots + \sigma\Theta_{n-m+2} + \gamma\Omega''_{n-m}$$

und wenn wir diese Entwicklung in die Gleichung der Curve einsetzen:

$$p[\Theta_{n-1} + \mu\Theta_{n-3} + \cdots + \sigma\Theta_{n-m+2}] + \gamma p\Omega''_{n-m} + \varrho\Omega'_{n-m} = 0.$$

Diese Gleichung enthält, der Form ihrer beiden letzten Glieder wegen, fortwährend überzählige Constanten, die fortzuschaffen uns noch obliegt. Wir können immer einen constanten Coefficienten α so bestimmen, dass

$$\varrho\Omega'_{n-m} - \gamma\alpha\Omega''_{n-m} \equiv \gamma\delta p\Omega'_{n-m-1} + \varepsilon\Omega''_{n-m-1},$$

was augenfällig ist, sobald wir alle Functionen uns von p und irgend einer zweiten linearen Function abhängig denken. Hiernach können wir jene beiden letzten Glieder auf folgende Weise umformen:

$$\begin{aligned}\gamma p\Omega''_{n-m} + \varrho\Omega'_{n-m} &\equiv \gamma(p+\alpha)\Omega''_{n-m} + \gamma\delta p\Omega'_{n-m-1} + \varepsilon\Omega''_{n-m-1}, \\ &\equiv \gamma(p+\alpha)[\Omega''_{n-m} + \delta\Omega'_{n-m-1}] + [\varepsilon\Omega'_{n-m-1} - \alpha\gamma\Omega'_{n-m-1}], \\ &\equiv \gamma(p+\alpha)\Omega_{n-m} + \tau\Omega_{n-m-1},\end{aligned}$$

indem wir, der Kürze halber,

$$\Omega'_{n-m} + \delta\Omega'_{n-m-1} \equiv \Omega_{n-m} + \zeta\Omega_{n-m-2},$$

$$\varepsilon\Omega''_{n-m-1} - \alpha\gamma\Omega'_{n-m-1} + \gamma\zeta(p+\alpha)\Omega_{n-m-2} \equiv \tau\Omega_{n-m-1},$$

setzen. Auf diese Weise erhalten wir für die Gleichung der Curve die folgende, mit der nothwendigen Anzahl von Constanten:

$$p[\Theta_{n-1} + \mu\Theta_{n-3} + \cdots + \sigma\Theta_{n-m+2}] + \gamma(p+\alpha)\Theta_{n-m} + \tau\Omega_{n-m-1} = 0. \tag{3}$$

Wir hätten die Gleichungen (2) und (3) unmittelbar aus der Form der Gleichung (2) der 24. Nummer herleiten können und unmittelbar tritt in diesen Gleichungen P als eine $m$punctig osculirende Asymptote in Evidenz.

Wenn wir beispielsweise $n=7$ setzen, so erhalten wir, indem wir m von 2 bis 7 wachsen lassen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}&p\Theta_6+\mu\Omega_5=0,\\ &p\Theta_6+\mu(p+\alpha)\Theta_4+\nu\Omega_3=0,\\ &p[\Theta_6+\mu\Theta_4]+\nu\Omega_3=0,\\ &p[\Theta_6+\mu\Theta_4]+\nu(p+\alpha)\Theta_2+\varrho x=0,\\ &p[\Theta_6+\mu\Theta_4+\nu\Theta_2]+\varrho x=0,\\ &p[\Theta_6+\mu\Theta_4+\nu\Theta_2+\varrho]+\sigma=0.\end{aligned}$$

Die Asymptote P, welche in allen diesen Gleichungen in Evidenz tritt, ist in dem Falle der ersten, welche die allgemeine Gleichung des n. Grades ist, eine gewöhnliche Asymptote; in den Fällen der folgenden fünf Gleichungen ist sie eine osculirende und die Ordnung der

Osculation steigt von einer dreipunctigen schrittweise bis zu einer siebenpunctigen, indem die Curve sich immer mehr particularisirt. Hierbei vermindert sich die Anzahl der Constanten, welche in der allgemeinen Gleichung 35 beträgt, in jeder folgenden Gleichung um eine Einheit.

27. Wir wollen sogleich zu der Betrachtung derjenigen Fälle, wo die Curve mehrere osculirende Asymptoten hat, übergehen. Die Ordnung des Contactes ist hier, wenn wir mehrere Asymptoten zugleich betrachten, nicht mehr eine unbeschränkt willkührliche, sondern sie ist bestimmten Gesetzen unterworfen, die wir jetzt zunächst entwickeln wollen.

Die Curven einer beliebigen n. Ordnung können, in besondern Fällen, Asymptoten haben, welche die Curven alle nach derselben Ordnung osculiren und diese Ordnung kann hierbei durch alle Zwischenstufen hindurch bis zu einer $n$punctigen ansteigen.

Die folgende Gleichung $\Theta_n + \mu\Omega_{n-m} = 0$ (1)

stellt eine solche Curve dar, deren n Asymptoten $m$punctig osculirende sind. Vorausgesetzt wird hierbei, dass die Function Ω_{n-m} die allgemeine ihrer Ordnung sei; stände sie in particulärer Beziehung zu einzelnen der linearen Factoren des ersten Gliedes Θ_n, so könnte die Ordnung des Contactes für die bezüglichen Asymptoten noch höher ansteigen. Wenn $n=m$ und alle Asymptoten also nach höchster Ordnung osculiren, so reducirt sich die Function Ω_{n-m} auf eine blosse Constante.

Die Form der vorstehenden Gleichung ist eine vollkommen bestimmte, sie enthält keine überflüssigen Constanten. Zählen wir diese Constanten, so finden wir

$$\frac{n(n+3)}{2} - \left[n(m-2) - \left(\frac{m(m-3)}{2}+1\right)\right]$$

Es hat sich also die Anzahl der Constanten einer Curve n. Ordnung überhaupt, um $\left(\frac{m(m-3)}{2}+1\right)$ Einheiten weniger reducirt, als auf den n gewöhnlichen Asymptoten Durchschnittspuncte mit der Curve unendlich weit gerückt sind, damit diese in $m$punctig osculirende sich verwandeln. Es gibt also weniger verschiedene Fälle als man allmählig Durchschnittspuncte der Curve mit ihren Asymptoten auf diesen sich unendlich weit gerückt denken kann: das heisst, nicht alle Voraussetzungen über die Ordnung der Osculation der einzelnen Asymptoten sind statthaft.

28. Wenn eine Curve der n. Ordnung nur solche Asymptoten hat, die wenigstens $m$punctig osculiren, so kann die Anzahl der mehr als $m$punctig osculirenden von 1 bis $n-m$ steigen, ausserdem aber nur noch n betragen.

Wir überzeugen uns sogleich von der Richtigkeit dieser Behauptung. Denn, bringen wir in dem ersten Gliede der letzten Gleichung eine Asymptote P in Evidenz:

$$p\Theta_{n-1} + \mu\Omega_{n-m} = 0,$$

so muss, wenn p eine $(m+1)$ punctig osculirende Asymptote sein soll, die nachstehende identische Gleichung Statt finden:

$$\Omega_{n-m} \equiv p\Omega_{n-m-1} + \gamma\Omega'_{n-m-1};$$

damit, wenn p verschwindet, sich die Function Ω_{n-m} auf den $(n-m-1)$. Grad reducire. Wenn ausserdem auch Q eine $(m+1)$ punctig osculirende Asymptote sein soll, so ergibt sich aus dem Grunde, dass Ω_{n-m} auch durch das Verschwinden von q sich auf den $(n-m-1)$. Grad reducire, die folgende von Neuem beschränkte Form dieser Function:

$$\Omega_{n-m} \equiv pq\Omega_{n-m-2} + \delta\Omega''_{n-m-1}.$$

Auf diesem Wege der Particularisation können wir weiter gehen, da aber die Function Ω_{n-m}

nur bis zum $(n-m)$. Grade sich erhebt, so können von den n linearen Functionen Θ_n auch nur $(n-m)$ als Factoren in dem ersten Gliede der Entwicklung von Ω_{n-m} erscheinen. Es kann also auch jede Zahl von Asymptoten, die mehr als $m$punctig osculiren bis zur Gränze $(n-m)$ vorhanden sein. Der Fall, dass alle Asymptoten mindestens $(m+1)$punctig osculiren, wird dadurch bedingt, dass der Grad der Function Ω_{n-m} um eine Einheit sich reducirt. Somit ist der an die Spitze dieser Nummer gestellte Satz bewiesen. Wir können denselben auch in die nachstehende Aussage einkleiden.

Die Anzahl der $m$punctig osculirenden Asymptoten einer beliebigen algebraischen Curve, wenn diese Curve überhaupt solche aber keine minderpunctig osculirende Asymptoten hat, beträgt wenigstens m.

Es kann hiernach zum Beispiel eine Curve von beliebiger Ordnung niemals bloss eine einzige gewöhnliche Asymptote haben, sie hat deren, wenn überhaupt solche Asymptoten vorhanden sind wenigstens zwei. Wenn die Curve keine solche Asymptoten hat, wohl aber dreipunctig osculirende, so beträgt die Anzahl dieser wenigstens drei. Wenn auch keine dreipunctig wohl aber vierpunctig osculirende Asymptoten vorhanden sind, so beträgt die Anzahl dieser letztern wenigstens vier; und so weiter.

29. So lange die Curve nicht über den 4. Grad hinausgeht, gibt der Satz der vorigen Nummer vollständig alle diejenigen Fälle, welche ausgeschlossen bleiben. Wir wollen zur Unterscheidung der verschiedenen Fälle jede Asymptote durch diejenige Ziffer darstellen, welche die Anzahl der auf ihr unendlich weit entfernt liegenden Durchschnittspuncte mit der Curve angibt und dann alle Ziffern, welche den einzelnen Asymptoten der Curve entsprechen, neben einander stellen. So würde zum Beispiel das Symbol 332 eine Curve der dritten Ordnung anzeigen die eine gewöhnliche und zwei dreipunctig osculirende Asymptoten hätte. Eine solche Curve ist nach dem Vorstehenden unmöglich. Für die drei möglichen Fälle von Curven dritter Ordnung erhalten wir hiernach die folgenden drei Symbole:

222 322 333.

Für $n=4$, stellt das nachstehende Schema die möglichen neun Fälle dar:

2222	3322	3333
3222	4322	4333
4222	4422	4444.

30. Aber neue Beschränkungen treten ein, wenn die Ordnung der Curven grösser ist als vier. Eine aufmerksame Betrachtung der Form unserer Gleichungen lässt dieselben unmittelbar erkennen.

In der nachstehenden Gleichung

$$\Theta_h\,\Omega_{n-h}+\mu\Omega_{n-m}=0, \tag{1}$$

die wir durch Entwicklung der Function Ω_{n-h} (15) auch unter der folgenden Form schreiben könnnen: $\Theta_h\,(\Theta_{n-h}+\Omega_{n-h-2})+\mu\Omega_{n-m}=0$

treten h Asymptoten, welche alle die Curve $m$punctig osculiren, auf die allgemeinste Weise in Evidenz. Es reducirt sich diese Gleichung auf den $(n-m)$. Grad, wenn wir nacheinander jeden der h linearen Factoren der Function Θ_h verschwinden lassen. Aber andrerseits reducirt sich dieselbe Gleichung nur auf den $(n-2)$. Grad, wenn wir einen der $(n-h)$ linearen Factoren von Θ_{n-h} gleich Null setzen, wonach diese Factoren im Allgemeinen $(n-h)$ gewöhnliche Asymptoten der Curve anzeigen. Soll aber insbesondere eine dieser Asymptoten, P, eine $l$punctig osculirende sein, so ist, indem wir dieselbe in der Function Ω_{n-h} in Evidenz bringen (26), nothwendig:

$$\Omega_{n-h}\equiv \mathrm{p}\,\Omega_{n-h-1}+\lambda\Omega_{n-h-l},$$

damit die Gleichung (1) durch das Verschwinden von p auf den $(n-l)$. Grad sich reducire.

Diese Gleichung geht hiernach in die folgende über:

$$\Theta_h\,(p\Omega_{n-h-1}+\lambda\Omega_{n-h-l})+\mu\Omega_{n-m}=o.$$

Wenn die h erstgenannten Asymptoten alle nach höchster Ordnung, also $n$punctig osculiren, so reducirt sich Ω_{n-m} auf eine Constante. Setzen wir überdiess $h=2$, so kommt:

$$\Theta_2(p\Omega_{n-3}+\lambda\Omega_{n-2-l})+\mu=o.$$

In dieser Gleichung kann l von 2 durch jede Einheit hindurch bis $(n-2)$ wachsen, wobei die Asymptote P von einer gewöhnlichen in eine osculirende übergeht, und die Ordnung der Osculation allmählig steigt, bis die Asymptote eine $(n-2)$punctig osculirende wird. Alsdann erhalten wir, indem die Function Ω_{n-2-l} auf eine Constante sich reducirt,

$$\Theta_2(p\Omega_{n-3}+\lambda)+\mu=o;$$

und weiter kann dann die Ordnung des Contactes, auf der Asymptote P, nicht steigen, als nur dadurch dass λ verschwindet. Dann aber steigt diese Ordnung sogleich zu einer $n$punctigen, wobei die letzte Gleichung in die nachstehende Form übergeht:

$$\Theta_3\Omega_{n-3}+\mu=o.$$

Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen:

Es können von irgend drei Asymptoten einer Curve n. Ordnung nicht zwei die Curve $n$punctig und die dritte bloss $(n-1)$punctig osculiren.

31. Ausgeschlossen ist, nach dem vorstehenden Satze, für $n=5$ auch nach Berücksichtigung der Beschränkungen der 28. Nummer, noch derjenige Fall, der durch das folgende Symbol bezeichnet wird: 55422.

Sonst treten, für $n=5$, keine weitern Ausnahmen ein, und wir erhalten mit Beibehaltung der Bezeichnung der 29. Nummer, das folgende Schema von 28 verschiedenen Fällen:

22222	54322
32222	55322
42222	44422
52222	54422
33222	55522
43222	33333
53222	43333
44222	53333
54222	44333
55222	54333
33322	55333
43322	44444
53322	54444
44322	55555.

32. Nach unserer Verfahrungsweise können wir unmittelbar die allgemeine Form derjenigen Gleichung, die jedem einzelnen Falle entspricht, hinschreiben und erhalten somit die nachstehenden 28 Gleichungen, in einer solchen Aufeinanderfolge, wie sie den 28 Symbolen des vorstehenden Schema entsprechen. Es springt hierbei die Art deutlich in die Augen, wie jede neue Particularisation durch das Verschwinden einer einzigen Constanten erfolgt. Alle nachstehenden Gleichungen schliessen die gerade nothwendige Anzahl von Constanten ein, und diese Anzahl erhält man unmittelbar, wenn man für jede lineare Function zwei Constante rechnet und die, durch griechische Buchstaben bezeichneten Constanten hinzuzählt.

$$pqrst+\lambda uvw+\mu x=o,$$
$$pqrst+\lambda(p+\alpha)vw+\mu x=o,$$
$$pqrst+\lambda pvw+\mu x=o,$$

$$\begin{aligned}
&pqrst + \lambda pvw + \mu p + \delta = o,\\
&pqrst + \lambda(p+\alpha)(q+\beta)w + \mu x = o,\\
&pqrst + \lambda p(q+\beta)w + \mu x = o,\\
&pqrst + \lambda p(q+\beta)w + \mu p + \delta = o,\\
&pqrst + \lambda pqw + \mu x = o,\\
&pqrst + \lambda pqw + \mu p + \delta = o,\\
&pqrst + \lambda pqw + \delta = o,\\
&pqrst + \lambda(p+\alpha)(q+\beta)(r+\gamma) + \mu x = o,\\
&pqrst + \lambda p(q+\beta)(r+\gamma) + \mu x = o,\\
&pqrst + \lambda p(q+\beta)(r+\gamma) + \mu p + \delta = o,\\
&pqrst + \lambda pq(r+\gamma) + \mu x = o,\\
&pqrst + \lambda pq(r+\gamma) + \mu p + \delta = o,\\
&pqrst + \lambda pq(r+\gamma) + \delta = o,\\
&pqrst + \lambda pqr + \mu x = o,\\
&pqrst + \lambda pqr + \mu p + \delta = o,\\
&pqrst + \lambda pqr + \delta = o,\\
&pqrst + \varkappa uv + \delta = o,\\
&pqrst + \varkappa(p+\alpha)v + \delta = o,\\
&pqrst + \varkappa pv + \delta = o,\\
&pqrst + \varkappa(p+\alpha)(q+\beta) + \delta = o,\\
&pqrst + \varkappa p(q+\beta) + \delta = o,\\
&pqrst + \varkappa pq + \delta = o,\\
&pqrst + \mu x = o,\\
&pqrst + \mu p + \delta = o,\\
&pqrst + \delta = o.
\end{aligned}$$

33. Für Curven der 6. Ordnung wird die Anzahl der als unmöglich auszuschliessenden Fälle schon grösser. Nach dem Satze der 30. Nummer ist hier zuvörderst die durch das Symbol 665 angezeigte Asymptoten-Combination unmöglich, wonach es die folgenden sechs Fälle sind:

665333
666522
665522
665422
665322
665222.

Aber es ergeben sich hier noch neue unmögliche Fälle, zu deren Bestimmung wir uns zu den Betrachtungsweisen der 30. Nummer zurückwenden wollen.

Wir können eine Curve der n. Ordnung, welche 3 dieselbe $(n-1)$punctig osculirende Asymptoten hat, ohne Weiteres durch die folgende Gleichung darstellen:

$$\Theta_3\Omega_{n-3} + \mu x = o$$

darstellen und dann in dieser Gleichung eine vierte Asymptote P, welche die Curve $l$punctig osculirt, sogleich in folgender Form:

$$\Theta_3(p\Omega_{n-4} + \Omega_{n-3-l}) + \mu x = o$$

in Evidenz treten lassen. Diese Gleichung umfasst, indem wir insbesondere x auf eine Constante reduciren, den Fall, dass die Asymptoten Θ_3 die Curve alle drei $n$punctig osculiren, und wenn eine dieser Asymptoten Q ist, wonach

$$\Theta_3 \equiv q\Theta_2,$$

indem wir

$$x \equiv q + \alpha$$

setzen, dass diese Asymptote Q die Curve $n$punctig osculirt, während die Ordnung der Osculation für die beiden Asymptoten Θ_2 eine $(n-1)$punctige bleibt. Alles diess hat im Allgemeinen auf die Ordnung der Osculation auf der Asymptote P keinen Einfluss. Diese Ordnung kann durch alle Einheiten hindurch von $l=2$ bis $l=n-3$ ansteigen, welchem letztern Falle die folgende Form entspricht:

$$\Theta_3(p\Omega_{n-4}+\lambda)+\mu x=0.$$

Höher kann die Ordnung des Contactes auf P nur dadurch steigen, dass λ verschwindet, woraus die Form:

$$p\Theta_3\Omega_{n-4}+\mu x=0$$

hervorgeht, und die Osculation mit Ueberspringung einer $(n-2)$punctigen in eine $(n-1)$punctige sich verwandelt hat, oder in dem Falle, dass die lineare Function x auf eine Constante reducirt worden ist, in eine $n$punctige.

Hiermit ist der folgende Satz bewiesen:

Es können von irgend vier Asymptoten einer Curve n. Ordnung nicht drei die Curve $n$punctig, oder drei die Curve $(n-1)$punctig, oder endlich eine dieselbe $n$punctig und zwei $(n-1)$punctig osculiren und dann die vierte Asymptote eine $(n-2)$punctig osculirende sein.

Ausser den zu Anfang dieser Nummer, für den Fall $n=6$, ausgeschlossenen Fällen sind also auch die folgenden drei Fälle noch auszuschliessen:

666422
655422
555422.

34. Der allgemeine Satz, welcher diejenigen Fälle anzeigt, welche, auch nach den Beschränkungen der 28. Nummer, als unmöglich noch auszuschliessen sind, ist der folgende.

Wenn eine Curve n. Ordnung m Asymptoten hat, welche alle wenigstens $(n-(m-2))$punctig osculirende sind, so kann dieselbe Curve keine $(n-(m-1))$punctig osculirende Asymptote haben.

Um, für eine gegebene Ordnung n, alle Fälle zu erschöpfen, müssen wir für m nach einander alle ganzen Zahlen von 2 bis $(n-3)$ nehmen. Der Satz der 30. Nummer entspricht dem besondern Falle $m=2$, der Satz der vorigen Nummer dem besondern Falle $m=3$.

Der Beweis des vorstehenden Satzes bietet sich sogleich dar. Denn es stellt die Gleichung

$$\Theta_m\Omega_{n-m}+\mu\Omega_{m-2}=0$$

auf die allgemeinste Weise solche Curven der n. Ordnung dar, welche m Asymptoten haben, welche alle diese Curve $(n-(m-2))$punctig osculiren. Auf diesen Asymptoten kann aber, was durch schickliche Particularisation der Function Ω_{m-2} angezeigt wird, die Ordnung der Osculation auch höher noch ansteigen; diese besondern Fälle soll also die vorstehende Gleichung für uns hier einschliesslich enthalten. Aehnlich wie früher können wir auch hier eine $(m+1)$. Asymptote P in Evidenz bringen, und zugleich ausdrücken, dass die Ordnung der Osculation auf ihr eine $l$punctige ist. Diess ist in nachstehender Gleichung geschehen:

$$\Theta_m(p\Omega_{n-m-1}+\lambda\Omega_{n-m-l})+\mu\Omega_{m-2}=0.$$

Wir sehen, wie die Ordnung der Osculation auf dieser neuen Asymptote P steigt, wenn wir l von 2 bis $(n-m)$ wachsen lassen, dann aber nur durch das gänzliche Verschwinden der Function Ω_{n-m-l} mit Ueberspringung einer $(n-(m-1))$punctigen in eine wenigstens $(n-(m-2))$punctige übergehen kann.

35. In Beziehung auf die Curven der 7. Ordnung müssen wir für m nach einander 2, 3 und 4 nehmen und bei einiger Aufmerksamkeit ergeben sich die nachstehenden 54 Fälle als die unmöglichen.

776.4444	77776.22	77775.22
7776.333	7776.622	76665.22
776.6333	.522	66665.22
.5333	.422	7775.522
.4333	.322	.422
.3333	.222	.322
7775.333	776.6622	.222
7665.333	.6522	7665.522
6665.333	.6422	.422
	.6322	.322
	.6222	.222
	.5522	6665.522
	.5422	.422
	.5322	.322
	.5222	.222
	.4422	77774.22
	.4322	76664.22
	.4222	66664.22
	.3322	77554.22
	.3222	76554.22
	.2222	75554.22
		66554.22
		65554.22
		55555.22.

In jedem einzelnen Symbole dieses Schema bezeichnet der beigefügte Punct, dass durch die vor demselben befindliche Combination das Unmögliche bedingt ist.

36. Es ist augenscheinlich, dass für $n=6$, derjenige unmögliche Fall, in welchem keine gewöhnlichen Asymptoten vorkommen, 665333, aus dem unmöglichen Fall, für $n=5$, sich ergibt, indem man in dem, dem letztgenannten Falle entsprechenden, Symbole 55422 jede Ziffer um Eins wachsen lässt und dann noch die Ziffer 3 hinzufügt; dass ferner für $n=7$ derjenige unmögliche Fall, in welchem keine weniger als vierpunctig osculirenden Asymptoten vorkommen, 7764444, aus dem unmöglichen Falle 665333 sich ergibt, indem man jede Ziffer des letzten Symbols um Eins wachsen lässt und dann noch die Ziffer 4 hinzufügt. Endlich ist klar, dass für $n=7$, die Anzahl der unmöglichen Fälle, in welchen dreipunctig osculirende und keine gewöhnlichen Asymptoten vorkommen der Anzahl der unmöglichen Fälle für $n=6$, in denen gewöhnliche Asymptoten vorkommen, gleich ist und dass jene aus diesen sich unmittelbar ergeben. So erhält man zum Beispiel aus dem Symbol 665222 indem man jede Ziffer um Eins wachsen lässt und dann noch die Ziffer 3 hinzufügt, das Symbol 7763333, welches den zweiten der in der vorigen Nummer aufgezählten 54 unmöglichen Fälle anzeigt. Es ist hiernach, für $n=7$, die Anzahl derjenigen in Rede stehenden unmöglichen Fälle, in welchen keine gewöhnlichen Asymptoten vorkommen, der Anzahl aller unmöglichen Fälle für $n=6$ gleich, und es gibt nur einen einzigen Fall, in dem keine weniger als vierpunctig osculirende Asymptote vorkommt, wie es für $n=5$ im Ganzen nur einen einzigen auszuschliessenden Fall gibt.

Der allgemeine Satz, welcher hier uns entgegentritt, ist der folgende.

F ü r C u r v e n e i n e r b e l i e b i g e n n. O r d n u n g b e t r ä g t d i e A n z a h l d e r j e n i g e n, i n G e m ä s s h e i t d e s S a t z e s d e r 34. N u m m e r, u n m ö g l i c h e n F ä l l e, i n

welchen nur wenigstens $h$punctig osculirende Asymptoten vorkommen, so viel als die Anzahl aller unmöglichen Fälle für Curven der $(n-(h-2))$. Ordnung.

37. Für $n=8$, sind nach dem Satze der 34. Nummer, indem wir für m nach einander 5, 4, 3 und 2 nehmen, die nachstehenden Asymptoten-Combinationen unmöglich.

888887. .	888885. .	888884. .
88887. . .	877775. .	877774. .
8887. . . .	886665. .	886664. .
887.	876665. .	876664. .
888886. .	866665. .	866664. .
877776. .	777775. .	777774. .
777776. .	776665. .	776664. .
88886. . .	766665. .	766664. .
87776. . .	666665. .	666664. .
77776. . .		888554. .
8886. . . .	88885. . .	877554. .
8776. . . .	87775. . .	886554. .
7776. . . .	88665. . .	876554. .
	87665. . .	866554. .
	86665. . .	777554. .
	77775. . .	776554. .
	77665. . .	766554. .
	76665. . .	666554. .
	66665. . .	885554. .
		875554. .
		865554. .
		855554. .
		775554. .
		765554. .
		755554. .
		655554. .
		555554. .

Nach diesem Schema erhält man alle Symbole, welche die auszuschliessenden Fälle anzeigen, wenn man solche Ziffern, die nicht höher sind, als die letzte in jeder Combination, mit Rücksicht auf die Beschränkungen der 28. Nummer, in gehöriger, durch Puncte bezeichneter, Anzahl hinzufügt.

Die Combinationen vor dem Puncte in dem Schema der 35. Nummer für $n=7$ entsprechen den Combinationen des vorstehenden Schemas und was ich dort ausgeführt habe könnte ich ohne mehr Mühe auch hier ausführen, nur dass die Anzahl der verschiedenen Fälle grösser wird. Wo, hier wie dort, nur noch zwei Ziffern folgen, können nach der 28. Nummer diese Ziffern nur 22 sein; wo drei Ziffern fehlen, kann unter diesen keine 4, wo vier fehlen keine 5, wo fünf fehlen, keine 6 vorkommen. Hiernach ergibt sich denn auch ohne Mühe die Anzahl der unmöglichen Fälle, die einer beliebigen unmöglichen Combination entsprechen. Ist zum Beispiel die letzte Ziffer einer solchen Combination 6 und sind vier Ziffern zu ergänzen (was der Fall der drei letzten Combinationen der ersten Vertical-Columne des vorstehenden Schemas ist) so können diese Ziffern nur

4444 6333 5333 4333 3333

sein, wenn keine gewöhnlichen Asymptoten vorhanden sind. Sind solche vorhanden, so erhalten wir für diese die nachstehenden Gruppen von hinzuzufügenden Ziffern:

6622	6322	5422	4422	3322
6522	6222	5322	4322	3222
6422	5522	5222	4222	2222,

wo die beiden letzten Ziffern 22 überall sich finden müssen, die beiden ersten aber jede Combination mit Wiederholungen der fünf Ziffern 6, 5, 4, 3 und 2 sein können. Die Anzahl der unmöglichen Fälle mit gewöhnlichen Asymptoten beträgt also $\frac{5.\,6}{1.\,2}$. Sie würde überhaupt, wenn die letzte Ziffer der das Unmögliche mit sich bringenden Combination g wäre und die Anzahl der zu ergänzenden Ziffern h betrüge, gleich sein der Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen von $(g-1)$ Elementen zu $(h-2)$, folglich gleich

$$\frac{(g-1)\,(g)\,(g+1)\ldots(g+h-4)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;(h-2)}.$$

38. Nach den Schluss-Erörterungen der beiden vorigen Nummern wird es uns endlich leicht, für die Curven einer beliebigen Ordnung, die nach dem Satze der 34. Nummer als unmöglich auszuschliessenden Fälle zu zählen und diese Anzahl allgemein zu bestimmen.

Für $n=5$, ist ein einziger unmöglicher Fall vorhanden.

Für $n=6$, kommt eine Anzahl von

$$\left.\begin{matrix}(1+4)\\ +3\end{matrix}\right\} \equiv 5+3$$

Fällen hinzu, die einerseits den unmöglichen Combinationen 6665 und 665 und andrerseits den drei Combinationen 6664, 6554 und 5554 entsprechen, indem wir überall das Vorhandensein gewöhnlicher Asymptoten voraussetzen.

Für $n=7$, kommt noch eine Anzahl hinzu, die der Anzahl der Symbole mit gewöhnlichen Asymptoten in dem Schema der 35. Nummer gleich ist, nemlich

$$\left.\begin{matrix}\left(1+5+\frac{5\,.\,6}{1\,.\,6}\right)\\ +3\;(1+4)\\ +3^2\end{matrix}\right\} \equiv \frac{6\,.\,7}{1\,.\,2}+3\,.\,5+3^2.$$

Für $n=8$, kommt noch folgende Anzahl hinzu:

$$\left.\begin{matrix}\left(1+6+\frac{6\,.\,7}{1\,.\,2}+\frac{6\,.\,7\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3}\right)\\ +3\left(1+5+\frac{5\,.\,6}{1\,.\,2}\right)\\ +3^2\,(1+4)\\ +3^3\end{matrix}\right\} = \frac{7\,.\,8\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3}+3\cdot\frac{6\,.\,7}{1\,.\,2}+3^2.5+3^3.$$

Die Anzahl ist wiederum gleich der Anzahl der unmöglichen Fälle mit gewöhnlichen Asymptoten, für $n=8$. Und zwar kommen von dieser Anzahl die vier Glieder der ersten Klammer bezüglich auf die vier ersten Combinationen des Schemas der 37. Nummer, die drei Glieder der zweiten Klammer auf die drei mal drei folgenden Combinationen, die mit den ebengenannten die erste Vertical-Columne bilden; ferner die beiden Glieder der dritten Klammer auf die beiden Gruppen von neun Combinationen der zweiten Vertical-Columne und endlich das letzte Glied 3^3 auf die 27 Combinationen der letzten Vertical-Columne.

Das Gesetz ist hiernach klar; für $n=9$, kommt hinzu:

$$\frac{8\,.\,9\,.\,10\,.\,11}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+3\cdot\frac{7\,.\,8\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3}+3^2\cdot\frac{6\,.\,7}{1\,.\,2}+3^3\,.\,5+3^4;$$

und endlich überhaupt beim Uebergange von $(n-1)$ zu n:

$$\frac{(n-1)n(n+1)\ldots.(2n-7)}{1\ 2\ 3\ \ldots.\ n-5}+3.\frac{(n-2)(n-1)n\ldots(2n-9)}{1\ 2\ 3\ldots(n-6)}+\ldots+3^{n-8}.\frac{7.8.9}{1.2.3}$$

$$+3^{n-7}.\frac{6.7}{1.2}+3^{n-6}.5+3^{n-5}.$$

Für die Anzahl aller als unmöglich auszuschliessenden Fälle erhalten wir, indem wir die Summe aller bisherigen Ausdrücke nehmen, die folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned}
&[1]\cdot\frac{(n-1)n(n+1)\ldots.(2n-7)}{1.2.3\ \ldots.(n-5)}\\
&+[1+3]\cdot\frac{(n-2)(n-1)n\ldots(2n-9)}{1.2.3\ldots(n-6)}\\
&+[1+3+3^2]\cdot\frac{(n-3)(n-2)(n-1)\ldots(2n-11)}{1.2.3\ldots(n-7)}\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+[1+3+3^2+3^3+\cdot\cdot+3^{n-9}]\cdot\frac{8.9.10.11}{1.2.3.4}\\
&+[1+3+3^2+3^3+\cdot\cdot+3^{n-8}]\cdot\frac{7.8.9}{1.2.3}\\
&+[1+3+3^2+3^3+\cdot\cdot+3^{n-7}]\cdot\frac{6.7}{1.2}\\
&+[1+3+3^2+3^3+\cdot\cdot+3^{n-6}]\cdot 5\\
&+[1+3+3^2+3^3+\cdot\cdot+3^{n-5}]\cdot 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\equiv\ &\frac{(n-1)n(n+1)\ldots.(2n-7)}{1.2.3\ \ldots.(n-5)}\\
&+\ 4\cdot\frac{(n-2)(n-1)n\ldots(2n-9)}{1.2.3\ldots(n-6)}\\
&+\ 13\cdot\frac{(n-3)(n-2)(n-1)\ldots(2n-11)}{1.2.3\ldots(n-7)}\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+\frac{3^{n-8}-1}{2}\cdot\frac{8.9.10.11}{1.2.3.4}\\
&+\frac{3^{n-7}-1}{2}\cdot\frac{7.8.9}{1.2.3}\\
&+\frac{3^{n-6}-1}{2}\cdot\frac{6.7}{1.2}\\
&+\frac{3^{n-5}-1}{2}\cdot 5\\
&+\frac{3^{n-4}-1}{2}\cdot
\end{aligned}$$

Nach dieser allgemeinen Formel finden wir, wenn wir für n nach einander alle Werthe von 5 bis 10 nehmen, und die entsprechende Anzahl von unmöglichen Fällen bezüglich durch Σ_5, Σ_6, Σ_7, Σ_8, Σ_9 und Σ_{10} bezeichnen:

$$\Sigma_5 = 1,\qquad \Sigma_8 = 273,$$
$$\Sigma_6 = 9,\qquad \Sigma_9 = 1260,$$
$$\Sigma_7 = 54,\qquad \Sigma_{10} = 5508.$$

29. Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Anzahl der verschiedenen möglichen Fälle in Beziehung auf die Annäherung einer Curve einer beliebigen n. Ordnung an ihre verschiedenen Asymptoten zu bestimmen. Wenn wir einstweilen nur diejenigen Fälle, welche nach der 28. Nummer nicht Statt finden können, ausschliessen, so beträgt die Anzahl aller Fälle, wie man nach dem Vorhergehenden gleich einsieht:

$$
\begin{array}{l}
1+\frac{n-2}{1}+\frac{(n-2)(n-1)}{1\,.\,2}+\frac{(n-2)(n-1)n}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\ldots+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)\ldots(2n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots(n-2)}\\
+\;.\\
\;.\\
+1+\frac{5}{1}+\frac{5\,.\,6}{1\,.\,2}+\frac{5\,.\,6\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{5\,.\,6\,.\,7\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5}\\
+1+\frac{4}{1}+\frac{4\,.\,5}{1\,.\,2}+\frac{4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\\
+1+\frac{3}{1}+\frac{3\,.\,4}{1\,.\,2}+\frac{3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}\\
+1+\frac{2}{1}+\frac{2\,.\,3}{1\,.\,2}\\
+1+\frac{1}{1}\\
+1.
\end{array}
$$

In diesem Ausdrucke gibt die h. Horizontal-Columne die Anzahl derjenigen Fälle, in welchen keine Asymptote minder als $(h+1)$punctig osculirt, aber Asymptoten von dieser Art wirklich vorhanden sind; und in jeder einzelnen solcher Horizontal-Columne bedeutet insbesondere das g. Glied die Anzahl derjenigen Fälle, in welchen die Anzahl der $(h+1)$punctig osculirenden Asymptoten $(n-g+1)$ beträgt. Wenn wir diese $(n-1)$ verschiedenen Horizontal-Columnen summiren, so finden wir für die vorstehende Entwicklung den folgenden Ausdruck:

$$\frac{(n-1)n(n+1)\ldots(2n-4)}{1\;\;2\;\;3\;\;\ldots(n-2)}+\ldots+\frac{6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5}+\frac{5.6.7.8}{1.2.3.4}+\frac{4.5.6}{1.2.3}+\frac{3.4}{1.2}+\frac{2}{1}+1.$$

Führen wir die Rechnung bis zur 10. Ordnung aus, so kommt, wenn wir die Anzahl der fraglichen Fälle S_n nennen und nach einander n von 2 bis 10 wachsen lassen:

$$
\begin{array}{lll}
S_2 = 1 & S_5 = 29 & S_8 = 1275\\
S_3 = 3 & S_6 = 99 & S_9 = 4707\\
S_4 = 9 & S_7 = 351 & S_{10} = 17577.
\end{array}
$$

Ziehen wir endlich von der somit für Curven der verschiedenen Ordnungen bestimmten Anzahl von Fällen, die in der vorigen Nummer bestimmte Anzahl unmöglicher Fälle bezüglich ab, so kommt, für

$$
\begin{array}{lrr}
n = 2 & S_2 & = 1\\
n = 3 & S_3 & = 3\\
n = 4 & S_4 & = 9\\
n = 5 & S_5 - \Sigma_5 & = 28\\
n = 6 & S_6 - \Sigma_6 & = 90\\
n = 7 & S_7 - \Sigma_7 & = 297\\
n = 8 & S_8 - \Sigma_8 & = 1002\\
n = 9 & S_9 - \Sigma_9 & = 3447\\
n = 10 & S_{10} - \Sigma_{10} & = 12069;
\end{array}
$$

das ist also die Anzahl der möglichen verschiedenen Fälle, welche bei den 10 ersten Ord-

nungen in Beziehung auf die Ordnung der Annäherung der Curve an geradlinige Asymptoten Statt finden können. —

40. Wenn wir auf die Entwicklungen der 27.—39. Nummer zurückblicken, so treten uns zwei allgemeine Sätze (28, 34), nach welchen die unmöglichen Fälle ausgeschieden worden sind, entgegen. Diese Sätze finden beide ihre letzte Begründung in dem Satze der 9. Nummer, nach welchem eine Curve der n. Ordnung, welche durch $\left(nm - \left(\frac{m(m-3)}{2} + 1\right)\right)$ feste Puncte einer gegebenen Curve der m. Ordnung geht, diese Curve ausserdem noch in $\left(\frac{m(m-3)}{2} + 1\right)$ neuen festen Puncten schneiden und zugleich bieten uns diese Sätze ein bemerkenswerthes Beispiel dar, wie Puncte, die unendlich weit gerückt, und also, im absoluten Sinne, nicht mehr vorhanden sind, dennoch für die nicht unendlich weit liegenden Puncte dieselben Abhängigkeits-Beziehungen hervorrufen als früher, ehe sie ins Unendliche unbestimmt sich verloren haben.

Nach dem ersten der angeführten Sätze hat eine beliebige algebraische Curve, wenn sie $m$punctig und keine minderpunctig osculirende Asymptoten hat, solcher Asymptoten wenigstens m. Hiernach existirt zum Beispiel keine Curve der 5. Ordnung, welche dem Symbole

33332

entspricht; die vier ersten dreipunctig osculirenden Asymptoten fordern, dass auch die fünfte Asymptote eine osculirende sei. Es liegen auf jeder Asymptote zuvörderst zwei Durchschnitts-Puncte mit der Curve unendlich weit, wir können uns durch dieselben zwei unendlich weit entfernte gerade Linien gehend denken, welche dann weiter keinen Punct mit der Curve oder ihre Asymptoten gemein haben. Auf jeder der vier ersten Asymptoten liegt noch ein dritter Durchschnittspunct mit der Curve unendlich weit, die wir als einer dritten unendlich weit entfernten geraden Linie angehörig ansehen können. Nehmen wir das System dieser drei geraden Linien für eine Curve der dritten Ordnung, so schneiden sich alle Curven der 5. Ordnung, welche dem vorstehenden Symbole möglicher Weise entsprechen, in 14 Puncten einer Curve dritter Ordnung und also auch in einem 15. Puncte derselben, welcher, wie jene 14, hier nothwendig unendlich weit liegt. In die Reihe der Curven fünfter Ordnung gehört aber auch das System der fünf Asymptoten, ein dritter Durchschnitt der fünften Asymptote mit diesen Curven liegt also ebenfalls unendlich weit; diese Asymptote ist eine dreipunctig osculirende. Zu den Curven der 5. Ordnung, welche durch dieselben 14 unendlich weit entfernten Puncte gehen, gehören insbesondere aber auch alle Curven welche mit den drei ersten Asymptoten einen mehr als dreipunctigen Contact haben; folglich wird auch für diesen Fall die fünfte Asymptote eine dreipunctig osculirende.

Wenn eine Curve der n. Ordnung überhaupt $(n-(m-1))$ $m$punctig osculirende Asymptoten hat und die übrigen $(m-1)$ Asymptoten dem Symbol

$$m\ m-1\ m-2\ \ldots\ 432$$

entsprechen, so dass auf diesen Asymptoten zusammen $\frac{(m+2)(m-1)}{2}$ Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, so befinden sich auf m unendlich weit gerückten geraden Linien

$$m(n-(m-1)) + \frac{(m+2)(m-1)}{2} = mn - \left(\frac{m(m-3)}{2} + 1\right)$$

unendlich weit liegende Durchschnitte der Curve mit ihren n Asymptoten. Also schneidet die Curve ihre n Asymptoten auch noch in denselben $\left(\frac{m(m-3)}{2} + 1\right)$ Puncten, welche

ebenfalls auf jenen m geraden Linien unendlich weit liegen; also sind auch die letzten $(m-1)$ Asymptoten $m$punctig osculirende. Und das ist vollständig unser Satz.

41. Der zweite der oben angeführten Sätze entspringt auf anderm Wege aus derselben Quelle. Wenn wir die, nach dem Satze der 9. Nummer, gegebenen $\left(mn-\left(\frac{m(m-3)}{2}+1\right)\right)$ festen Puncte auf m geraden Linien unendlich weit entfernt annehmen, und unter dieselben beliebig aber so vertheilen, dass auf keine derselben mehr als n kommen, so gehen durch diese Puncte einerseits unendlich viele Curven der n. Ordnung, welche jede dieser Linien in unendlicher Entfernung wenigstens nach derjenigen Ordnung osculiren, welche durch die Anzahl der auf ihr angenommenen Puncte angezeigt wird, und andrerseits, als Curve der n. Ordnung zu betrachten, ein System von n unendlich weit entfernten geraden Linien. Dieses System und alle jene Curven der n. Ordnung schneiden das System der oben genannten m geraden Linien, nach dem Satze der 9. Nummer, noch in $\left(\frac{m(m-3)}{2}+1\right)$ neuen also im Ganzen in mn festen Puncten, welche nothwendig alle unendlich weit liegen. Die m geraden Linien, auf deren jede n dieser Puncte kommen, sind also alle $n$punctig osculirende Asymptoten der Curven n. Ordnung. Bewiesen ist hiernach der nachstehende Satz, welcher nur der Aussage nach von dem Satze der 34. Nummer verschieden ist.

Eine beliebige algebraische Curve kann nicht m solcher Asymptoten haben, auf welchen die Anzahl aller unendlich weit liegenden Durchschnittspuncte zusammengenommen nur um $\left(\frac{m(m-3)}{2}+1\right)$ oder um weniger noch geringer ist, als in dem immer möglichen Falle, dass alle m Asymptoten $n$punctig osculirende sind.

Als Beispiel zur Veranschaulichung wollen wir ein System von drei gegebenen und ein zweites System von drei unendlich weit entfernten geraden Linien betrachten. Diese beiden Systeme schneiden sich in neun Puncten, die unendlich weit liegen; durch acht dieser Puncte gehen alle diejenigen Curven der dritten Ordnung, welche die drei gegebenen geraden Linien zu Asymptoten und zwar zwei derselben zu osculirenden Asymptoten haben. Solche Curven gehen also auch durch den neunten unendlich weit entfernten Punct, das heisst, sie werden auch von der dritten Asymptote dreipunctig osculirt. —

42. Wir können für die allgemeine Gleichung der Curven der n. Ordnung mit einer $m$punctig osculirenden Asymptote P, die nachstehende Gleichung mit überzähligen Constanten nehmen:

$$\mathrm{p}\Omega_{n-1}+\mu\Omega_{n-m}=0,$$

bei deren Form es wesentlich ist, dass, indem wir etwa p und q als die beiden linearen Functionen, von denen alle andern Functionen abhängig sind, betrachten, in der Function Ω_{n-m} die höchste, die $(n-m)$. Potenz von q nicht fehlt. Ueberdiess fordert die Allgemeinheit, dass auch Ω_{n-1} die lineare Function q in der höchsten, der $(n-1)$. Potenz enthalte. Schreiben wir die letzte Gleichung auf folgende Weise:

$$\mathrm{p}=-\mu\frac{\Omega_{n-m}}{\Omega_{n-1}},$$

so ist ersichtlich, dass, unter den gemachten Voraussetzungen, diese Gleichung befriedigt wird, wenn für immer wachsende Werthe von q der Werth von p immer mehr abnimmt; und die Curve also an ihrer Asymptote P sich hinzieht indem sie sich derselben immer mehr annähert, je weiter sie sich erstreckt. Für die Puncte eines solchen Zweiges der Curve können wir also, im zweiten Theile der vorstehenden Gleichung, für wachsende Werthe von q die Function p vernachlässigen; vernachlässigen wir überdiess auch niedere Potenzen von

q gegen höhere, so kommt, indem wir durch $\varkappa$ einen unbestimmten Coefficienten bezeichnen,

$$p = \varkappa q^{-(m-1)}.$$

Es ist also der entsprechende Werth von p, den wir, unbeschadet der Allgemeinheit, als den kürzesten Abstand des bezüglichen Punctes von der Asymptote P construiren können, ein unendlich Kleines der $(m-1)$. Ordnung. Also:

Die Annäherung einer Curve an eine $m$punctig osculirende Asymptote ist unendlich gross und von der $(m-1)$. Ordnung.

Die Ordnung der Annäherung wächst also in demselben Maasse als die Anzahl der auf der Asymptote in unendlicher Entfernung zusammenfallenden Puncte, in der Art, dass, wenn an einer gegebenen geraden Linie zwei Curven sich hinziehen, welche von dieser Linie bezüglich $(m-1)$ und $m$punctig in unendlicher Entfernung osculirt werden und man in einem Puncte M der geraden Linie ein Perpendikel oder statt dessen unter beliebigem Winkel eine gerade Linie, welche der ersten Curve in K und der zweiten in L begegne, errichtet, das Segmenten-Verhältniss ML : MK sich, je weiter der Punct M auf der geraden Linie fortrückt, desto mehr der Gränze Null sich nähert.

Das Unendliche, als Gränze betrachtet, schliesst nothwendig das doppelte Vorzeichen in sich ein. Es verschwindet p mit $q = +\infty$, wie es mit $q = -\infty$ verschwindet, es wird p immer kleiner, sowohl wenn der negative als auch wenn der positive Werth von q immer mehr wächst.

Eine algebraische Curve nähert sich im Allgemeinen jeder Asymptote zwiefach nach den beiden entgegengesetzten Richtungen der Erstreckung dieser letztern.

Je nachdem in der letzten Gleichung m eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeutet, ändert, wenn wir q nach einander mit entgegengesetzten Zeichen nehmen, zugleich auch p sein Zeichen oder nicht.

Die beiden Zweige einer algebraischen Curve, welche sich nach entgegengesetzten Richtungen an jeder Asymptote hinziehen, liegen entweder auf entgegengesetzter oder auf derselben Seite dieser Asymptote, je nachdem die Anzahl der auf dieser in unendlicher Entfernung zusammenfallenden Puncte eine gerade oder ungerade ist.—

13. Im Allgemeinen lässt sich der Lauf der unendlichen Zweige einer Curve durch geradlinige Asymptoten darstellen; im Allgemeinen kann diess genauer noch geschehen, wenn wir an die Stelle der geradlinigen Asymptoten hyperbolische setzen.

Eine Curve der zweiten Ordnung lässt sich überhaupt durch fünf willkührlich angenommene Puncte legen. Von diesen fünf Puncten kann einer nach gegebener Richtung unendlich weit liegen; dadurch wird bedingt, dass die fragliche Curve zweiter Ordnung eine Hyperbel ist, deren eine Asymptote die gegebene Richtung hat. Es können auch zwei der fünf gegebenen Puncte auf einer gegebenen geraden Linie unendlich weit liegen und dann ist diese gerade Linie eine Asymptote der Hyperbel. Aber auf derselben gegebenen geraden Linie kann, wenn die Hyperbel nicht in ein System von zwei geraden Linien ausarten soll, kein dritter gegebener Punct unendlich weit liegen, weil, weder im Endlichen noch im Unendlichen, drei Puncte einer Curve zweiter Ordnung in gerader Linie liegen können. Wenn aber eine Hyperbel gegeben ist, so lassen sich durch drei auf einem Zweige derselben unendlich weit entfernt liegende Puncte neue Hyperbeln legen, von welchen wir sagen, dass sie sich unter einander und insbesondere auch die gegebene, in unendlicher Entfernung osculiren. Zur vollständigen Bestimmung einer solchen Hyperbel sind noch zwei Puncte nothwendig und hinreichend. Wir können auch durch vier Puncte, welche auf einem

Zweige einer gegebenen Hyperbel unendlich weit liegen, neue Hyperbeln legen. Alle solche Hyperbeln osculiren sich vierpunctig in unendlicher Entfernung. Ein einziger Punct ist hinreichend um eine dieser Hyperbeln vollkommen zu bestimmen. Aber so wie überhaupt zwei Hyperbeln sich im Endlichen nur in vier Puncten schneiden können, so können wir auch nicht durch mehr als vier Puncte, die auf einem Zweige einer gegebenen Hyperbel unendlich weit liegen, eine zweite Hyperbel legen. Wenn aber eine Curve der dritten oder einer höhern Ordnung vorliegt, so lässt sich, im Allgemeinen, durch fünf Puncte, die auf einem Zweige derselben unendlich weit liegen, eine Hyperbel legen und zwar nur eine einzige und vollkommen bestimmte, während durch bloss vier dieser unendlich weit entfernten Puncte, unendlich viele Hyperbeln gehen. Jene einzige Hyperbel osculirt die Curve in unendlicher Entfernung fünfpunctig, für diese unendlich vielen Hyperbeln ist der Contact ein vierpunctiger. Aber so wie, im Allgemeinen, durch sechs gegebene Puncte keine Curve zweiter Ordnung sich legen lässt, so bleibt auch im Unendlichen, wenn die vorliegende Curve nicht von besonderer Natur ist, die Aufeinanderfolge von sechs Puncten auf einem unendlichen Zweige derselben, nicht von der Art, dass durch dieselbe eine sechspunctig osculirende Hyperbel sich legen lässt. Eine Particularisation der vorliegenden Curve ist also nothwendig, von welchem Grade übrigens auch diese Curve sein mag, und diese Particularisation steigert sich mit der Anzahl derjenigen Puncte, welche in unendlicher Entfernung zusammenfallen sollen. Weil aber überhaupt eine Curve der n. Ordnung von einer Hyperbel nur in $2n$ Puncten geschnitten wird, so kann auch eine Curve der genannten Ordnung sich unter keiner Bedingung soweit particularisiren, dass einer ihrer Zweige in unendlicher Entfernung mehr als $2n$punctig osculirt werde.

44. Wir wollen uns nun zu der analytischen Discussion wenden, welche, während wir uns einerseits in der Anlage derselben von den allgemeinen Bemerkungen der vorigen Nummer leiten lassen, andrerseits die Begründung dieser Bemerkungen darbieten wird.

Es sei
$$\mathrm{p}\Omega_{n-1} + \mu\Omega_{n-2} = 0 \tag{1}$$
die allgemeine Gleichung der Curven einer beliebigen n. Ordnung, welche einen unendlichen an der geradlinigen Asymptote sich hinziehenden Zweig haben. Die allgemeine Gleichung einer Hyperbel, welche die gerade Linie P ebenfalls zur Asymptote hat, sei:
$$\mathrm{pr} + \lambda = 0. \tag{2}$$
Wenn wir zwischen den beiden vorstehenden Gleichungen p eliminiren, so ergibt sich
$$\lambda\Omega_{n-1} - \mu\mathrm{r}\Omega_{n-2} = 0. \tag{3}$$
Da diese neue Gleichung nur bis zum $(n-1)$. Grade ansteigt, so folgt dass — weil zwei Durchschnittspuncte unendlich weit liegen — die Hyperbel (2) die gegebenen Curven (1) nur in $2(n-1)$ Puncten schneidet. Zur analytischen Bestimmung dieser Durchschnittspuncte können wir uns der beiden letzten Gleichungen (2) und (3) bedienen.

Wenn die Curve, welche durch die letzte Gleichung (3) dargestellt wird, eine solche Asymptote hat, die der Linie P parallel ist, so liegt einer ihrer Durchschnitte mit der Hyperbel (2) nach der Richtung dieser Linie unendlich weit: es liegen also, in dieser Voraussetzung, drei Durchschnitte dieser Hyperbel und der gegebenen Curve (1) nach derselben Richtung unendlich weit. Wenn die Curve (3) die gerade Linie P zur Asymptote selbst hat, so liegen zwei Durchschnitte dieser Curve und folglich vier Durchschnitte der gegebenen Curve mit der Hyperbel (2) nach der Richtung der geraden Linie P unendlich weit. Wenn überhaupt die Hyperbel (2) mit den Curven (3) nach der Richtung von P in unendlicher Entfernung einen $m$punctigen Contact hat, so steigt ihr Contact mit den gegebenen Curven (1) zu einem $(m+2)$punctigen an.

Um die Function p in der Gleichung (3) in Evidenz treten zu lassen, müssen wir die

Form der Functionen r, Ω_{n-1} und Ω_{n-2} näher particularisiren. Zu diesem Ende sei, indem wir diese Functionen von p und irgend einer, nach Belieben zu bestimmenden, zweiten linearen Function q abhängen lassen: $r \equiv q + \alpha p + \beta$,

$$\begin{aligned} \Omega_{n-1} &\equiv \sigma p \Omega'_{n-2} + q^{n-1} + \gamma q^{n-2} + \delta q^{n-3} + \varepsilon q^{n-4} + \cdots \zeta, \\ \Omega_{n-2} &\equiv \pi p \Omega_{n-3} + q^{n-2} + \vartheta q^{n-3} + \eta q^{n-4} + \varkappa q^{n-4} + \cdots \xi; \end{aligned} \tag{4}$$

wonach die Gleichung (3) in die folgende übergeht:

$$\begin{aligned} p[\lambda\sigma\Omega'_{n-2} - \mu\alpha\Omega_{n-2} - \mu\pi(q+\beta)\Omega_{n-3}] + \lambda[q^{n-1} + \gamma q^{n-2} + \delta q^{n-3} + \varepsilon q^{n-4} + \cdots + \zeta] \\ -\mu[q^{n-1} + \vartheta q^{n-2} + \eta q^{n-3} + \varkappa q^{n-4} + \cdots + \xi q] \\ - \mu\beta[q^{n-2} + \vartheta q^{n-3} + \eta q^{n-4} + \cdots + \xi]. \end{aligned}$$

Wenn die bezügliche Curve eine solche Asymptote haben soll, welche der geraden Linie P parallel ist, so muss, wenn wir P gleich Null setzen, die vorstehende Gleichung auf den $(n-2)$. Grad sich reduciren. Diess erfordert $\lambda = \mu$. (5)

Wenn die Linie P selbst eine Asymptote der Curve sein soll, so muss, wenn p verschwindet, die Gleichung der Curve auf den $(n-3)$. Grad sich reduciren, es muss, neben der vorstehenden Bedingungs-Gleichung, auch noch die folgende befriedigt werden:

$$\gamma = \vartheta + \beta. \tag{6}$$

Nach diesen Beschränkungen wird die Gleichung der Curve die folgende:

$$p[\sigma\Omega'_{n-2} - \alpha\Omega_{n-2} - \pi(q+\beta)\Omega_{n-3}] + [(\delta - \eta - \beta\vartheta)q^{n-3} + (\varepsilon - \varkappa - \beta\eta)q^{n-4} + \cdots] = 0, \tag{7}$$

und wenn wir hiernach zwischen der vorstehenden Gleichung und der Gleichung der Hyperbel (2); von Neuem die Function p eliminiren, ergibt sich:

$$\lambda[\sigma\Omega'_{n-2} - \alpha\Omega_{n-2} - \pi(q+\beta)\Omega_{n-3}] - r[(\delta - \eta - \beta\vartheta)q^{n-3} + (\varepsilon - \varkappa - \beta\eta)q^{n-4} + \cdots] = 0. \tag{8}$$

Da diese neue Gleichung auf algebraischem Wege aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (2) hervorgegangen ist, so stellt sie eine solche Curve der $(n-2)$. Ordnung dar, welche von der durch die letzte Gleichung dargestellten Hyperbel in denselben Puncten geschnitten wird, als die gegebene Curve (1) und die Curve (3) oder (7). Die Anzahl der Durchschnittspuncte hat sich also rücksichtlich der gegebenen Curve um vier und in Rücksicht auf die Curve (3) um zwei Einheiten reducirt, aus dem Grunde nemlich, dass einmal vier, das andere Mal zwei Durchschnittspuncte nach der Richtung der Linie P unendlich weit gerückt sind. Wenn die durch die letzte Gleichung dargestellte Curve eine Asymptote hat, welche einmal der Linie P parallel ist, das andere Mal mit derselben zusammenfällt, so hat die Hyperbel (2) mit der Curve (7) einmal einen dreipunctigen, das andere Mal einen vierpunctigen und mit der gegebenen Curve (1) einmal einen fünfpunctigen und das andere Mal einen sechspunctigen Contact in unendlicher Entfernung nach der Richtung der Asymptote P. Um diese Bedingungen auszudrücken müssen wir die mit der Gleichung (3) in dem Obigen vorgenommenen algebraischen Operationen in Beziehung auf die letzte Gleichung wiederholen, zu welchem Ende eine neue Functionen-Particularisation nothwendig wird.

Zu diesem Ende bemerken wir zuvörderst, dass wir, unbeschadet der Allgemeinheit, Ω_{n-3} als eine blosse Function des $(n-2)$. Grades von q betrachten können, wonach die Anzahl der Constanten in der Gleichung (1) auf die gerade nothwendige sich reducirt. Diess kommt darauf hinaus, π in der dritten der identischen Gleichungen (4) gleich Null zu setzen. Es sei ferner $\Omega_{n-2} \equiv \varrho p \Omega'_{n-3} + q^{n-2} + \tau q^{n-3} + \cdots$

Hiernach verwandelt sich die Gleichung (8), wenn wir alle Glieder, welche p enthalten in dem Symbole $\varphi p \Omega''_{n-3}$ zusammenfassen, in die folgende:

$$\begin{aligned} \varphi p \Omega''_{n-3} + \lambda\sigma[q^{n-2} + \tau q^{n-3} + \cdots] \\ - \lambda\alpha[q^{n-2} + \vartheta q^{n-3} + \cdots] \\ - [(\delta - \eta - \beta\vartheta)q^{n-2} + (\varepsilon - \varkappa - \beta\eta)q^{n-3} + \cdots] \\ - \beta[(\delta - \eta - \beta\vartheta)q^{n-3} + \cdots] \quad = 0. \end{aligned}$$

Die Annahme, dass eine Asymptote der bezüglichen Curve der Linie P parallel sei, erfordert, dass $$\lambda(\sigma-\alpha) = \delta-\eta-\beta\vartheta. \quad (9)$$
Soll eine Asymptote dieser Curve mit der Linie P zusammenfallen, so ist überdiess noch nothwendig, dass $$\lambda(\sigma\tau-\alpha\vartheta) = \varepsilon-\varkappa-\beta\eta + \beta(\delta-\eta-\beta\vartheta). \quad (10)$$
Die erste dieser beiden Bedingungs-Gleichungen kommt also zu den frühern (5) und (6) hinzu, wenn die gegebene Curve (1) von der Hyperbel (2) nach der Richtung von P in unendlicher Entfernung fünfpunctig osculirt werden soll: beide Bedingungs-Gleichungen kommen zu den frühern hinzu, wenn diese Osculation zu einer sechspunctigen ansteigen soll.

Auf diesem Wege können wir nach Belieben weiter gehen.

45. Wir wollen jetzt zu der geometrischen Deutung der analytischen Resultate, zu welchen wir in der vorigen Nummer gelangt sind, übergehen. Zum Behuf dieser Deutung können wir, was unbeschadet der Allgemeinheit erlaubt ist, annehmen, dass die der Function q entsprechende gerade Linie Q auf der Asymptote P senkrecht stehe und dann den Functionen p und q die Bedeutung rechtwinkliger gewöhnlicher Parallel-Coordinaten beilegen. Der Werth der Function r für einen gegebenen Punct ist hiernach derjenigen geraden Linie, welche von diesem Puncte aus parallel mit der Asymptote P nach der geraden Linie R, der zweiten Asymptote der Hyperbel (2), gezogen werden kann. Wenn wir endlich den constanten Inhalt desjenigen Dreiecks, das durch eine beliebige Tangente der Hyperbel von ihrem Asymptoten-Winkel abgeschnitten wird, durch $\varDelta$ bezeichnen, so ist endlich, den obigen Bestimmungen zufolge, $$2\lambda = \pm\varDelta.$$

Die beiden Functionen Ω_{n-1} und Ω_{n-2} stellen, bei der oben ihnen untergelegten Form, wenn sie auf einen gegebenen Punct bezogen werden, bezüglich die Producte derjenigen $(n-1)$ und $(n-2)$ Segmente dar, welche auf der, durch diesen Punct parallel mit P gelegten, geraden Linie, bezüglich zwischen diesem Puncte und den $(n-1)$ und $(n-2)$ Durchschnittspuncten mit den beiden Curven $$\Omega_{n-1} = 0, \qquad \Omega_{n-2} = 0, \quad (11)$$
liegen. Nennen wir den gegebenen Punct O und die beiden Gruppen von Durchschnittspuncten $M^1, M^2, M^3, \ldots M^{n-1}$ und $M_1, M_2, M_3, \ldots M_{n-2}$, so sind hiernach die bezüglichen Functionen-Werthe:
$$\Omega_{n-1} = OM^1 . OM^2 . OM^3 \ldots OM^{n-1},$$
$$\Omega_{n-2} = OM_1 . OM_2 . OM_3 \ldots OM_{n-2}.$$
Aus der Gleichung der gegebenen Curve ergibt sich:
$$\mu = -\frac{p\Omega_{n-1}}{\Omega_{n-2}},$$
also, wenn wir den Punct O irgendwo auf dem Umfange dieser Curve annehmen und den Fusspunct des von diesem Puncte auf die Asymptote P gefällten Perpendikels P nennen:
$$\mu = -OP . \frac{OM^1 . OM^2 . OM^3 \ldots OM^{n-1}}{OM_1 . OM_2 . OM_3 \ldots OM_{n-2}}.$$

Wenn wir endlich in die Bedingungs-Gleichung (5) die für λ und μ gefundenen Ausdrücke einsetzen, so finden wir als Bedingung, dass die gegebene Curve (1) von der Hyperbel (2) nach der Richtung ihrer gemeinschaftlichen Asymptote P d r e i p u n c t i g o s c u l i r t werde $$\varDelta = \mp 2 . OP . \frac{OM^1 . OM^2 . OM^3 \ldots OM^{n-1}}{OM_1 . OM_2 . OM_3 \ldots OM_{n-2}}.$$

Für die erste der durch die beiden Gleichungen (11) dargestellten Curven können wir insbesondere auch das System der $(n-1)$ übrigen Asymptoten der gegebenen Curve (1) nehmen und darnach die Curve Ω_{n-2} vollkommen bestimmen. Dann erhalten wir den nachstehenden Satz.

I n a l l e n H y p e r b e l n, w e l c h e e i n e g e g e b e n e C u r v e n. O r d n u n g a u f

einer gegebenen Asymptote in unendlicher Entfernung dreipunctig osculiren, ist der Inhalt derjenigen Dreiecke, welche durch beliebige Tangenten von dem Asymptoten-Winkel abgeschnitten werden, constant. Wenn auch die $(n-1)$ übrigen Asymptoten der Curve, diejenige Curve der $(n-2)$. Ordnung, welche durch die $n(n-2)$ Durchschnitte der gegebenen Curve mit ihren n Asymptoten geht und endlich noch ein beliebiger Punct der gegebenen Curve gegeben sind, so erhält man diesen constanten Inhalt, wenn man von dem gegebenen Puncte aus ein Perpendikel auf die erstgenannte Asymptote fällt und durch denselben eine gerade Linie parallel mit dieser Asymptote zieht, und dann das doppelte Product des Perpendikels und derjenigen $(n-1)$ Segmente, welche auf der letztgenannten geraden Linie zwischen dem gegebenen Puncte und den $(n-1)$ übrigen Asymptoten liegen, durch das Product derjenigen $(n-2)$ Segmente derselben geraden Linie, welche zwischen dem gegebenen Puncte und den einzelnen Durchschnitten mit der gegebenen Curve der $(n-2)$. Ordnung liegen, dividirt.

Den reciproken Werth von Δ können wir als das Maass der Annäherung der Curve an ihre Asymptote P betrachten.

Wenn die gerade Linie P eine dreipunctig osculirende Asymptote der gegebenen Curve ist, so hat diejenige Curve, welche durch die zweite der Gleichungen (11) dargestellt wird, nach der vorigen Nummer, eine Asymptote, welche derselben geraden Linie P parallel ist. Hiernach wird eines der Segmente im Nenner des Ausdruckes für μ unendlich und demnach kommt

$$\Delta = o.$$

Die osculirende Hyperbel artet alsdann in ein System von zwei geraden Linien P und R aus, wovon die Nothwendigkeit von Vorne herein einleuchtet, weil die erste dieser beiden geraden Linien für sich schon die Curve (1) dreipunctig in unendlicher Entfernung osculirt.

46. Die Lage des Mittelpunctes der dreipunctig osculirenden Hyperbel auf der Asymptote P kann jede beliebige sein und auch die Richtung dieser zweiten Asymptote kann von Vorne herein beliebig angenommen werden. Denn für die in Rede stehende Ordnung der Osculation haben wir über die beiden Constanten β und α, also über die Lage der Linie R, durchaus keine Bestimmung erhalten. Die erste der beiden genannten Constanten wird aber durch die Gleichung (6), welche die Bedingung enthält, dass die dreipunctige Osculation zu einer vierpunctigen ansteige, bestimmt.

Wenn wir in den beiden letzten der identischen Gleichungen (4) p und bezüglich Ω_{n-1} und Ω_{n-2} gleich Null setzen, so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$q^{n-1}+\gamma q^{n-2}+\delta q^{n-3}+\cdots+\zeta = o,$$
$$q^{n-2}+\vartheta q^{n-3}+\eta q^{n-4}+\cdots+\xi = o,$$

zur Bestimmung der Durchschnittspuncte der Asymptote P mit den beiden Curven Ω_{n-1} und Ω_{n-2}, wobei wir, wie in der vorigen Nummer, für die erste dieser Curven das System der $(n-1)$ übrigen Asymptoten der gegebenen Curve nehmen wollen. Nennen wir diese Durchschnitte bezüglich $P^1, P^2, P^3 \ldots P^{n-1}$ und $P_1, P_2, P_3 \ldots P_{n-2}$ und A den Durchschnitt derselben Asymptote P mit der Linie Q, so ist:

$$\gamma = -\{AP^1+AP^2+AP^3+\cdots+AP^{n-1}\},$$
$$\vartheta = -\{AP_1+AP_2+AP_3+\cdots+AP_{n-2}\}.$$

Endlich ist, wenn wir den Mittelpunct der Hyperbel (2) durch C bezeichnen und dann in der identischen Gleichung $r \equiv q+\alpha p+\beta$ zugleich $r=o$ und $p=o$ setzen: $\beta = -q = -AC.$

Die Gleichung (6), welche die Bedingung einer vierpunctigen Osculation ausdrückt, geht hiernach in die folgende über:

$$AP^1 + AP^2 + AP^3 + \cdots + AP^{n-1} = AP_1 + AP_2 + AP_3 + \cdots + AP_{n-2} + AC;$$

und vereinfacht sich noch, wenn wir die Mitte der Puncte P^1, P^2, $P^3 \ldots P^{n-1}$ (das heisst den Schwerpunct gleicher Gewichte, die wir uns in diesen Puncten angebracht denken) durch P^0 und die Mitte der Puncte P_1, P_2, $P_3 \ldots P_{n-2}$ und C durch P_0 bezeichnen; wonach man, wenn man zugleich durch $(n-1)$ die beiden Theile der vorstehenden Gleichung dividirt, die folgende Gleichung erhält: $AP^0 = AP_0$.

Die Mittelpuncte aller Hyperbeln, deren ein Zweig eine gegebene Curve *n*. Ordnung in unendlicher Entfernung vierpunctig osculirt, fallen in demselben Puncte der gemeinschaftlichen Asymptote beider zusammen. Dieser Punct ist dadurch bestimmt, dass er mit den $(n-2)$ Durchschnitten der genannten Asymptote mit der gegebenen Curve ein System von $(n-1)$ Puncten bildet, welches mit dem System der $(n-1)$ Durchschnittspuncte derselben Asymptote mit den $(n-1)$ übrigen Asymptoten der gegebenen Curve eine gemeinschaftliche Mitte hat.

47. Wenn wir, um in der geometrischen Deutung der Resultate der 44. Nummer fortzuschreiten, die Hyperbel (2) so bestimmen wollen, dass sie die gegebene Curve fünfpunctig osculire, so muss neben den Gleichungen (5) und (6) auch noch die Gleichung (9) befriedigt werden. Die Form der Gleichung (2) drückt schon aus, dass die bezügliche Hyperbel mit der gegebenen Curve die Linie P zur gemeinschaftlichen Asymptote hat. Von den drei Constanten μ, β und α, von welchen diese Hyperbel ausserdem nur noch abhängt, wird durch die Bedingung eines dreipunctigen Contactes die erste und durch die Bedingung eines vierpunctigen zugleich die zweite bestimmt. Es bleibt also hiernach nur noch die dritte Constante α, welche die Richtung der zweiten Asymptote R der Hyperbel (2) gibt, willkührlich anzunehmen übrig. Durch die neue Gleichung (9) wird diese Constante auf einzige Art bestimmt. So lange also der Contact nur bis zu einem vierpunctigen ansteigt, können wir der, übrigens vollkommen bestimmten, zweiten Asymptote der Hyperbel (2) noch jede beliebige Richtung geben; unter diesen verschiedenen Richtungen gibt es indess eine einzige und vollkommen bestimmte, welche der in unendlicher Entfernung fünfpunctig osculirenden Hyperbel angehört.

Die Gleichung (9) geht, mit Berücksichtigung der Gleichung (5), in die folgende über:

$$\mu(\sigma-\alpha) = \delta-\eta-\beta\vartheta.$$

Wir können voraussetzen, dass die Linie Q durch den gemeinschaftlichen Mittelpunct aller auf der Asymptote P vierpunctig osculirenden Hyperbeln gehe. Alsdann ist $\beta = 0$ und man erhält:

$$\gamma = \vartheta,$$

$$\mu\alpha = \mu\sigma + \eta - \delta.$$

Der allgemeine Werth von α liesse sich hiernach, wie die Werthe von λ und β, ohne Schwierigkeit geometrisch darstellen; doch ich sehe hierbei keinen Nutzen.

48. Da alle Constanten der Hyperbel (2) dadurch vollkommen bestimmt sind, dass dieselbe eine fünfpunctig osculirende ist, so gibt es, im Allgemeinen, keine sechspunctig osculirende Hyperbel. Die Bedingungs-Gleichung (10), welche, wenn der Contact von dieser Ordnung sein soll, hinzukommt und die nach den Bestimmungen der vorigen Nummer sich auf die folgende vereinfacht $\mu(\sigma\tau-\alpha\vartheta) = \varepsilon-x$,

und nach der Elimination von α in

$$\mu\sigma(\tau-\vartheta) = \varepsilon - x + \vartheta(\eta-\delta)$$

übergeht, drückt also aus, von welcher besondern Natur die gegebene Curve sein muss,

wenn eine solche sechspunctig osculirende Hyperbel existiren soll. Alsdann gibt es, im eigentlichen Verstande keine fünfpunctig osculirende Hyperbel, weil der Contact sogleich von einem vierpunctigen zu einem sechspunctigen überspringt.

Es kann, in mehr noch untergeordneten Fällen, die einzige fünfpunctig osculirende Hyperbel auch durch eine mehr als sechspunctig osculirende Hyperbel ersetzt werden. Der Contact kann im Allgemeinen, wenn die gegebene Curve von der n. Ordnung ist, bis zu einem $2n$punctigen ansteigen. Die folgenden Nummern werden hierüber mehr Licht verbreiten. Während nemlich, für die letzten Entwicklungen der Keim schon in meinem *Systeme der analytischen Geometrie* (Dritter Abschnitt, §. 2.) liegt, wollen wir jetzt in unsern Betrachtungen von demjenigen Gesichtspuncte ausgehen, der diesen Band meiner Arbeiten von den frühern characteristisch unterscheidet. Wir werden auch hier wieder eine Bestätigung dafür finden, dass die grössere Allgemeinheit und Abstractheit, die wir in das Princip einer mathematischen Darstellung legen, durch die Einfachheit und Leichtigkeit der Entwicklung belohnend aufgewogen wird. —

49. Wir wollen in der Gleichung einer gegebenen Curve der n. Ordnung eine solche Hyperbel, welche mit ihr nach der Richtung einer ihrer Asymptoten in unendlicher Entfernung einen Contact von irgend einer gegebenen Ordnung hat, unmittelbar in Evidenz treten lassen, und hierbei erstlich voraussetzen, dass dieser Contact ein $2m$punctiger sei. Die osculirende Hyperbel schneidet alsdann die gegebene Curve im Allgemeinen in $2n$ Puncten, und von diesen liegen $2m$ nach der Richtung der gemeinschaftlichen Asymptote, die wir wiederum P nennen wollen, unendlich weit und sind also auch als die m Paare von Durchschnitten der Hyperbel mit m geraden Linien, welche in der Asymptote P zusammenfallen, anzusehen. Aus einer schicklichen algebraischen Verbindung der Gleichung der Curve

$$\Omega_n = 0 \tag{1}$$

mit der Gleichung der osculirenden Hyperbel, welche wiederum die folgende sein mag:

$$pr + \lambda = 0, \tag{2}$$

muss hiernach eine neue Gleichung sich ergeben, in welcher p^m als Factor sich herausstellt. Durch diese Bemerkung wird eine identische Gleichung von der nachstehenden Form bedingt:

$$\Omega_n \equiv (pr+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu p^m \Omega_{n-m}, \tag{3}$$

deren Discussion alle fraglichen geometrischen Beziehungen in ein helles Licht stellen wird.

Lassen wir den Ausdruck $(pr+\lambda)$ verschwinden, so tritt der verlangte Factor p^m in der Function Ω_n wirklich in Evidenz. Damit die Form dieser Function die allgemeinste werde, haben wir im ersten Gliede ihrer Entwicklung jenem Ausdrucke des zweiten Grades die allgemeine Function des $(n-2)$. Grades Ω_{n-2} und der m. Potenz von p im zweiten Gliede die allgemeine Function des $(n-m)$. Grades Ω_{n-m} als Factor beifügen müssen. Die einzige Asymptote der gegebenen Curve, welche in der vorstehenden identischen Gleichung in Evidenz tritt, ist P, denn nur dann, wenn die entsprechende lineare Function p verschwindet, reducirt sich der Grad der Function Ω_n um zwei Einheiten. Diejenige Curve der $(n-m)$. Ordnung welche durch die Gleichung:

$$\Omega_{n-m} = 0, \tag{4}$$

dargestellt wird, geht durch die, nicht auf P unendlich weit liegenden, noch übrigen $2(n-m)$ Durchschnittspuncte.

Wenn der Contact auf der Asymptote P zu einem $(2m+1)$punctigen ansteigen soll, so muss von den letztgenannten $2(n-m)$ Durchschnittspuncten der osculirenden Hyperbel mit der gegebenen Curve einer nach der Richtung von P unendlich weit rücken, oder mit andern Worten, es muss die Curve (4) eine solche Asymptote haben, welche mit der Asymptote P parallel ist. Diess bedingt die nachstehende Particularisation der Function Ω_{n-m}:

$$\mu\Omega_{n-m} \equiv \mu(p+\alpha)\Theta_{n-m-1} + \sigma\Omega_{n-m-2}, \tag{5}$$

wonach die Gleichung (3), indem sie eine Constante verliert, in die folgende sich verwandelt:

$$\Omega_n \equiv (pr+\lambda)\Omega_{n-2} + p^m[\mu(p+\alpha)\Theta_{n-m-1} + \sigma\Omega_{n-m-2}]. \tag{6}$$

Es ist offenbar, dass, wenn zwei der $2(n-m)$ Durchschnittspuncte der Curve (4) mit der fraglichen Hyperbel (2) auf P unendlich weit liegen, wonach P eine Asymptote der genannten Curve wird, die Gleichung der gegebenen Curve diejenige Form haben muss, die durch die identische Gleichung (3) angezeigt wird, wobei m um eine Einheit wächst. Um diess direct nachzuweisen, wollen wir, in Gemässheit der obigen Voraussetzung α in der letzten Gleichung gleich Null nehmen. Dann kommt:

$$\begin{aligned}\Omega_n &\equiv (pr+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu p^{m+1}\Theta_{n-m-1} + \sigma p^m\Omega_{n-m-2}\\ &\equiv (pr+\lambda)[\Omega_{n-2} + \frac{\sigma}{\lambda}\cdot p^m\Omega_{n-m-2}] + [\mu p^{m+1}\Theta_{n-m-1} - \frac{\sigma}{\lambda}\cdot p^{m+1}r\Omega_{n-m-2}]\\ &\equiv (pr+\lambda)\Omega'_{n-2} + \mu' p^{m+1}\Omega'_{n-m-1},\end{aligned}$$

indem wir, der Kürze halber,

$$\Omega_{n-2} + \frac{\sigma}{\lambda}\cdot p^m\Omega_{n-m-2} \equiv \Omega'_{n-2},$$

$$\mu\Theta_{n-m-1} - \frac{\sigma}{\lambda}\cdot p\Omega_{n-m-2} \equiv \mu'\Omega'_{n-m-1}$$

setzen, wonach die beiden neuen Functionen die allgemeinen ihrer Ordnung sind.

Zugleich ist durch diese letzten Umformungen die Form der Gleichung (3) für $(m+1)$ gerechtfertigt, wenn ihre Gültigkeit für m dargethan ist. Sie ist also überhaupt gerechtfertigt, wenn sie, was unmittelbar in die Augen springt, für den Fall, dass $m=o$, Statt findet.

50. Im Allgemeinen ist die Anzahl der Constanten in den beiden Gleichungen:

$$(pr+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu p^m\Omega_{n-m} = o, \tag{1}$$

$$(pr+\lambda)\Omega_{n-2} + p^m[\mu(p+\alpha)\Theta_{n-m-1} + \sigma\Omega_{n-m-2}] = o, \tag{2}$$

eine überzählige, wegen der durch ihre Form hervorgerufene Abhängigkeit der beiden Functionen Ω_{n-2} und Ω_{n-m} von einander. Wir können die erste dieser Functionen um eine willkührliche Function von der Form $\varrho p^m\Omega_{n-m-2}$ wachsen lassen, und brauchen dann bloss, damit die Gleichung (1) unverändert dieselbe bleibe, die Function Ω_{n-m} nur mit einer andern Function derselben Ordnung zu vertauschen. Die Anzahl der überzähligen Constanten ist daher der Anzahl der Constanten der Function $\varrho\Omega_{n-m-2}$ gleich und beträgt hiernach

$$\frac{(n-m-2)(n-m+1)}{2} + 1.$$

Für $m=n-2$ reducirt sich diese Anzahl auf Eins, wobei die willkührliche Function in eine willkührliche Constante sich verwandelt. Für $m=n-1$ und für $m=n$, findet die in Rede stehende Transformation gar nicht mehr Statt. Wir können also, unter dieser Beschränkung, aus der vorstehenden Gleichung (1) durch eine particuläre Bestimmung der Function Ω_{n-2} und Ω_{n-m} (etwa indem wir die erste dieser beiden Functionen als von p und einer beliebigen zweiten linearen Function q abhängig betrachten und dann alle Glieder, welche p bis zur m. Potenz einschliesslich enthalten, ausfallen lassen) die obige Anzahl von Constanten fortschaffen; wonach deren noch

$$5+\frac{(n-2)(n+1)}{2}+1+\frac{(n-m)(n-m+3)}{2}-\left[\frac{(n-m-2)(n-m+1)}{2}+1\right] \equiv \frac{n(n+3)}{2}-(2m-5) \tag{3}$$

übrig bleiben. In der Gleichung (2) beträgt hiernach die Anzahl der Constanten Eins weniger, also

$$\frac{n(n+3)}{2} - [(2m+1) - 5]. \tag{4}$$

Bezeichnen wir den Contact der Curve mit der Hyperbel überhaupt als einen φpunctigen, so

können wir die beiden Ausdrücke (3) und (4) in den folgenden zusammenfassen:

$$\frac{n(n+3)}{2} - (q-5). \tag{5}$$

Wir sehen hieraus, dass für einen fünfpunctigen Contact die Constanten-Anzahl, die gerade nothwendige für Curven der n. Ordnung überhaupt ist; dass aber, wenn die Ordnung des Contactes ansteigt, für jeden neuen Punct, der mit dem auf P unendlich weit entfernten Osculationspuncte sich vereinigt, die nothwendige Anzahl von Constanten um eine Einheit sich vermindert. Diess ist damit in Uebereinstimmung, dass eine gegebene Curve der n. Ordnung auf einer gegebenen Asymptote jedesmal von einer einzigen Hyperbel fünfpunctig osculirt wird, dass sie aber jedesmal einer neuen Beschränkung unterworfen werden muss, wenn die Ordnung des Contactes, von einem fünfpunctigen an, um eine neue Einheit wächst. Wenn der Contact hingegen ein bloss vierpunctiger ist, so enthält die entsprechende Gleichung (1), indem wir $m=2$ setzen, noch eine überzählige Constante; ist der Contact nur ein dreipunctiger, so enthält, indem wir $m=1$ setzen, die Gleichung (2) noch zwei überzählige Constanten. Diese werden dadurch bedingt, dass die fragliche Hyperbel, wenn sie nur vier- und dreipunctig osculirt, in keiner ausschliesslichen Beziehung zur Curve steht. In dem ersten Falle muss die Function $(pr+\lambda)$, welche einer solchen Hyperbel entspricht, nothwendig eine willkührliche Constante, von welcher die Richtung der zweiten Asymptote R abhängt, einschliessen; in dem zweiten Falle, müssen zwei solcher Constanten da sein und von denselben die Lage der Asymptote R überhaupt abhängen. In Uebereinstimmung hiermit können wir wirklich der Gleichung $(pr+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu p^2 \Omega'_{n-2} = 0$,
welche auf den Fall einer vierpunctigen Osculation sich bezieht, in die folgende von ganz gleicher Form $(p(r+\gamma p)+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu' p^2 \Omega''_{n-2} = 0$,
in der γ jeden beliebigen Werth haben kann, verwandeln, indem wir, der Kürze wegen,

$$\mu\Omega'_{n-2} - \gamma\Omega_{n-2} \equiv \mu'\Omega''_{n-2},$$

setzen. Und ebenso können wir die folgende Gleichung, die einem bloss dreipunctigen Contacte entspricht, $(pr+\lambda)\Omega_{n-2} + p[\mu(p+\alpha)\Theta_{n-2} + \sigma\Omega_{n-3}] = 0$,
ohne sie dabei im geringsten zu ändern, indem wir

$$r + \gamma p + \delta \equiv r',$$
$$-\gamma\Omega_{n-2} + \mu\Theta_{n-2} \equiv \mu'\Omega'_{n-2},$$
$$-\delta\Omega_{n-2} + \mu\alpha\Theta_{n-2} + \sigma\Omega_{n-3} \equiv \varkappa\Omega''_{n-2},$$
$$\mu' p\Omega'_{n-2} + \varkappa\Omega''_{n-2} \equiv \mu'(p+\alpha')\Theta'_{n-2} + \sigma'\Omega'_{n-3},$$

setzen, mit der nachstehenden von ganz gleicher Form vertauschen:

$$(pr'+\lambda)\Omega_{n-2} + p[\mu'(p+\alpha')\Theta'_{n-2} + \sigma'\Omega'_{n-3}] = 0.$$

In den oben ausgeschlossenen Fällen endlich, wo $m=n-1$ und $m=n$, und demnach die Ordnung der Osculation eine $(2n-2)$punctige, $(2n-1)$punctige oder $2n$punctige ist, tritt in den entsprechenden Gleichungen:

$$(pr+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu p^{n-1} s = 0,$$
$$(pr+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu p^n + \sigma p^{n-1} = 0,$$
$$(pr+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu p^n = 0.$$

unmittelbar die durch den Ausdruck (5) bestimmte Anzahl von Constanten hervor.

51. Die Gleichung $(pr+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu p^m \Omega_{n-m} = 0$,
in welcher eine $2m$punctig osculirende Hyperbel in Evidenz tritt; wird befriedigt, wenn wir zugleich: $\Omega_{n-2} = 0$, $p^m = 0$,
setzen. Diess heisst, wenn wir geometrisch deuten, es lässt sich durch die $(n-2)$ Durchschnittspuncte der gegebenen Curve n. Ordnung mit ihrer Asymptote P eine Curve der $(n-2)$.

Ordnung Ω_{n-2} legen, welche die gegebene in jedem dieser $(n-2)$ Durchschnittspuncte $m$punctig osculirt. Und, umgekehrt, wenn diese Möglichkeit vorhanden ist, so gibt es in unendlicher Entfernung eine wenigstens $2m$punctig osculirende Hyperbel. So lange m kleiner ist als $(n-1)$, gibt es solcher Curven der $(n-2)$. Ordnung unendlich viele, welche, wenn $\varrho\Omega_{n-m-2}$ nach einander alle willkührlichen Functionen der $(n-m-2)$. Ordnung bedeutet, nach der vorhergehenden Nummer, alle durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$\Omega_{n-2} + \varrho p^m \Omega_{n-m-2} = 0.$$

Jede solche Curve schneidet die gegebene ausserdem noch in $(n-2)(n-m)$ Puncten, welche alle auf einer Curve der $(m-n)$. Ordnung liegen, für deren Gleichung sich die nachstehende ergibt:

$$\mu\Omega_{n-m} - \varrho(pr+\lambda)\Omega_{n-m-2} = 0.$$

Denn die beiden letzten Gleichungen befriedigen, wenn sie zugleich bestehen, die Gleichung der gegebenen Curve.

Auf diese Weise haben wir die geometrische Bedeutung der zu Anfang der vorigen Nummer betrachteten überzähligen Constanten nachgewiesen.

Wenn, bei einer willkührlichen Annahme der Function $\varrho\Omega_{n-m-2}$, die durch die letzte Gleichung dargestellte Curve der $(n-m)$. Ordnung eine solche Asymptote hat, die mit P parallel ist, so haben es, nach der Form dieser Gleichung, alle solche Curven. Dann steigt die Ordnung der Osculation nach der Richtung von P in unendlicher Entfernung von einer $2m$punctigen zu einer $(2m+1)$punctigen an.

52. Um zu particularisiren, wollen wir zuvörderst die Curven der dritten Ordnung betrachten. Hier entsprechen einer d r e i-, v i e r-, f ü n f- und s e c h s punctig in unendlicher Entfernung osculirenden Hyperbel bezüglich die nachstehenden vier Gleichungen.

$$(pr+\lambda)q + \mu p[(p+\alpha)s + \sigma] = 0, \tag{1}$$

$$(pr+\lambda)q + \mu p^2 s = 0, \tag{2}$$

$$(pr+\lambda)q + \mu p^2(p+\sigma) = 0, \tag{3}$$

$$(pr+\lambda)q + \mu p^3 = 0. \tag{4}$$

Von diesen vier Gleichungen enthält nur die dritte, welche auf einen fünfpunctigen Contact sich bezieht, die für Curven der dritten Ordnung, im Allgemeinen, nothwendige und hinreichende Anzahl von Constanten, nemlich n e u n. Da keine überzählige Constante diese Gleichung unbestimmt macht, so ist sie mithin die a l l g e m e i n e der Curven dritter Ordnung. Die letzte Gleichung enthält nur a c h t Constanten, und unter diesen keine überzählige. Nur Curven dritter Ordnung von einer besondern Art — die wir aus der Form der Gleichung sogleich näher bestimmen werden — haben eine sechspunctig osculirende Hyperbel; die Gleichung (4) ist die allgemeine Gleichung solcher Curven, weil ihr an der allgemeinen Anzahl der Constanten nur e i n e fehlt. Die zweite Gleichung enthält eine überzälige Constante, welche daher rührt, dass die Bedingung eines vierpunctigen Contactes in der Gleichung der osculirenden Hyperbel eine Constante unbestimmt lässt. Die erste Gleichung endlich enthält d r e i Constanten zu viel und muss also, weil eine dreipunctig osculirende Hyperbel nur zwei willkührliche Constante zulässt, in der obigen Form, abgesehen von dem, der Hyperbel entsprechenden Factor $(pr+\lambda)$, noch eine überzählige Constante einschliessen. Diese kommt auf die Function q; denn in Uebereinstimmung mit der 50. Nummer, können wir, indem ϱ eine beliebige Constante bezeichnet, die obige Gleichung (1) auch auf folgende Weise schreiben:

$$(pr+\lambda)(q+\varrho p) + \mu' p[(p+\alpha')s'+\sigma'] = 0,$$

so dass die Form dieser Gleichung sich nicht ändert, wenn wir in ihrem ersten Gliede $(q+\varrho p)$ statt q in Evidenz bringen. Alle geraden Linien, welche, bei willkührlicher Annahme von ϱ, durch die folgende Gleichung

$$q + \varrho p = 0 \tag{5}$$

dargestellt werden, stehen in gleicher geometrischer Beziehung zu der gegebenen Curve.

Wir können insbesondere ϱ so bestimmen, dass

$$q + \varrho p \equiv s + \tau.$$

Dann nimmt die Gleichung der Curve, wenn wir die Accente fortlassen, die folgende Form an:

$$(pr+\lambda)(s+\tau) + \mu p[(p+\alpha)s + \sigma] = 0,$$

und enthält nun nur noch 11 Constanten, von denen die beiden überzähligen auf die unvollständige Bestimmung einer Hyperbel durch die Bedingung einer dreipunctigen Osculation kommen. Diese letzte Form ist aus der Gleichung (1) durch eine solche Particularisation hervorgegangen, welche von den Relationen einer solchen Osculation unabhängig ist und die deshalb für uns nur eine untergeordnete Bedeutung hat. Wir erkennen indess sogleich, dass die Function $(s+\tau)$, durch welche die Function q ersetzt worden ist, eine solche gerade Linie bezeichnet, welche, während Q jede beliebige Richtung haben kann, insbesondere einer Asymptote der gegebenen Curve n. Ordnung parallel ist; denn setzen wir in der letzten Gleichung $(s+\tau) = 0$, so reducirt sich diese Gleichung auf den zweiten Grad. Die Gleichung (5) zeigt, dass die gerade Linie Q zwar jede beliebige Richtung haben kann, dabei aber immer durch einen festen Punct der Asymptote P gehen muss.

53. Wir wollen zuvörderst nun die Form der Gleichung (1)

$$(pr+\lambda)q + p[\mu(p+\alpha)s+\sigma] = 0, \tag{1}$$

welche eine dreipunctige Osculation der bezüglichen Curve dritter Ordnung mit der durch die Gleichung

$$pr + \lambda = 0, \tag{6}$$

dargestellten Hyperbel auf der, beiden gemeinschaftlichen Asymptote P in unendlicher Entfernung, anzeigt, näher ins Auge fassen. Der Gleichung (1) geschieht Genüge, wenn neben der letzten Gleichung auch die folgende befriedigt wird:

$$(p+\alpha)s + \sigma = 0, \tag{7}$$

welche eine solche Hyperbel darstellt, die eine mit P parallele Asymptote hat. Die beiden Hyperbeln (6) und (7) schneiden sich nur in drei Puncten, und diese Puncte sind die einzigen Puncte, in welchen, abgesehen vom unendlich weit entfernten Osculationspuncte, die gegebene Curve von der osculirenden Hyperbel geschnitten wird.

Für die Durchschnittspuncte der Linie Q mit der Curve ergibt sich:

$$q = 0, \qquad \begin{cases} p = 0, \\ (p+\alpha)s + \sigma = 0, \end{cases}$$

so dass einer auf der Linie P, und die beiden andern auf der Hyperbel (7) liegen. Lassen wir, in Gemässheit der Schluss-Bemerkung der vorigen Nummer, die Linie Q um ihren Durchschnitt mit der Linie P sich beliebig drehen, — und dieser Durchschnitt ist dadurch vollkommen bestimmt, dass er zugleich der einzige Punct ist, in welchem die gegebene Curve dritter Ordnung von ihrer Asymptote P geschnitten wird — so schneidet sie in jeder ihrer Lagen die gegebene Curve ausserdem noch in zwei Puncten; und legen wir dann durch diese beiden Puncte eine beliebige Hyperbel, [(7)] welche überdiess nur noch eine Asymptote hat, welche mit der geraden Linie P parallel ist, so schneidet diese Hyperbel die gegebene Curve ausserdem noch in solchen drei Puncten, durch welche eine zweite Hyperbel geht, welche die gegebene Curve nach der Richtung ihrer Asymptote P dreipunctig osculirt. Kennen wir diese drei Puncte, so ist diese zweite Hyperbel dadurch, dass sie überdiess die Asymptote P zu der ihrigen hat, auf lineare Weise bestimmt. Wenn andrerseits aber eine Curve (dritter Ordnung) und eine ihrer Asymptoten P gegeben ist, so hängt eine Hyperbel, welche die Curve auf dieser Asymptote dreipunctig osculirt, nur noch von zwei willkührlichen Constanten ab und ist also vollkommen bestimmt, sobald sie der Bedingung unterworfen ist, durch irgend zwei gegebene Puncte, die insbesondere auch auf der Curve selbst (unter den letztbezeichneten drei Durchschnittspuncten) angenommen werden können, zu gehen. Die Construction

der Hyperbel hängt also hiernach nur von der Bestimmung irgend eines dritten Punctes derselben (des dritten jener drei Durchschnittspuncte) ab. Hiernach erhalten wir die Auflösung der nachstehenden Aufgabe:

Eine Hyperbel zu beschreiben, welche eine gegebene Curve der dritten Ordnung auf einer gegebenen Asymptote in unendlicher Entfernung dreipunctig osculirt, und überdiess in zwei gegebenen Puncten schneidet.

Man lege durch den Durchschnittspunct der gegebenen Curve mit ihrer Asymptote P eine gerade Linie, welche die Curve noch in zwei Puncten [N und N'] schneidet, beschreibe durch diese beiden Puncte und die beiden gegebenen Puncte [M und M'] eine Hyperbel, die eine der geraden Linie P parallele Asymptote hat. Diese Hyperbel schneidet die gegebene Curve noch in einem einzigen Puncte [M'']. Alsdann ist die verlangte Hyperbel diejenige, welche durch die drei Puncte M, M' und M'' geht und die Asymptote P auch zu der ihrigen hat.

Alle angezeigten Constructionen sind bloss lineare. Es liegt nicht in unserer Absicht, hier in die Ausführung derselben einzugehen.

54. Wir wollen zur Betrachtung der Form der Gleichung:

$$(pr+\lambda)q + \mu p^2 s = 0,$$

welche eine vierpunctige Osculation anzeigt, übergehen. Zur Bestimmung der Durchschnitte der bezüglichen Curve mit der Linie Q erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$q = 0, \qquad \begin{cases} p^2 = 0, \\ s = 0. \end{cases}$$

Es fallen also von den drei Durchschnittspuncten zwei auf der Asymptote P zusammen; die gerade Linie Q ist also die Tangente der Curve in demjenigen Puncte, in welchem diese von der Asymptote P geschnitten wird und ist hierdurch vollkommen bestimmt. Ihr dritter Durchschnitt mit der Curve liegt auf der geraden Linie S. Die Gleichung der gegebenen Curve wird ferner befriedigt, wenn zugleich die folgenden Gleichungen Statt finden

$$s = 0, \qquad \begin{cases} p = 0, \\ pr + \lambda = 0. \end{cases}$$

Die gerade Linie S geht also, ausser durch den Durchschnittspunct auf Q, auch noch durch die beiden Puncte, welche, abgesehen vom Osculationspuncte, die beiden einzigen Durchschnittspuncte der Curve mit der osculirenden Hyperbel sind.

Wenn wir also in dem einzigen Durchschnittspuncte der Curve mit ihrer Asymptote P eine Tangente Q an die Curve legen, so schneidet diese Tangente die Curve ausserdem noch in einem einzigen Puncte, und dieser liegt mit denjenigen beiden Puncten, in welchen die Curve von einer vierpunctig osculirenden Hyperbel geschnitten wird, in gerader Linie S. Dieser Satz gibt die Construction der folgenden Aufgabe.

Eine Hyperbel zu beschreiben, welche eine gegebene Curve der dritten Ordnung auf einer gegebenen Asymptote in unendlicher Entfernung vierpunctig osculirt und überdiess in einem gegebenen Puncte schneidet.

Man lege an die Curve in ihrem Durchschnittspuncte mit der gegebenen Asymptote eine Tangente, und verbinde denjenigen Punct, in welchem diese Tangente der Curve zum zweiten Male begegnet, mit dem gegebenen Puncte auf der gegebenen Curve durch eine gerade Linie; man bestimme den dritten Punct, in welchem diese gerade Linie die Curve schneidet. Dieser Punct ist alsdann ein neuer Punct der zu bestimmenden Hyperbel, die dadurch vollständig bestimmt ist, dass sie durch zwei gegebene Puncte geht und überdiess mit der gegebenen Curve auf der Asymptote P einen dreipunctigen Contact hat.

Eine einfachere Construction der fraglichen Hyperbel ergibt sich, wenn wir, statt diese Construction auf die Aufgabe der vorigen Nummer zurückzuführen, nach dem Satze der 46. Nummer *) den Mittelpunct dieser Hyperbel bestimmen. Dann sind zwei gegebene Puncte, die gegebene Asymptote P und der auf ihr bestimmte Mittelpunct zur vollständigen Bestimmung der Hyperbel hinreichend.

55. Aus der vorigen Nummer ergibt sich der nachstehende Satz:

Alle Hyperbeln, welche eine gegebene Curve der dritten Ordnung auf derselben Asymptote in unendlicher Entfernung vierpunctig osculiren, haben mit der Curve solche gemeinschaftlichen Chorden, welche alle durch einen festen Punct der Curve gehen.

Unter den unendlich vielen vierpunctig osculirenden Hyperbeln befindet sich eine einzige Uebergangs-Hyperbel, für welche der Contact zu einem fünfpunctigen ansteigt. In den Beziehungen der vorigen Nummer ändert für diese Curve sich weiter nichts, als dass, indem die Function s in $(p+\alpha)$ übergeht, die Linie S der Asymptote P parallel wird, und also der Curve, ausser in dem Durchschnitte mit der Linie Q, nur noch in einem einzigen Puncte begegnet. Dieser Punct, welcher zugleich auf der fünfpunctig osculirenden Hyperbel liegt, ist hiernach leicht zu construiren; wir brauchen nur in dem einzigen Durchschnitt der Asymptote P mit der gegebenen Curve dritter Ordnung an diese eine Tangente zu legen, und dann durch denjenigen Punct, in welchem diese Tangente der Curve zum zweiten Male begegnet, eine mit der Asymptote P parallele gerade Linie zu ziehen. Diese gerade Linie schneidet die Curve ausserdem, nur noch in einem einzigen Puncte und dieser Punct ist der zu construirende. Auf diese Weise ist also, auf die Aufgabe der vorigen Nummer, die folgende Aufgabe zurückgeführt:

Eine Hyperbel zu beschreiben, welche eine gegebene Curve der dritten Ordnung auf einer gegebenen Asymptote fünfpunctig osculirt.

56. Wir haben bisher noch die Gleichung (4) der 52. Nummer,

$$(pr+\lambda)q + \mu p^3 = 0,$$

welche auf einen sechspunctigen Contact sich bezieht, unberücksichtigt gelassen. Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn wir zugleich

$$q = 0, \qquad p^3 = 0$$

setzen; hiernach ist Q eine solche Tangente, welche die gegebene Curve, im Berührungspuncte auf der Asymptote P, dreipunctig osculirt, oder, mit andern Worten, es hat die Curve einen Wendungspunct auf ihrer Asymptote P, und die Tangente in diesem Wendungspuncte ist Q. Hiermit ist geometrisch die durch die Existenz einer sechspunctig osculirenden Hyperbel bedingte Particularisation der Curve ausgesprochen.

In dem fraglichen Falle einer sechspunctig osculirenden Hyperbel gibt es, wie in dem Falle einer bloss fünfpunctig osculirenden, unendlich viele vierpunctig osculirenden Hyperbeln, unter welchen jene immer noch den Uebergang, aber einen Uebergang von besonderer Art, bildet. Lassen wir eine dieser vierpunctig osculirenden Hyperbeln einer der in Rede stehenden Curven dritter Ordnung in Evidenz treten, indem wir zu der Form der Gleichung (3) der 52. Nummer

$$(pr+\lambda)q + \mu p^2 s = 0$$

zurückgehen, so muss die Particularisation der Curve auch in dieser Form durch das Ausfallen einer Constanten sich aussprechen. Die dieser Form entsprechende Linie Q berührt die Curve im Durchschnitte derselben mit der Asymptote P, und ist also, da dieser Durchschnitt

*) System. Dritter Abschnitt, 178.

ein Wendungspunct ist, die Tangente in diesem Puncte; wonach die vorstehende Gleichung durch das Verschwinden von q auf $p^3 = o$ sich reduciren muss. Hiernach ist folgende Function-Bestimmung gegeben:

$$s \equiv p + \varkappa q,$$

so dass die Gleichung der Curve die nachstehende Form

$$(pr+\lambda)q + \mu p^2(p+\varkappa q) = o,$$

mit bloss neun Constanten, annimmt. Unter diesen neun Constanten befindet sich immer noch die überzählige, welche sich auf die unvollständige Bestimmung der vierpunctig osculirenden Hyperbel bezieht.

Derjenige feste Punct der Curve, in welchem, nach dem Satze der 55. Nummer, die gemeinschaftlichen Chorden der Curve mit allen einzelnen vierpunctig osculirenden Hyperbeln sich schneiden, ist hier ein Wendungspunct der Curve und liegt auf derjenigen ihrer Asymptoten, auf welcher die Osculation Statt findet.

57. Die Resultate der 52.—55. Nummer bestätigen, wie die Relationen des Endlichen auch in unendlicher Entfernung noch fortbestehen, wobei aber nicht aus den Augen zu verlieren ist, dass sie hier nur in so fern eine reelle Existenz haben, als der mathematische Begriff des Unendlichen den Begriff der Gränze einschliesst. Bekannt ist, dass eine Hyperbel eine gegebene Curve der dritten Ordnung in sechs Puncten schneidet und dass, wenn man durch diese sechs Puncte drei gerade Linien (überhaupt irgend eine beliebige zweite Curve der dritten Ordnung) legt, diese drei geraden Linien die Curve noch in drei Puncten schneiden und dass diese Puncte auf einer neuen geraden Linie (Q) liegen. Ist eine Asymptote der gegebenen Curve zugleich eine Asymptote der Hyperbel, so können wir diese für eine jener drei geraden Linien nehmen. Wenn die Hyperbel dreipunctig osculirt, so ist dann eine zweite der drei geraden Linien mit der fraglichen Asymptote parallel, wodurch noch keine nähere Bestimmung über die Richtung von Q gegeben ist. *) — Damit die Ordnung der Osculation zu einer vierpunctigen ansteige, muss eine zweite jener drei geraden Linien in die Asymptote P fallen. Dann fallen also auch zwei der drei Durchschnittspuncte, welche die Linie Q verbindet in einem Puncte der Asymptote P zusammen und daher berührt die Linie Q die Curve in diesem Puncte. Soll die Hyperbel eine fünfpunctig osculirende sein, so muss die letzte jener drei geraden Linien der Asymptote parallel sein. Es fallen endlich, in dem Falle einer sechspunctigen Osculation alle drei geraden Linien in die Asymptote P zusammen, wonach die Curve nothwendig auf dieser Asymptote einen Wendungspunct haben muss, in welchem Q die Tangente ist.

Die in dem Vorstehenden gewonnenen Resultate stellen sich als Modificationen derjenigen dar, die sich auf die analogen Fälle, dass die Osculation in einem gegebenen, nicht unend-

*) Den angezeigten geometrischen Voraussetzungen entspricht, für eine dreifache Osculation, die nachstehende Form:

$$(pr+\lambda)q + \mu p(p+\alpha)s = o,$$

welche, wenn wir die beiden überzähligen Constanten der Hyperbel abrechnen, die gerade nothwendige Anzahl von Constanten einschliesst. Dieses ist daraus schon klar, dass sobald die Curve und die osculirende Hyperbel gegeben sind, die Construction der, den übrigen Functionen entsprechenden, geraden Linien keine Willkührlichkeit mehr zulässt. Nur können, im Allgemeinen auf dreifache, und immer einmal auf reelle Weise, zwei gerade Linien so gezogen werden, dass eine derselben zwei der drei nicht unendlich weit liegenden Durchschnittspuncte von Curve und Hyperbel, von denen einer nothwendig reell ist, verbindet, und die andere durch den dritten Punct parallel mit P geht: deshalb können wir zwar immer die letzte Gleichung der 52. Nummer durch die vorstehende ersetzen, aber im Allgemeinen auf dreifache Weise, und die Constanten-Bestimmung der vorstehenden durch jene, setzt die Auflösung einer Gleichung des dritten Grades voraus.

Diese mehrfache Constanten-Bestimmung fällt fort, wenn wir, bei einer vierpunctigen Osculation, $\alpha = o$ setzen. Dann kann die Linie S nur eine einzige sein.

lich weit entfernten Puncte Statt findet, dar, doch es würde uns von unserm Wege zu weit abführen, wenn wir in Erörterungen hierüber eingehen wollten. Es bietet sich uns überdiess eine Reihe von Aufgaben, die den drei oben behandelten ähnlich sind, dar; aber auch diese können hier keine Stelle finden. —

58. Wir wollen auch noch die Curven der vierten Ordnung als Beispiel nehmen, aber ohne in irgend eine Construction einzugehen. Hier entsprechen einer, die Curve, auf der Asymptote P, drei-, vier-, fünf-, sechs-, sieben- und achtpunctig osculirenden Hyperbel, bezüglich die nachstehenden sechs Formen:

$$(pr+\lambda)\Omega_2 + \mu p[(p+\alpha)uv + \sigma w] = o, \quad (1)$$
$$(pr+\lambda)\Omega_2 + \mu p^2\Omega'_2 = o, \quad (2)$$
$$(pr+\lambda)\Omega_2 + \mu p^2[(p+\alpha)u + \sigma] = o, \quad (3)$$
$$(pr+\lambda)\Omega_2 + \mu p^3 u = o, \quad (4)$$
$$(pr+\lambda)\Omega_2 + \mu p^3(p+\alpha) = o, \quad (5)$$
$$(pr+\lambda)\Omega_2 + \mu p^4 = o. \quad (6)$$

Die Form der Gleichung (1) ändert sich nicht, wenn wir Ω_2 mit $(\Omega_2 + \varkappa pq)$ vertauschen, hiernach können wir die Anzahl der Constanten in dieser Gleichung, durch Fortschaffen dreier derselben, auf 16 reduciren. Die Gleichungen (2) und (3) behalten ihre Form, wenn wir Ω_2 mit $(\Omega_2 + \varkappa p^2)$ vertauschen, dadurch lässt sich die Anzahl ihrer Constanten um Eins, also bezüglich auf 15 und 14 reduciren. Nach diesen Reductionen behalten die beiden Gleichungen (1) und (2) bezüglich noch zwei und eine überzählige Constante, und diese kommen auf die Unbestimmtheit, welche die Bedingung einer drei- und vierpunctigen Osculation der Hyperbel noch einschliesst. In der Gleichung (3) hat sich die Anzahl der Constanten auf die gerade nothwendige reducirt. Den Gleichungen (4), (5) und (6) fehlen an der allgemeinen Anzahl bezüglich eine, zwei und drei Constanten, wodurch die, der Bedingung einer mehr als fünfpunctigen Osculation entsprechenden, Particularisationen in der Natur der gegebenen Curve vierter Ordnung angezeigt werden. Diese ergeben sich sogleich.

Durch die Gleichung
$$\Omega_2 = o$$
wird ein Kegelschnitt dargestellt, welcher durch die beiden Durchschnittspuncte der gegebenen Curve vierter Ordnung mit ihrer Asymptote P geht: weil die obigen Gleichungen dieser Curve alle befriedigt werden, wenn Ω_2 und p zugleich verschwinden. Uebrigens steht, in dem Falle der Gleichung (1), dieser Kegelschnitt in keiner weitern besondern Beziehung zur Curve. In den Fällen der Gleichungen (2) und (3), in denen, wenn Ω_2 verschwindet, p^2 als Factor in Evidenz tritt, kann der Kegelschnitt jeder beliebige sein, welcher die Curve in ihren beiden Durchschnittspuncten mit ihrer Asymptote P berührt. Insbesondere kann er auch in ein System von zwei Tangenten der Curve ausarten, wonach die Gleichung (3) ihre einzige überzählige Constante verliert, indem sie folgende Form annimmt:
$$(pr+\lambda)qs + \mu p^2[(p+\alpha)u + \sigma] = o. \text{ *)}$$

*) Nach den Betrachtungsweisen der Note zur 57. Nummer, können wir die drei Gleichungen (1), (2) und (3) auch durch die folgenden ersetzen:
$$(pr+\lambda)\Omega_2 + \mu p(p+\alpha)uv = o,$$
$$(pr+\lambda)\Omega_2 + \mu p^2 uv = o,$$
$$(pr+\lambda\ \Omega_2 + \mu p^2(p+\alpha)u = o,$$
welche, abgesehen von den willkührlichen Constanten der osculirenden Hyperbel in den beiden ersten Gleichungen, wie die Gleichungen (4), (5) und (6) keine überzähligen Constanten haben. Nur lässt sich ein und dieselbe Curve, während die in Evidenz tretende osculirende Hyperbel dieselbe bleibt, auf fünfzehnmalige Weise durch eine Gleichung von der ersten, und auf dreimalige Weise durch eine Gleichung von der zweiten, wie auch von der dritten Form ausdrücken.

Ueberhaupt erhalten wir, wenn wir in der Gleichung einer Curve der n. Ordnung eine $2m$punctig

In den Fällen der Gleichungen (4), (5) und (6), welche auf eine mehr als fünfpunctige Osculation sich beziehen, ist durch die gegebene Curve der fragliche Kegelschnitt nicht nur vollkommen bestimmt, sondern zugleich durch seine Beziehung zur Curve die Particularisation dieser letztern gegeben. In den beiden Gleichungen (4) und (5) erscheint nach dem Verschwinden von Ω_2 als Factor p^3. Die Curve wird also in ihren beiden Durchschnittspuncten mit ihrer Asymptote P von dem Kegelschnitte Ω_2 dreipunctig osculirt. Dieser Kegelschnitt schneidet die gegebene Curve ausserdem nur noch in zwei Puncten; diejenige gerade Linie, welche durch diese beiden Puncte sich legen lässt ist, in dem Falle der Gleichung (5), überdiess noch der Asymptote P parallel. In dem Falle der Gleichung (6) endlich, welche, wenn Ω_2 verschwindet, auf p^4 sich reducirt, particularisirt sich die gegebene Curve so weit, dass sie in jedem ihrer beiden Durchschnitte mit der Asymptote P, von ein und demselben Kegelschnitte Ω_2 vierpunctig osculirt wird.

59. Es ist offenbar, dass Singularitäten in dem Laufe eines Zweiges einer continuirlichen Curve (einer solchen Curve, welche durch eine einzige Gleichung dargestellt wird) in dem Laufe anderer Zweige derselben Curve Singularitäten hervorrufen können. Diess geschieht auch dann noch, wenn eine solche Singularität für unendlich weit entfernte Puncte Statt findet, welche, während sie alsdann im absoluten Sinne nicht existirt, dennoch ihre Spur den endlichen Zweigen der Curve aufdrückt. Das ist der Fall der letzten geometrischen Beziehungen der vorigen Nummer.

Es liegt unmittelbar in der Form der folgenden Gleichung,

$$\Omega_2\, \Omega'_2 + \mu p^3 s = o,$$

weil diese Gleichung mehr als vierzehn, das heisst mehr als die nothwendige Anzahl von einander unabhängiger Constanten enthält, der Satz — dass, wenn eine Curve der vierten Ordnung in irgend zwei ihrer Puncte von demselben Kegelschnitte dreipunctig osculirt wird, es immer einen zweiten Kegelschnitt gibt, von welchem sie ebenfalls in zwei Puncten dreipunctig osculirt wird, in der Art, dass die vier Osculationspuncte in gerader Linie liegen. Wenn die beiden Osculationspuncte auf einem der beiden Kegelschnitte zusammenfallen, so osculirt dieser die gegebene Curve sechspunctig und diejenige gerade Linie, welche die ursprünglichen beiden Osculationspuncte verbindet, ist nun die gemeinschaftliche Tangente von Curve und Kegelschnitt im Osculationspuncte der höhern Ordnung. Diese Tangente ist nur eine gewöhnliche der gegebenen Curve, es haben sich in dem Berührungspuncte auf denselben nur die zwei frühern Durchschnittspuncte vereinigt; sie schneidet also die Curve noch in zwei Puncten, und in jedem dieser beiden Puncte wird dieselbe von ein und demselben Kegelschnitte immer noch dreipunctig osculirt. Rückt der Osculationspunct höherer Ordnung auf der Tangente immer weiter, so besteht, während diese zur Asymptote wird, die letzte Beziehung immer noch fort. Wir begnügen uns hier mit dieser blossen Andeutung. —

60. Wir wollen auch noch in unendlicher Entfernung osculirende Curven der d r i t t e n Ordnung betrachten, weil hierbei neue Beziehungen zur Sprache kommen, die bei der Entwicklung der allgemeinen Gesetze, nach welchen Curven überhaupt sich osculiren, nicht ausser Acht gelassen werden dürfen.

Zwei Curven dritter Ordnung, welche eine gemeinschaftliche Asymptote P und auf dieser in unendlicher Entfernung einen fünfpunctigen Contact haben, werden beide von ein und

---

und $(2m+1)$punctig auf einer Asymptote P osculirende Hyperbel in Evidenz treten lassen, die folgenden Formen

$$(pr+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu p^m \Theta_{n-m} = o,$$
$$(pr+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu p^m (p+\alpha)\Theta_{n-m-1} = o,$$

Die Constanten sind in diesen Gleichungen in der gerade nothwendigen Anzahl vorhanden, können aber nicht auf lineare Weise bestimmt werden, so lange $m < n-1$.

derselben Hyperbel fünfpunctig osculirt. Hiernach können wir zwei solche Curven durch die folgenden beiden Gleichungen:

$$(pr+\lambda)q + \mu p^2(p+\alpha) = o, \tag{1}$$

$$(pr+\lambda)q' + \mu' p^2(p+\alpha') = o, \tag{2}$$

darstellen, wobei die Gleichung der genannten Hyperbel die nachstehende ist:

$$pr + \lambda = o. \tag{3}$$

Wenn wir die Gleichungen der beiden Curven von einander abziehen, nachdem wir zuvor die erste derselben mit q' und die zweite mit q multiplicirt haben, so kommt, nach Fortlassung des gemeinschaftlichen Factors p^2:

$$\mu(p+\alpha)q' = \mu'(p+\alpha')q. \tag{4}$$

Diese Gleichung stellt eine Curve dar, welche alle Durchschnitte des Systems der Curve (1) und der Linie Q' mit dem Systeme der Curve (2) und der Linie Q enthält, mit Ausnahme derjenigen acht, welche auf der Asymptote P liegen. Die Anzahl dieser Durchschnitte beträgt noch acht. Unter diesen acht Puncten befinden sich der Durchschnitt von Q und Q', der Durchschnitt von Q' mit der Curve (1) auf der geraden Linie $(p+\alpha'=o)$, der Durchschnitt von Q mit der Curve (2) auf der geraden Linie $(p+\alpha=o)$. Die übrigen Durchschnitte sind die Durchschnitte der beiden Curven (1) und (2) unter sich. Von den beiden ersten Durchschnitten abstrahiren wir, wenn wir die Gleichungen (4) und (1) zusammenstellen, in der Art, dass, wenn wir diese beiden Gleichungen zur Bestimmung der Durchschnittspuncte der beiden Curven (1) und (2) anwenden, wir als einzigen fremden Punct den Durchschnitt von Q mit der Curve (1) auf der geraden Linie $(p+\alpha=o)$ erhalten. Da die Gleichung (4) eine Hyperbel darstellt, deren eine Asymptote mit der den beiden Curven (1) und (2) gemeinschaftlichen Asymptote P parallel ist, so erhalten wir im Ganzen hier nur fünf Durchschnitte, weil der sechste nach der Richtung dieser Asymptote unendlich weit liegt und also schneiden sich die beiden Curven dritter Ordnung ausser auf P, nur noch in vier Puncten, wodurch die für die Gleichungen dieser Curven angenommene Form unmittelbar bestätigt wird. Wenn diese vier Durchschnittspuncte nach einander mit dem Osculationspuncte auf der Asymptote P sich vereinigen, so steigt die Ordnung des Contactes von einem fünfpunctigen allmählig bis zu einem neunpunctigen.

Wenn der Contact ein sechspunctiger werden soll, so muss die Hyperbel (4) eine Asymptote haben die, statt mit der geraden Linie P bloss parallel zu sein, mit dieser Linie zusammenfällt. Diess erfordert:

$$\mu\alpha = \mu'\alpha'. \tag{5}$$

Das ist also die Bedingung einer sechspunctigen Osculation.

Um weiter zu particularisiren, wollen wir

$$q' \equiv q + \beta p + \gamma,$$

$$r \equiv q + \delta p + \varepsilon,$$

setzen, wonach sich die Gleichungen (3) und (4), wenn wir, was die letztere Gleichung betrifft, auf die letzte Bedingungs-Gleichung Rücksicht nehmen, in die folgenden beiden:

$$p[q+\delta p+\varepsilon] + \lambda = o,$$

$$p[q+\frac{\mu\beta}{\mu-\mu'} \cdot p + \frac{\mu(\gamma+\alpha\beta)}{\mu-\mu'}] + \frac{\mu\alpha\gamma}{\mu-\mu'} = o,$$

verwandeln. In dem Falle eines sechspunctigen Contactes, haben die beiden, durch diese Gleichungen dargestellten Hyperbeln eine gemeinschaftliche Asymptote. In dem Falle eines siebenpunctigen Contactes der beiden Curven (1) und (2), hat die zweite Hyperbel mit jeder dieser beiden Curven auf derselben Asymptote P einen dreipunctigen Contact, und folglich auch mit der ersten Hyperbel, welche dieselben Curven fünfpunctig osculirt. Diess erfordert

$$\lambda = \frac{\mu\alpha\gamma}{\mu-\mu'}. \tag{6}$$

In dem Falle eines achtpunctigen Contactes müssen aus gleichem Grunde die beiden fraglichen Hyperbeln unter einander einen vierpunctigen Contact auf der Asymptote P haben; diess gibt die neue Bedingungs-Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\mu(\gamma+\alpha\beta)}{\mu-\mu'}. \tag{7}$$

Wenn endlich der Contact ein neunpunctiger und mithin von der höchsten Ordnung sein soll, so müssen die beiden Hyperbeln, damit sie in unendlicher Entfernung auf der Asymptote P fünf Puncte unter einander und mit den Curven (1) und (2) gemein haben, ganz und gar zusammenfallen. Hiernach ergibt sich endlich noch

$$\delta = \frac{\mu\beta}{\mu-\mu'}. \tag{8}$$

Wenn wir also die durch die Gleichung (1) dargestellte Curve dritter Ordnung und mithin die Functionen p, q, r und die Coefficienten λ, μ, α, als gegeben betrachten, so können wir nach dem Vorstehenden die Gleichung (2) mit den vier unbestimmten Coefficienten μ', α', β und γ als die allgemeine Gleichung aller derjenigen Curven dritter Ordnung ansehen, welche mit der gegebenen auf der Asymptote P in unendlicher Entfernung einen fünfpunctigen Contact haben. Für einen sechspunctigen Contact bestimmt sich alsdann der Werth von $\mu'\alpha'$ oder der Coefficient von p^2 durch die Gleichung (5). Die beiden neuen Bedingungen eines siebenpunctigen Contactes enthalten die Gleichungen (5) und (6); die drei neuen Bedingungen eines achtpunctigen Contactes die Gleichungen (5), (6) und (7). Wenn wir die beiden letztgenannten Gleichungen gliedweise in einander dividiren, ergibt sich:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\alpha}.$$

Nach der ersten der beiden obigen identischen Gleichungen ist $\frac{\beta}{\gamma}$ der mit entgegengesetztem Zeichen genommene reciproke Werth von p für den Durchschnittspunct der Linie Q' mit der Linie Q. Da dieser Werth durch die vorstehende Gleichung gegeben ist, ist der fragliche Durchschnitt ein fester Punct. Also:

Alle Curven der dritten Ordnung, welche eine gemeinschaftliche Asymptote und auf dieser in unendlicher Entfernung einen achtpunctigen Contact haben, schneiden die gemeinschaftliche Asymptote so, dass die Tangenten in den verschiedenen Durchschnittspuncten in einem festen Puncte sich vereinigen.

Wenn der Contact bis zu einem neunpunctigen ansteigt, so werden die Bedingungs-Gleichungen (5)—(8) befriedigt. Da aber, wenn wir die Gleichungen (6), (7) und (8) addiren, nachdem wir die zweite derselben mit $(-\alpha)$ und die dritte mit α^2 multiplicirt haben, die folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\lambda - \alpha\varepsilon + \alpha^2\delta = 0 \tag{9}$$

zwischen den Constanten der ursprünglichen Gleichung (1) sich ergibt, so sind die vorgenannten vier Bedingungs-Gleichungen zur Bestimmung der vier unbestimmten Coefficienten der Gleichung (2) unzulänglich. Indem die Gleichung (8) oder statt derselben die vorstehende Gleichung zu den Bedingungs-Gleichungen für einen achtpunctigen Contact hinzukommt, wird bloss eine solche Particularisation der gegebenen Curve ausgedrückt, bei der allein die Ordnung des Contactes zu der höchstmöglichen überhaupt ansteigen kann. Dann werden die unendlich vielen achtpunctig osculirenden Curven dritter Ordnung durch unendlich viele neunpunctig osculirende ersetzt, und im eigentlichen Sinne gibt es dann keine achtpunctig osculirenden Curven der dritten Ordnung.

Zu der geometrischen Deutung der letzten Bedingungs-Gleichung (9) werden wir unmittelbar durch die Betrachtungen der folgenden Nummer geführt werden.

61. Der Umstand, dass wir, bei der Bestimmung der Durchschnittspuncte der beiden Curven (1) und (2), durch die Zusammenstellung der Gleichungen (1) und (4), nothwendig einen fremden Punct erhalten, führt uns zu einer Gruppe bemerkenswerther Constructionen. Wir wollen hier die erste Curve als gegeben betrachten, alsdann ergibt sich der fremde Punct, den wir in dem Nachstehenden M nennen wollen, ohne Mühe sogleich als derjenige Punct, in welchem die gerade Linie Q, die Tangente der Curve in ihrem Durchschnitte mit der Asymptote P, dieser Curve zum zweiten Male begegnet.

Bei einem achtpunctigen Contacte wird die Curve (1) von der Hyperbel (4) vierpunctig osculirt und ausserdem noch in zwei Puncten geschnitten und von diesen beiden Puncten ist M der eine. Aber diese vierpunctig osculirende Hyperbel ist dadurch vollkommen bestimmt, dass sie überdiess durch diesen Punct M geht. Ihr zweiter Durchschnitt mit der Curve (1), welcher zugleich auf allen Curven (2) liegt, ist also auch bestimmt und seine Construction leicht.

Alle Curven der dritten Ordnung, welche eine gegebene auf einer gegebenen Asymptote achtpunctig osculiren, schneiden sich ausserdem in einem festen leicht zu construirenden Puncte.

Dieser Satz ist nur eine Particularisation des allgemeinen Satzes, dass alle solche Curven der dritten Ordnung, welche durch acht gegebene Puncte gehen, ausserdem auch noch in einem festen neunten Puncte sich schneiden; und bietet ein neues Beispiel dar, wie Relationen des Unendlichen Bestimmungen im Endlichen hervorrufen.

Der feste Punct des letzten Satzes fällt, im Allgemeinen, nicht mit dem Osculationspuncte zusammen; soll er es thun, so muss der Punct M derjenige einzige Punct sein, in welchem die gegebene Curve (1) von der sie fünfpunctig osculirenden Hyperbel geschnitten wird. Im Allgemeinen ist aber dieser einzige Punct, derjenige in welchem die durch M, parallel mit P gezogene gerade Linie die Curve zum zweiten Male schneidet, und fällt also nur dann mit dem Puncte M zusammen, wenn diese gerade Linie, welche durch die Gleichung

$$p + \alpha = 0$$

dargestellt wird, die gegebene Curve in eben diesem Puncte M berührt. Soll diese Berührung Statt finden, so muss der erste Theil der Gleichung (1) auf q^2 sich reduciren, wenn wir $(-\alpha)$ für p in dieselbe einsetzen, was nur dann geschieht, wenn

$$\lambda - \alpha\varepsilon + \alpha^2\delta = 0.$$

Diese Gleichung ist aber dieselbe zu welcher wir schon am Ende der vorigen Nummer gekommen sind.

Damit also eine gegebene Curve dritter Ordnung auf einer gegebenen Asymptote einen neunpunctigen Contact haben könne, muss sie von der Art sein, dass sie von ihrer Tangente in ihrem Durchschnitte mit der gegebenen Asymptote überdiess noch in einem solchen Puncte geschnitten wird, in welchem die Tangente der Asymptote parallel ist.

62. Auf demselben Wege, wie wir zu dem Satze der vorigen Nummer gekommen sind, ergibt sich auch der folgende allgemeinere Satz.

Alle Curven der dritten Ordnung, welche eine gegebene Curve dieser Ordnung auf einer gegebenen Asymptote $(8-g)$punctig osculiren und überdiess in g auf derselben willkührlich angenommenen Puncten schneiden, haben mit der gegebenen Curve auch überdiess noch einen festen Punct gemein.

Um diesen festen Punct zu construiren, brauchen wir bloss durch die g willkührlich

angenommenen Puncte und durch den, in der vorigen Nummer M genannten Punct diejenige Hyperbel zu legen, welche die gegebene Curve, auf ihrer Asymptote P, $(4-g)$punctig osculirt. Diese Hyperbel schneidet die gegebene Curve ausserdem nur noch in dem zu construirenden Puncte.

Den analytischen Entwicklungen der 60. Nummer zufolge, können wir g von Null bis 3 wachsen lassen. Für $g = 0$, hat die obengenannte Hyperbel nur noch eine mit P parallele Asymptote. Wir können den Satz auch noch auf den Fall, dass $g = 4$, ausdehnen; dem entspräche, dass wir, statt der beiden Gleichungen (1) und (2), Gleichungen von folgender Form

$$(pr+\lambda)q + \mu p^2 s = 0$$

auf gleiche Weise behandelt hätten. Die fragliche Hyperbel ist alsdann irgend ein Kegelschnitt, und dieser dadurch vollkommen bestimmt, dass er durch die vier willkührlich angenommenen Puncte und überdiess durch den Punct M geht.

Aber alle diese Sätze erhalten erst dann ihre richtige Stelle, wenn wir von den allgemeinsten Formen ausgehen, welche zu einer Gleichung von der Form der Gleichung (4) führen. Die folgenden beiden Gleichungen, in denen p^2 durch eine beliebige Function des zweiten Grades ersetzt worden ist, haben diese Form:

$$\Omega_2 q + \mu \Omega_2^0 s = 0, \tag{10}$$

$$\Omega_2 q' + \mu' \Omega_2^0 s' = 0, \tag{11}$$

denn aus ihnen ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\mu s q' = \mu' s' q. \tag{12}$$

Der durch diese letzte Gleichung dargestellte Kegelschnitt schneidet die Curve (10) in sechs Puncten. Unter diesen befinden sich fünf Durchschnittspuncte der beiden Curven (10) und (11), nemlich alle Durchschnittspuncte dieser Curven mit Ausnahme derjenigen vier, welche zugleich auf den beiden Kegelschnitten Ω_2 und Ω_2^0 liegen, während der sechste Punct ein fremder Punct M, der Durchschnitt der beiden geraden Linien Q und S ist.

Wenn hiernach die Curve (10) gegeben ist, so können wir durch vier, willkührlich auf ihrem Umfange angenommene Puncte zwei willkührliche Kegelschnitte (zum Behuf der später angezeigten Constructionen am bequemsten zwei Systeme von zwei geraden Linien) legen, und dadurch die beiden Functionen Ω_n und Ω_2^0 bestimmen. Der erste Kegelschnitt schneidet die gegebene Curve noch in zwei Puncten, die gerade Linie S, welche diese beiden Puncte verbindet, bestimmt die Function s. Der zweite Kegelschnitt Ω_2^0 schneidet die gegebene Curve ebenfalls noch in zwei Puncten; die gerade Linie Q, welche diese beiden Puncte verbindet, bestimmt die Function q. Der Punct M ist hiernach, als der Durchschnitt von Q und S, auf lineare Weise bestimmt.

Die zweite Curve dieser Ordnung ist, nach der Form ihrer Gleichung, bloss der Bedingung unterworfen, dass sie ebenfalls durch diejenigen vier Puncte geht, in welchen die beiden Kegelschnitte Ω_2 und Ω_2^0 auf der gegebenen Curve sich schneiden. Ausserdem schneiden sich die beiden Curven noch in fünf Puncten, durch welche auch der neue Kegelschnitt (12) geht. Sind aber von diesen fünf Puncten vier gegeben, so ist dadurch dieser Kegelschnitt schon vollkommen bestimmt, weil derselbe überdiess auch noch durch den Punct M geht. Es ist also auch der sechste Durchschnitt dieses Kegelschnittes mit der gegebenen Curve, oder der neunte dieser Curve mit der Curve (11) wie mit jeder andern derselben Ordnung, welche durch dieselben acht ersten Puncte geht, auf lineare Weise bestimmt.

In dem Vorstehenden ist die Construction der nachstehenden Aufgabe enthalten.

Wenn auf einer gegebenen Curve der dritten Ordnung acht Puncte willkührlich angenommen worden sind, denjenigen neunten Punct zu bestimmen, in welchen die gegebene Curve von allen andern Curven

derselben Ordnung, welche durch die acht willkührlich angenommenen Puncte gehen, geschnitten wird. —

63. Nachdem wir in dem Vorhergehenden ausführlich den Lauf eines Zweiges irgend einer gegebenen Curve, welcher an einer Asymptote immer weiter sich hinzieht, durch Hyperbeln mit steigender Ordnung der Annäherung dargestellt und bestimmt haben, wollen wir nun unsere Aufmerksamkeit auch kurz noch darauf richten, wie der Lauf der verschiedenen unendlichen Zweige ein und derselben Curve in gegenseitiger Abhängigkeit steht. Zuvörderst wollen wir ein paar Einzelnheiten hervorheben und dann die allgemeinen Gesetze andeuten. Wir erhalten das vollständige Verständniss des Einzelnen erst dann, wenn wir sehen, nach welchen Seiten hin dasselbe sich verallgemeinert.

64. *Wenn eine gegebene Curve der n. Ordnung $(n-2)$ dreipunctig osculirende Asymptoten hat, so ist das Maass der Annäherung der Curve an ihre beiden übrigen Asymptoten dasselbe.*

Dieser Satz ist für den Fall, dass $n=3$, an einem andern Orte schon bewiesen worden.*) In dem allgemeinen Falle hat, der gemachten Voraussetzung zufolge, die Gleichung der Curve die nachstehende Form mit überzähligen Constanten:

$$pq\Theta_{n-2}+\mu\Theta_{n-2}+\nu\Omega_{n-3}=0.$$

Denn der erste Theil dieser Gleichung reducirt sich, wenn wir nach einander jeden der $(n-2)$ linearen Factoren der Function Θ_{n-2} gleich Null setzen, auf den $(n-3)$. Grad, aber auch auf den $(n-2)$. Grad, wenn p oder q verschwindet, wonach die den letztgenannten beiden Functionen entsprechenden geraden Linien P und Q als die beiden einzigen nicht osculirenden Asymptoten in Evidenz treten. Schreiben wir die vorstehende Gleichung unter folgender Form:

$$(pq+\mu)\Theta_{n-2}+\nu\Omega_{n-3}=0,$$

so springt in die Augen, dass die durch die Gleichung

$$(pq+\mu)=0$$

dargestellte Hyperbel, welche ebenfalls die beiden geraden Linien P und Q zu ihren Asymptoten hat, diese Curve nur in $2(n-3)$, auf der Curve Ω_{n-3} liegenden, Puncten schneidet und also sechs Durchschnittspuncte, die paarweise immer, als auf drei geraden Linien liegend, betrachtet werden können, mit diesen geraden Linien unendlich weit gerückt sind. Diese Hyperbel hat also mit der gegebenen Curve auf jeder der beiden Asymptoten einen dreipunctigen Contact, und also ist durch sie das Maass der Annäherung an beide Asymptoten zugleich bestimmt und diese Annäherung folglich dieselbe.

65. Der folgende Satz ist auch schon an einem andern Orte bewiesen worden.**)

Die gemeinschaftlichen drei Mittelpuncte derjenigen drei Gruppen von Hyperbeln, welche mit einer gegebenen Curve dritter Ordnung auf den drei Asymptoten derselben in unendlicher Entfernung einen vierpunctigen Contact haben, liegen auf diesen drei Asymptoten in gerader Linie.

Diesem Satze wird seine Stelle durch den folgenden und allgemeinern angewiesen.

Wenn eine Curve der n. Ordnung $(n-3)$ vier- oder mehrpunctig osculirende Asymptoten hat, so liegen die gemeinschaftlichen drei Mittelpuncte derjenigen drei Gruppen von Hyperbeln, welche die Curve auf den drei übrigen Asymptoten der Curve vierpunctig osculiren, auf diesen drei Asymptoten in gerader Linie.

---

*) System. Dritter Abschnitt. 175. **) Ebendas. 178.

Der gemachten Voraussetzung zufolge hat die Gleichung der gegebenen Curve die folgende Form mit der gerade nothwendigen Anzahl von Constanten:

$$pqr\Theta_{n-3} + \mu s\Theta_{n-3} + \nu\Omega_{n-4} = o,$$

in welcher P, Q und R als die drei einzigen, nicht vierpunctig osculirenden und im Allgemeinen gewöhnlichen, Asymptoten in Evidenz treten. Schreiben wir diese Gleichung auf folgende Weise:

$$(pqr+\mu s)\Theta_{n-3} + \nu\Omega_{n-4} = o,$$

so ist gleich ersichtlich, dass die durch die Gleichung

$$pqr + \mu s = o$$

dargestellte Curve dritter Ordnung die gegebene Curve nur in $3(n-4)$ Puncten schneidet, welche zugleich auf der Curve Ω_{n-4} liegen. Es sind also zwölf Durchschnittspuncte dieser und der gegebenen Curve unendlich weit gerückt, und sind in ihrer unendlichen Entfernung als auf vier, selbst unendlich weit entfernten geraden Linien liegend zu betrachten. Es haben also die beiden Curven auf jeder der drei geraden Linien P, Q und R, welche ihre gemeinschaftlichen, im Allgemeinen nicht osculirenden, Asymptoten sind, einen vierpunctigen Contact. Sie werden hiernach von denselben Hyperbeln auf jeder dieser drei Asymptoten vierpunctig osculirt und folglich liegen die Mittelpuncte der drei Gruppen von Hyperbeln, nach dem an die Spitze dieser Nummer gestellten Satze, auf den drei Asymptoten in gerader Linie.

66. Es ist wiederum der Satz der 9. Nummer, welcher die Sätze der beiden vorhergehenden Nummern und die Verallgemeinerung dieser Sätze unter demselben Gesichtspuncte vereinigt.

Wenn die n Asymptoten einer Curve der n. Ordnung gegeben sind, so wird diese Curve dadurch der Bedingung unterworfen, dass sie durch $2n$ Puncte geht, die, obgleich unendlich weit liegend, vollkommen bestimmt und als die Durchschnitte der gegebenen n Asymptoten mit zwei gegebenen aber unendlich weit gerückten geraden Linien zu betrachten sind. Wenn überdiess noch das Maass der Annäherung an $(n-1)$ dieser Asymptoten, oder, mit andern Worten, nach der Richtung jeder dieser Asymptoten (aber darum noch nicht auf diesen Asymptoten selbst) ein dritter unendlich weit entfernter Punct gegeben ist, so sind die $(n-1)$ gegebenen neuen Puncte als einer dritten unendlich weit entfernten geraden Linie angehörig zu betrachten. Also liegt, weil die zu bestimmende Curve durch $(3n-1)$ Puncte eines Systems von drei unendlich weit entfernten, und eine Curve dritter Ordnung vertretenden, geraden Linien geht, auch noch ein $3n$. Punct auf der dritten unendlich weit entfernten geraden Linie und also selbst, nach der Richtung der n. Asymptote, unendlich weit. Dieser hiernach als vollkommen bestimmt zu betrachtende Punct ist der dritte, welcher nach der Richtung der letztgenannten Asymptote unendlich weit liegt. Folglich ist, dadurch, dass das Maass der Annäherung der Curve an $(n-1)$ ihrer Asymptoten gegeben ist, das Maass der Annäherung an die n. Asymptote vollkommen bestimmt.

Wenn die n Asymptoten einer Curve n. Ordnung, das Maass der Annäherung an $(n-1)$ dieser Asymptoten, und auf $(n-2)$ von diesen die Mittelpuncte der vierpunctig osculirenden Hyperbeln, so sind im Ganzen $(4n-3)$ unendlich weit entfernt liegende Puncte der Curve gegeben, von welcher n auf jeder von zwei, $(n-1)$ auf einer dritten und $(n-2)$ auf einer vierten gegebenen unendlich weit entfernten geraden Linie liegen. Das System dieser vier geraden Linien wird von der fraglichen Curve der n. Ordnung weil sie durch jene $(4n-3)$ Puncte geht, auch noch in drei andern Puncten geschnitten, von welchen einer auf der dritten und zwei auf der vierten der vier unendlich weit entfernten geraden Linien liegen. Wenn also das Maass der Annäherung an $(n-1)$ Asymptoten und dadurch das Maass der Annäherung an die n. Asymptote gegeben ist, so sind, wenn überdiess auf $(n-2)$ Asymptoten die Mit-

telpuncte der vierpunctig osculirenden Hyperbeln gegeben sind, dadurch die Mittelpuncte der vierpunctig osculirenden Hyperbeln auf den beiden übrigen Asymptoten vollkommen bestimmt.

Wir sehen aus dem Vorstehenden, dass die Bestimmung des Maasses der Annäherung einer Curve der n. Ordnung an ihre n Asymptoten von $(3n-1)$, die Bestimmung von n in unendlicher Entfernung vierpunctig osculirender Hyperbeln von $(4n-3)$ Constanten abhängt. Indem wir auf dem eingeschlagenen Wege weiter gehen, ist klar, dass überhaupt, zur Bestimmung von $n$mal m nach n gegebenen Richtungen unendlich weit liegenden Puncten, durch welche die n unendlichen Zweige einer Curve der n. Ordnung gehen sollen

$$mn - \left(\frac{n(n-3)}{2} + 1\right)$$

Constante hinreichend und nothwendig sind. Oder, mit andern Worten, durch eine solche Anzahl von Constanten lassen sich n Curven (wenn $m<6$ immer n Hyperbeln) welche die n unendlichen Zweige der Curve $m$punctig osculiren, bestimmen.

67. Wenn wir, in Gemässheit der 24. Nummer, die Form

$$\Omega_n \equiv \Theta_n + \mu\Theta_{n-2} + \nu\Omega_{n-4}$$

zu Grunde legen und dann $\qquad \Theta_n + \mu\Theta_{n-2} \equiv \Omega'_n$

setzen, ergibt sich $\qquad \Omega_n - \Omega'_n \equiv \nu\Omega_{n-4},$

woraus ersichtlich ist, dass die beiden Curven der n. Ordnung Ω_n und Ω'_n sich nur in $n(n-4)$ Puncten, welche auf der Curve Ω_{n-4} liegen, schneiden, weil $4n$ Puncte auf vier geraden Linien, zugleich mit diesen, unendlich weit liegen, oder, mit andern Worten, dass die asymptotischen Zweige der beiden Curven der n. Ordnung, paarweise, sich in unendlicher Entfernung vierpunctig osculiren. Die Anzahl der Constanten der Function Ω'_n beträgt, indem wir ausser der Constanten μ auf jede lineare Function zwei Constante rechnen, $(4n-3)$, also, nach der vorigen Nummer, gerade so viel, als Constante nothwendig sind, um n Curven (insbesondere Hyperbeln) zu bestimmen, welche an den n Asymptoten der Curve Ω_n sich hinziehen, und auf diesen Asymptoten mit der letztgenannten Curve einen vierpunctigen Contact haben. Wir gelangen hiernach zu der Folgerung, dass, während durch das erste Glied Θ_n, in der Entwicklung der Function Ω_n, die n Asymptoten der bezüglichen Curve, oder, mit andern Worten, auf jedem der n unendlichen Zweige der Curve in unendlicher Entfernung zwei Puncte gegeben sind, durch die beiden ersten Glieder dieser Entwicklung, Θ_n und $\mu\Theta_{n-2}$, auf jedem jener n Zweige vier unendlich weit entfernte Puncte der Curve, welche sich am einfachsten durch n (diese Curve vierpunctig osculirende) Hyperbeln bestimmen lassen, gegeben sind.

Wenn wir weiter gehen und noch ein drittes Glied in der Entwicklung von Ω_n in Evidenz bringen, indem wir

$$\Omega_n \equiv \Theta_n + \mu\Theta_{n-2} + \nu\Theta_{n-4} + \varrho\Omega_{n-6}$$

setzen, so folgt auf gleiche Weise als oben, dass die durch die nachstehende Gleichung:

$$\Omega''_n \equiv \Theta_n + \mu\Theta_{n-2} + \nu\Theta_{n-4} = 0,$$

dargestellte neue Curve der n. Ordnung solche n unendliche Zweige hat, welche bezüglich die n unendlichen Zweige der Curve Ω_n sechspunctig osculiren. Diese neue Curve hängt von gerade so vielen Constanten ab, als nach der vorigen Nummer zur Bestimmung von sechs auf jedem der n unendlichen Zweige der Curve Ω_n unendlich weit entfernt liegenden Puncte nothwendig sind, nemlich von $(6n-10)$. Hiernach sind also durch die drei ersten Glieder der Entwicklung der Function Ω_n, auf jedem der n asymptotischen Zweige der Curve Ω_n, in unendlicher Entfernung sechs Puncte gegeben.

Verfolgen wir den eingeschlagenen Weg weiter, so gelangen wir zu dem nachstehenden Satze.

Wenn wir die Gleichung einer Curve der n. Ordnung, was im Allgemeinen immer und nur auf einzige Weise möglich ist, in folgende Form entwickeln:

$$\Theta_n + \mu\Theta_{n-2} + \nu\Theta_{n-4} + \cdots + \begin{Bmatrix} \varkappa\Theta_3 + \lambda s \\ \varkappa\Theta_2 + \lambda \end{Bmatrix} = 0,$$

so sind, wenn einmal die in Θ_n enthaltenen linearen Factoren, dann die beiden ersten Glieder Θ_n und $\mu\Theta_{n-2}$, dann die drei ersten Glieder Θ_n, $\mu\Theta_{n-2}$ und $\nu\Theta_{n-4}$ und endlich überhaupt die m ersten Glieder gegeben sind: dadurch, einmal die n Asymptoten der Curve, dann auf jedem asymptotischen Zweige der Curve vier, dann auf jedem Zweige sechs und endlich $2m$ Puncte in unendlicher Entfernung vollkommen bestimmt; und, umgekehrt, wenn diese unendlich weit entfernt liegenden Puncte (für jeden asymptotischen Zweig durch eine Curve niederer Ordnung) gegeben sind, so sind dadurch die eben bezeichneten Glieder der vorstehenden Gleichung bestimmt.

Wenn auf jedem der n Zweige der Curve $(2m+1)$ Puncte in unendlicher Entfernung gegeben sind, so sind wie eben die m ersten Glieder in der vorstehenden Entwicklung der Gleichung der Curve als bekannt zu betrachten. Dem folgenden $(m+1)$. Gliede der Entwicklung $\sigma\Theta_{n-2m}$ entsprechen $(n-2m)$ gerade Linien, welche bei unserer Voraussetzung eine vollkommen bestimmte Richtung haben, und endlich ist auch der Coefficient σ noch bestimmt. Diess Alles muss nothwendig bestimmt sein, weil sonst die Gleichungen zweier Curven, welche auf allen ihren unendlichen Zweigen sich $(2m+1)$punctig osculiren, sich nicht zu einer Gleichung des $(n-2m-1)$. Grades verbinden lassen würden.

68. Wenn wir insbesondere den Fall der Curven dritter Ordnung, denen die Gleichung:

$$pqr + \mu s = 0,$$

entspricht, näher betrachten, so sind durch die drei linearen Functionen p, q und r die drei Asymptoten der Curve P, Q und R gegeben. Wenn wir, der näheren Constanten-Bestimmung wegen,

$$s \equiv y + \alpha x + \beta$$

setzen, wobei y und x beliebig angenommene, aber vollkommen bestimmte, lineare Functionen bedeuten und dann μ und α gegeben sind, so ist, nach der Schlussbemerkung der vorigen Nummer, das Maass der Annäherung der Curve an ihre drei Asymptoten gegeben. Wir sehen hieraus, dass, wenn die drei Asymptoten P, Q und R gegeben sind, bei allen Curven dritter Ordnung, für welche das Maass der Annäherung an diese Asymptoten dasselbe ist, die Linie S (welche die drei Durchschnitte der Curve mit den drei Asymptoten verbindet) immer mit sich selbst parallel bleibt.

Wenn auch das Maass der Annäherung der Curve an ihre drei Asymptoten, mit diesen zugleich, gegeben ist, so ist dadurch aber doch noch nicht die Curve vollkommen bestimmt; weil alsdann zwar neun Puncte in unendlicher Entfernung gegeben sind, von diesen Puncten aber der neunte durch die Annahme der acht ersten bedingt ist; oder, mit andern Worten, weil von dem Maasse der Annäherung an zwei Asymptoten das Maass der Annäherung an die dritte abhängt.

Um diess direct zu zeigen, wollen wir voraussetzen, dass die drei Asymptoten P, Q, R und das Maass der Annäherung der Curve an die beiden erstgenannten Asymptoten P und Q durch die reciproken Werthe von Δ_p und Δ_q gegeben sei und dann die Constanten der Curve in so weit sie gegeben sind bestimmen und das Maass der Annäherung der Curve an ihre dritte Asymptote R construiren. Für die zweite Asymptote einer Hyperbel, welche die Curve auf der Asymptote P dreipunctig osculirt, können wir jede beliebige gerade Linie

nehmen, und erst nach ihrer Annahme ist die Hyperbel vollkommen bestimmt. Wir brauchen nemlich dann nur von dem Winkel der beiden Asymptoten durch eine übrigens beliebige gerade Linie ein Dreieck abzuschneiden, dessen Inhalt gleich $\varDelta_p$ ist, diese gerade Linie ist alsdann eine Tangente der fraglichen osculirenden Hyperbel und die Mitte auf ihr der Berührungspunct. Auf gleiche Weise können wir eine willkührliche gerade Linie als zweite Asymptote einer, die Curve auf der Asymptote Q dreipunctig osculirenden, Hyperbel annehmen. Wir können beidesmal die gegebene Linie R als die zweite Asymptote betrachten und also zwei Hyperbeln als gegeben ansehen, welche R zur gemeinschaftlichen Asymptote haben und von welchen, die eine auf P und die andere auf Q, die gegebene Curve dreipunctig osculirt. Die Gleichungen dieser beiden Hyperbeln haben die nachstehende Form:

$$pr + \lambda = o,$$
$$qr + \lambda' = o, \tag{1}$$

und wenn wir, um eine feste Bestimmung vor Augen zu haben, für p und q diejenigen geraden Linien nehmen, welche von dem bezüglichen Puncte aus, parallel mit R, nach den Asymptoten P und Q gezogen werden, für r aber den kürzesten Abstand von der Asymptote R, so ist

$$-2\lambda = \varDelta_p, \qquad -2\lambda' = \varDelta_q. \tag{2}$$

Wenn wir die beiden Hyperbeln nach einander in der Gleichung der Curve:

$$pqr + \mu s = o,$$

in Evidenz bringen, so nimmt diese die nachstehenden beiden Formen an:

$$(pr+\lambda)q + \sigma p + \varkappa = o,$$
$$(qr+\lambda')p + \sigma' q + \varkappa' = o.$$

Damit diese beiden Formen unter sich übereinstimmen, ergeben sich als nothwendige Bedingungen:

$$\sigma = \lambda', \qquad \sigma' = \lambda, \qquad \varkappa = \varkappa',$$

und hiernach ist:

$$\mu s \equiv \tfrac{1}{2}[\varDelta_p q + \varDelta_q p - 2\varkappa].$$

Die beiden Hyperbeln (1) schneiden sich, ausser auf ihrer gemeinschaftlichen Asymptote R, noch in zwei, leicht zu construirenden Puncten. Diejenige gerade Linie, welche diese beiden Puncte verbindet, wird durch die folgende Gleichung:

$$\varDelta_p q - \varDelta_q p = o, \tag{3}$$

dargestellt, welche man erhält, wenn man die beiden Gleichungen (1) von einander abzieht, nachdem man zuvor die erste mit q und die zweite mit p multiplicirt hat, und zugleich die Gleichungen (2) berücksichtigt. Diese Gleichung zeigt, dass zu der durch sie dargestellten geraden Linie und den beiden Asymptoten P und Q als vierte Harmonicale eine solche gerade Linie gehört, die, parallel mit der Linie S, durch den Durchschnitt dieser beiden Asymptoten geht. Hiernach können wir auf leichte Weise die Richtung der Linie S construiren.

Ueberdiess sind alle Coefficienten der Gleichung der Curve mit Ausnahme der von den linearen Functionen unabhängigen Constanten $\varkappa$ bekannt.

69. Nachdem wir in der vorigen Nummer die Richtung der Linie S bestimmt haben, wollen wir nun zur geometrischen Bestimmung des Maasses der Krümmung ($\varDelta_r$) auf der dritten Asymptote R, oder, was dasselbe ist, zur Bestimmung einer Hyperbel, welche die Curve auf dieser Asymptote dreipunctig osculirt, übergehen. Zu diesem Ende wenden wir uns nochmals zur Gleichung (3) der vorigen Nummer zurück und wollen denjenigen Punct der bezüglichen geraden Linie betrachten, welcher zugleich auf der dritten Asymptote R liegt. Alsdann bedeuten, nach der Functionen-Bestimmung der genannten Nummer, p und q diejenigen beiden Segmente, welche auf dieser Asymptote R bezüglich zwischen der Linie (3) und den beiden Asymptoten P und Q liegen. Die Gleichung

$$\frac{\varDelta_p}{\varDelta_q} = \frac{p}{q}$$

drückt hiernach aus, dass sich $\varDelta_p$ zu $\varDelta_q$ verhält, wie diejenigen beiden Dreiecke, in welche das von den drei Asymptoten P, Q und R gebildete Dreieck, durch die gerade Linie (3) getheilt wird, oder überhaupt, wie irgend zwei Dreiecke, die jene beiden Segmente p und q zu Basen und irgend einen Punct der geraden Linie (3) zur gemeinschaftlichen Spitze haben. Durch diese fragliche Linie erhält man also, wenn eines der beiden Dreiecke $\varDelta_p$ und $\varDelta_q$ gegeben ist, sogleich das andere.

Neben der geraden Linie (3) gibt es noch zwei andere gerade Linien von ganz analoger Bedeutung, deren Gleichungen man leicht erhält. Die Gleichung (3) geht, wenn von nun an p und q, gleichwie r, kürzeste Abstände bedeuten sollen, in die folgende über:

$$\frac{q\,sin\,(R,P)}{\varDelta_q}=\frac{p\,sin\,(R,Q)}{\varDelta_p}; \tag{4}$$

und durch Buchstaben-Vertauschung ergeben sich hieraus für die beiden analogen geraden Linien die folgenden beiden Gleichungen:

$$\frac{r\,sin\,(Q,P)}{\varDelta_r}=\frac{p\,sin\,(Q,R)}{\varDelta_p}, \tag{5}$$

$$\frac{q\,sin\,(P,R)}{\varDelta_q}=\frac{r\,sin\,(P,Q)}{\varDelta_r}. \tag{6}$$

Nachdem die Richtung der Linie S bekannt ist, können wir diese drei geraden Linien unmittelbar als die vierten Harmonicalen zu einer mit S parallelen geraden Linie und je zweien der drei Asymptoten P, Q und R construiren. Nach Betrachtungen, die den an die Spitze dieser Nummer gestellten, ganz analog sind, erhalten wir vermittelst einer beliebigen der beiden letzten dieser drei geraden Linien den Dreiecks-Inhalt $\varDelta_r$ und wenn dieser Inhalt bekannt ist, dreipunctig die Curve auf R osculirende Hyperbeln.

Von den vorstehenden drei Gleichungen bedingen je zwei die dritte; die bezüglichen drei geraden Linien schneiden sich also in demselben Puncte. Dieser Punct ist die gemeinschaftliche Spitze dreier Dreiecke deren jedes von einer der drei Asymptoten und zwei der drei fraglichen geraden Linien gebildet, und durch die dritte dieser Linien in solche zwei Theile getheilt wird, die dem Maasse der Annäherung der Curve an die beiden anderen Asymptoten proportional sind.

70. Es gibt endlich drei Paare von Hyperbeln, welche beide eine Asymptote der Curve dritter Ordnung auch zu ihrer gemeinschaftlichen Asymptote haben und überdiess die Curve bezüglich auf den beiden andern Asymptoten dreipunctig osculiren. Nach der 68. Nummer schneiden sich die beiden Hyperbeln dieser drei Paare auf den drei geraden Linien (4), (5) und (6). Insbesondere wird diejenige Hyperbel, welche P und Q zu ihren Asymptoten hat und die Curve auf Q osculirt, von derjenigen, welche P und R zu ihren Asymptoten hat und die Curve auf R osculirt, auf der geraden Linie (6) geschnitten. Die erstgenannte Hyperbel ist gegeben, die Linie (6) bekannt und folglich die zweite Hyperbel, weil sie überdiess P zu ihrer zweiten Asymptote hat, auf linearem Wege leicht zu construiren, und zwar ohne dass wir, wie in der vorigen Nummer, zuvor $\varDelta_r$ bestimmen.

71. Wenn das Maass der Annäherung einer Curve dritter Ordnung an ihre drei Asymptoten bekannt ist, so reicht ein einziger Punct der Curve zur vollständigen Bestimmung derselben hin.

Die 45. Nummer gibt uns nemlich, wenn O ein Punct der Curve ist, indem wir $n=3$ nehmen, und die dortige Bezeichnung beibehalten:

$$\varDelta_p = \mp\, 2\ OP \cdot \frac{OM^1 . OM^2}{OM_1}.$$

Wenn wir statt der Segmente OM^1, OM^2 und OM_1, die auf einer durch den gegebenen Punct

O, parallel mit der Asymptote P gezogenen geraden Linie, bezüglich zwischen diesem Puncte und den Asymptoten Q und R und der Linie S liegen, die von demselben Puncte O auf diese drei geraden Linien gefällten Perpendikel einführen und diese Perpendikel OQ, OP und OS nennen, so geht die letzte Gleichung in die folgende über:

$$\Delta_p = \mp 2 \cdot \frac{\sin(S, P)}{\sin(Q, P) \sin(R, P)} \cdot \frac{OP \cdot OQ \cdot OR}{OS}; \tag{7}$$

und durch Buchstaben-Vertauschung ergibt sich alsdann sogleich:

$$\Delta_q = \mp 2 \cdot \frac{\sin(S, Q)}{\sin(P, Q) \sin(R, Q)} \cdot \frac{OP \cdot OQ \cdot OR}{OS}, \tag{8}$$

$$\Delta_r = \mp 2 \cdot \frac{\sin(S, R)}{\sin(Q, R) \sin(P, R)} \cdot \frac{OP \cdot OQ \cdot OR}{OS}. \tag{9}$$

Dividiren wir die beiden ersten der drei vorstehenden Gleichungen in einander, so kommt

$$\frac{\Delta_p}{\Delta_q} = \frac{\sin(S, P)}{\sin(S, Q)} : \frac{\sin(R, P)}{\sin(R, Q)},$$

und da überdiess $(S,Q) = (S,P) - (Q,P)$,

ist hiernach die Richtung der Linie S, vermittelst einer der beiden Winkel (S,P) oder (Q,P) bestimmt, wenn die drei Asymptoten P, Q und R und auf den beiden ersten das Maass der Annäherung gegeben ist. Dann gibt endlich jede der beiden Gleichungen (8) und (9) unmittelbar den Werth von OS und somit die Lage der Linie S.

Wir bemerken, wie auch hier der Werth von Δ_r durch die Werthe von Δ_p und Δ_q bestimmt ist.

72. Nach der 68. Nummer ist eine Curve der dritten Ordnung dann vollkommen bestimmt, wenn auf den drei unendlichen Zweigen derselben in unendlicher Entfernung bezüglich vier, drei und zwei Puncte gegeben sind, oder, mit andern Worten, wenn wir die drei Asymptoten der Curve, für zwei derselben (und also auch für die dritte) das Maass der Annäherung und endlich auf einer überdiess noch den gemeinschaftlichen Mittelpunct der den entsprechenden Zweig der Curve vierpunctig osculirenden Hyperbeln kennen. Wir wollen uns in dieser Nummer mit der Construction der so bestimmten Curve dritter Ordnung beschäftigen. Es ist diese Aufgabe ein besonderer Fall der Aufgabe der vorigen Nummer, deren Auflösung, dadurch, dass der gegebene Punct O unendlich weit gerückt ist, neue Betrachtungen erfordert.

Zuvörderst können wir auf jedem der beiden unendlichen Zweige, auf welchen nur drei Puncte gegeben sind, einen vierten Punct der Curve bestimmen, wonach auf jedem der drei unendlichen Zweige vier Puncte, oder auf den drei Asymptoten die drei Mittelpuncte der drei Gruppen von vierpunctig osculirenden Hyperbeln, gegeben sind. Denn da einer dieser drei Mittelpuncte (wir wollen voraussetzen es sei derjenige, welcher auf der Asymptote P liegt) gegeben ist, so kennen wir denjenigen Punct, in welchem dieselbe Asymptote von der Curve geschnitten wird, weil nach der 46. Nummer dieser Durchschnitt dadurch bestimmt ist, dass die Mitte zwischen ihm und jenem Mittelpuncte mit der Mitte der beiden Puncten, in welchen dieselbe Asymptote P von den beiden andern Asymptoten Q und R geschnitten wird, zusammenfällt. *) Durch eben diesen Durchschnitt geht die Linie S, welche hiernach als vollkommen bekannt zu betrachten ist, weil ihre Richtung durch das Maass der Annäherung der Curve an zwei ihrer Asymptoten bestimmt ist. Durch die beiden Durchschnitte der Linie S mit den beiden Asymptoten Q und R sind auf diesen Asymptoten die beiden

*) Vergl. System. Dritter Abschnitt. 178.

Mittelpuncte der die Curve auf denselben vierpunctig osculirenden Hyperbeln nach demselben Satze gegeben, welcher uns so eben, umgekehrt, den Durchschnitt der Linie S mit der Asymptote P durch den Mittelpunct der, die Curve auf dieser Asymptote vierpunctig osculirenden Hyperbel gab.

Wenn wir hiernach die zu construirende Curve durch die folgende Gleichung darstellen:

$$\mathrm{pqr} + \mu \mathrm{s} = 0,$$

so ist ausser den drei Asymptoten P, Q und R, welche gegeben sind, auch die Linie S auf lineare Weise bestimmt, und es bleibt nur noch übrig den Coefficienten μ zu finden. Dieser ist aber unmittelbar gegeben, wenn wir das Maass der Annäherung der Curve an eine ihrer Asymptoten kennen (44). Statt des Coefficienten μ können wir auch direct und auf lineare Weise einen, nicht unendlich weit entfernten, Punct der Curve construiren. Die Gleichung der vorigen Nummer:

$$\varDelta_{\mathrm{p}} = \mp 2\,\mathrm{OP} \cdot \frac{\mathrm{OM}^1 . \mathrm{OM}^2}{\mathrm{OM}_1},$$

gibt, wenn $\varDelta_{\mathrm{p}}$ und irgend eine gerade Linie, die mit P parallel ist und somit OP gegeben sind, die beiden Durchschnitte O dieser geraden Linie mit der Curve. Wenn die gegebene gerade Linie, ausser dass sie mit P parallel ist, auch noch durch den Durchschnitt der Asymptote R mit der Linie S geht, so fallen die beiden Puncte M^2 und M_1 zusammen. Dadurch wird die obige Gleichung zur Bestimmung des Punctes O linear und gibt, indem wir OP durch δ bezeichnen:

$$\mathrm{OM}^1 = \mp \frac{\varDelta_{\mathrm{p}}}{2\delta}.$$

§. 2.

Imaginäre Asymptoten. Reelle und imaginäre elliptische Asymptoten. Asymptotenpunct.

73. Wenn wir früher behauptet haben, dass die allgemeine Gleichung der Curven n. Ordnung

$$\Omega_n = 0$$

sich immer auf die nachstehende Form bringen lasse:

$$\Theta_n + \mu\Omega_{n-2} \equiv \mathrm{pqr} \cdots + \mu\Omega_{n-2} = 0, \tag{1}$$

und dass die linearen Functionen p, q, r . . . so wie die Function $\mu\Omega_{n-2}$ alsdann vollkommen bestimmt seien, so versteht sich von selbst, dass jene linearen Functionen und demnach auch die ihnen entsprechenden Asymptoten der Curve, welche in demjenigen Falle, den wir bisher ausschliesslich betrachtet haben, reell sind, keinesweges reell zu sein brauchen. Im Gegentheile, dem fraglichen Falle ganz parallel und durchaus nicht untergeordnet, sind diejenigen Fälle, in welchen die linearen Functionen alle oder zum Theil imaginär sind. Wir könnten diess nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, indem wir von der allgemeinen Gleichung des n. Grades zwischen zwei willkührlich angenommenen linearen Functionen ausgingen, leicht zeigen. Dabei würden wir zu einer Gleichung des n. Grades, durch deren Wurzeln die Richtungen der n Asymptoten der Curve gegeben sind, gelangen und diese Gleichung über die Realität und Imaginarität der fraglichen n linearen Functionen und entsprechenden Asymptoten entscheiden. Die vollständige Bestimmung derselben würde nach Auflösung dieser Gleichung auf linearem Wege sich ergeben, so wie auch, und auf nothwendig reelle Weise, die Bestimmung der Constanten der Function Ω_{n-2}.

Aber nicht aus der algebraischen Umformung der einen Gleichung in die andere, sondern aus der Form der Gleichung (1) als selbstständig für sich und unabhängig von der

willkührlichen Annahme zweier linearen Functionen bestehend, ziehen wir unsere Schlüsse. Weil diese Gleichung, bei der nothwendigen Anzahl von einander unabhängiger Constanten, die allgemeine Gleichung der Curven n. Ordnung ist, so gibt es keine Curve dieser Ordnung, welche sich nicht durch die Gleichung (1) darstellen lässt, und umgekehrt erhalten wir alle Curven dieser Ordnung, wenn wir nach einander in dieser Gleichung alle möglichen Constanten-Bestimmungen machen und erhalten alle coordinirten Gattungen der Curven n. Ordnung, wenn wir auf die verschiedenen Fälle, wie das Imaginäre in der Form der fraglichen Gleichung möglicherweise vorkommen kann, Rücksicht nehmen.

Jede Constanten-Bestimmung in der Gleichung (1) hat gleiche Allgemeinheit, so lange die Anzahl der von einander unabhängigen Constanten dieselbe bleibt, es mögen übrigens diese Constanten reell oder imaginär sein. Nur müssen wir, wenn wir imaginäre Constanten wählen, darauf Bedacht nehmen, dass die Function Ω_n^*, deren Entwicklung der erste Theil der Gleichung (1) ist, dadurch keine imaginären Glieder erhalte. Diess erfordert, dass auch die Function Ω_{n-2} ganz reell bleibe, weil die etwaigen imaginären Glieder derselben auf keine Weise durch die imaginären Glieder der Function Θ_n aufgehoben werden können. Die Function Θ_n ist ihrerseits aus demselben Grunde nothwendig reell und kann daher nur solche imaginäre Factoren des ersten Grades enthalten, deren Product reell ist, also Factoren die, paarweise genommen, folgende Form haben:

$$u+\sigma v\sqrt{-1}, \qquad u-\sigma v\sqrt{-1},$$

und mit einander multiplicirt die nachstehende reelle Function zweiten Grades geben:

$$u^2 + \mu^2 v^2.$$

Wir können also jedes Paar linearer Factoren der Function Θ_n durch eine Function zweiten Grades von der vorstehenden Form ersetzen. Diese Function kann auf unendlichmalige Weise in eine andere Function von gleicher Form umgewandelt werden und enthält deshalb eine fünfte und überzählige Constante. Wir können die Anzahl der Constanten auf verschiedenem Wege auf die nothwendige reduciren, insbesondere können wir voraussetzen, dass die, den beiden Functionen u und v entsprechenden, geraden Linien U und V auf einander senkrecht stehen, dann sind diese beiden Functionen und der Coefficient σ durch vier Constante auf lineare Weise bestimmt. *)

Wir werden, um unsere Ausdrucksweise den eben erörterten analytischen Beziehungen anzupassen, in dem Folgenden auch von imaginären Asymptoten sprechen. Solche Asymptoten sind also immer paarweise vorhanden, in der Art, dass die beiden imaginären Asymptoten jedes Paares sich immer in einem reellen Puncte schneiden. Denn die Gleichungen derselben haben folgende Form:

$$u+\sigma v\sqrt{-1}=0, \qquad u-\sigma v\sqrt{-1}=0,$$

und aus ihrer algebraischen Verbindung ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen:

$$u = 0, \qquad v = 0,$$

welche zwei reelle, in demselben Puncte sich schneidende gerade Linien darstellen.

74. Die meisten geometrischen Sätze und Constructionen der frühern Nummern fallen fort, wenn wir sie auf den Fall imaginärer Asymptoten übertragen wollen. Wo aber insbesondere die Realität der Asymptoten selbst nicht in Betracht kommt, da behält Alles seine unmittelbare Geltung. Der Durchschnitt zweier reellen Asymptoten wird hierbei von dem Durchschnitte zweier zusammengehörigen imaginären Asymptoten vollständig vertreten. Was

*) System. Dritter Abschnitt, 180.

Das Imaginäre ist zwar in geometrischer Hinsicht gar nicht vorhanden, trotz dem aber prägen sich sogar die Unterschiede des Imaginären im Reellen ab. So sind, zum Beispiel, wenn eine Curve der 5. Ordnung drei reelle Asymptoten hat, von denen eine dieselbe dreipunctig und die beiden andern mehr als dreipunctig osculiren, die imaginären Asymptoten nothwendig dreipunctig osculirende.

78. Jede Hyperbel, welche zwei Asymptoten einer gegebenen Curve auch zu den ihrigen hat, ist eine hyperbolische Doppel-Asymptote der Curve und hat mit ihr in unendlicher Entfernung einen reellen Doppel-Contact. Das System der beiden geradlinigen Asymptoten erscheint hierbei als der Uebergang, die Gränze, zwischen zwei Gruppen von Hyperbeln, welche in den beiden verschiedenen Paaren von Scheitelwinkeln, die von diesen Asymptoten gebildet werden, liegen. In der identischen Gleichung:

$$\Omega_n \equiv (pq+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu\Omega'_{n-2},$$

treten, wenn wir für λ nach einander alle möglichen Werthe einsetzen, alle fraglichen hyperbolischen Doppel-Asymptoten durch den Factor $(pq+\lambda)$ in Evidenz. Positive Werthe von λ bezeichnen die eine, negative Werthe die andere Gruppe, und beim Uebergang von einer Gruppe zur andern verschwindet λ.

Ganz analoge Beziehungen ergeben sich, wenn die beiden geradlinigen Asymptoten P und Q imaginär werden. Dann nimmt die Function Ω_n folgende Form an:

$$\Omega_n \equiv (u^2+\sigma^2 v^2+\lambda)\Omega_{n-2} + \mu\Omega'_{n-2},$$

und den hyperbolischen Doppel-Asymptoten entsprechen nun Ellipsen, welche, indem wir λ als willkührliche Constante ansehen, durch die nachstehende Gleichung dargestellt werden:

$$u^2 + \sigma^2 v^2 + \lambda = 0.$$

Jede solche Ellipse hat mit der Curve in unendlicher Entfernung einen imaginären Doppel-Contact und schneidet die Curve, was sogleich aus der Gleichung derselben in die Augen springt, deshalb nur in $2(n-2)$ Puncten. Jede ist, um uns consequent auszudrücken, eine elliptische Asymptote und zwar eine Doppel-Asymptote der gegebenen Curve. Nur wenn λ negativ ist, ist diese Asymptote reell, sie wird imaginär, wenn λ positiv wird. Zwischen reellen und imaginären elliptischen Doppel-Asymptoten bildet ein Punct, und diesem entspricht dass die Constante λ verschwindet, den Uebergang. Diesen Punct, in so fern er uns, wie hier, als eine verschwindende Ellipse von bestimmtem Axen-Verhältniss und bestimmter Axen-Lage, und nicht als ein blosser Durchschnitt zweier geraden Linien, entgegentritt, habe ich Asymptotenpunct genannt. Ein Asymptotenpunct ersetzt vollständig zwei reelle gerade Linien in der geometrischen Bestimmung der Curve.

79. Wir können, im Allgemeinen, die Constante λ nicht so bestimmen, dass dadurch, wie früher zwischen Curve und Hyperbel, nun zwischen Curve und Ellipse ein innigerer (imaginärer) Contact hervorgebracht werde. Wenn ein solcher nemlich auf der Asymptote P Statt findet, so muss, nach frühern Erörterungen, die Curve Ω_{n-2} eine mit P parallele Asymptote haben. Diess bedingt die nachstehende Form:

$$\Omega_n \equiv (pq+\lambda)\Theta_{n-2} + \mu(p+\alpha)\Theta_{n-3} + \varrho\Omega_{n-4},$$

welche, wenn P imaginär wird, und wir um die allgemeinste Constanten-Bestimmung zu erhalten, α mit $\alpha+\sigma\beta\sqrt{-1}$ vertauschen, in folgende übergeht:

$$\Omega_n \equiv (u^2+\sigma^2 v^2+\lambda)\Theta_{n-2} + \mu[(u+\alpha) + \sigma(v+\beta)\sqrt{-1}]\Theta_{n-3} + \varrho\Omega_{n-4}.$$

Da aber $\varrho\Omega_{n-4}$ reell ist, bedingt der imaginäre Factor einen zweiten, $[(u+\alpha)-\sigma(v+\beta)\sqrt{-1}]$, in der Function Θ_{n-3}, woraus folgende Form hervorgeht:

$$\Omega_n \equiv (u^2+\sigma^2 v^2+\lambda)\Theta_{n-2} + \mu[(u+\alpha)^2+\sigma^2(v+\beta)^2]\Theta_{n-4} + \varrho\Omega_{n-4},$$

$$\equiv (u^2+\sigma^2 v^2+\lambda)\Omega_{n-2} + \tau\Omega_{n-3}.$$

Diese Form zeigt, dass alsdann die elliptische Asymptote mit der Curve auf einer unendlich

weit entfernten geraden Linie einen imaginären dreipunctigen Doppel-Contact hat. Zugleich aber sehen wir aus der ersten der vorstehenden beiden Entwicklungen der Function Ω_n, dass diese Function, indem wir auf die elliptische Asymptote fünf Constante nehmen, nur $\frac{n(n+3)}{2}$ Constante einschliesst, und ihr also, um die allgemeine ihres Grades zu sein, eine Constante fehlt. Also gibt es nur bei Curven der n. Ordnung von einer besondern Art eine solche elliptische Asymptote. Diese Ellipse kann alsdann immer noch reell oder imaginär sein oder auch auf den Asymptotenpunct sich reduciren. In diesem letzten Falle findet durch das Verschwinden von λ noch eine Reduction in der Anzahl der Constanten um eine neue Einheit Statt, und das ist nothwendig, weil hier nur ein einzelner particulärer Fall unter unendlich vielen herausgehoben wird. Die gegebene Curve hat alsdann zwei geradlinige, dreipunctig osculirende, imaginäre Asymptoten.

Es kann, bei neuen Particularisationen der gegebenen Curve, auch solche Ellipsen geben, welche mit der Curve in unendlicher Entfernung einen imaginären vier- bis $n$punctigen Doppel-Contact haben.

Das Maass der Annäherung einer Curve an eine imaginäre Asymptote ist offenbar imaginär. Wenn es für zwei zusammengehörige imaginäre Asymptoten gleich ist, das heisst wenn es eine dreipunctig osculirende elliptische Doppel-Asymptote gibt, so nimmt der Ausdruck für dasselbe die Form $x\sqrt{-1}$ an und, für verschiedene solche Fälle, können wir das Maass für die Annäherung auf reelle Weise vergleichen. Es ist dem reciproken Werthe des Inhaltes der dreipunctig osculirenden elliptischen Asymptote proportional; denn dieser Inhalt ist, wie man leicht sieht, gleich dem früher durch Δ bezeichneten reciproken Werthe der Annäherung, multiplicirt mit $4\pi\sqrt{-1}$, indem wir die Ludolph'sche Zahl mit π bezeichnen.

Um die Uebertragung früherer Resultate von hyperbolischen Asymptoten auf elliptische an einem einzigen Beispiele zu zeigen, wähle ich den Satz der 64. Nummer, aus dem unmittelbar der folgende fliesst.

Wenn eine Curve der n. Ordnung $(n-2)$ reelle osculirende geradlinige Asymptoten hat, so gibt es immer, wenn die beiden übrigen Asymptoten imaginär sind, eine Ellipse, welche mit der Curve, auf einer unendlich weit entfernten geraden Linie, einen imaginären dreipunctigen Doppel-Contact hat.

Es versteht sich, dass diese Ellipse auch imaginär sein und auch auf einen Punct sich reduciren kann.

80. Auch wenn wir mehrere elliptische Asymptoten zugleich betrachten, erhalten wir Resultate, die den frühern ganz analog sind. Die reellen Asymptoten einer Curve der n. Ordnung sind immer in solcher Anzahl m vorhanden, dass $(n-m)$ eine gerade Zahl ist und dann gibt es $\frac{n-m}{2}$ vollkommen bestimmte Puncte, welche die Mittelpuncte von eben so vielen Gruppen unter sich ähnlicher und ähnlich liegender elliptischen Asymptoten sind und deren jede die Curve nur in $2(n-2)$ Puncten schneidet. Verschiebt man eine solche Ellipse, ohne dass sie sich dreht, so schneidet sie die Curve in jeder ihrer Lagen immer nur noch in $2(n-1)$ Puncten. Wenn man in jeder der obigen $\frac{n-m}{2}$ Gruppen von Ellipsen eine derselben beliebig auswählt, so schneidet das System solcher $\frac{n-m}{2}$ Ellipsen und der m geradlinigen Asymptoten die Curve im Allgemeinen in solchen $n(n-2)$ Puncten, welche alle auf dem Umfange einer Curve der $(n-2)$. Ordnung liegen. Man kann hierbei auch die m geradlinigen Asymptoten

paarweise zusammennehmen und dann an die Stelle jedes Paares Asymptoten eine beliebige Hyperbel setzen, welche diese Asymptoten auch zu den ihrigen hat. —

§. 3.

Parabolische Asymptoten.

81. Wenn wir die allgemeine Gleichung der Curven n. Ordnung unter der nachstehenden Form schreiben:

$$\Omega_2 \Omega'_{n-2} + \mu \Omega_{n-2} = o,$$

so tritt ein Kegelschnitt, dessen Gleichung

$$\Omega_2 = o,$$

als Doppel-Asymptote der Curve in Evidenz. Die letzte Gleichung können wir, indem wir von Vorne herein zwei lineare Functionen y und x willkührlich annehmen, in die folgende entwickeln:

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = o,$$

wonach alsdann der fragliche Kegelschnitt einzig von den fünf Constanten α, β, γ, δ und ε abhängt. Die beiden Asymptoten dieses Kegelschnittes sind zugleich zwei Asymptoten der Curve; ändern wir den Kegelschnitt, indem wir den obigen fünf Constanten andere Werthe beilegen, so ändern sich, im Allgemeinen, die beiden Asymptoten des Kegelschnittes und somit auch zwei Asymptoten der Curve n. Ordnung. Diese Aenderung hat, wenn die Functionen Ω'_{n-2} und $\mu\Omega_{n-2}$ unverändert dieselben bleiben, auf die Natur der übrigen unendlichen Zweige der Curve durchaus keinen Einfluss, und, unbekümmert um diese, können wir uns auf die Betrachtung derjenigen unendlichen Zweige, welche der Doppel-Asymptote Ω_2 sich annähern, beschränken.

Wenn durch eine schickliche Constanten-Bestimmung, indem der Werth des Ausdrucks $(\alpha^2-\beta)$ der ursprünglich positiv war, negativ wird, der Kegelschnitt von einer Hyperbel in eine Ellipse übergeht, so werden die beiden gemeinschaftlichen Asymptoten, die ursprünglich reell waren, nun imaginär. Denken wir uns die Constanten-Aenderung als eine continuirliche, so muss die entsprechende continuirliche Form-Aenderung des Kegelschnittes von der Art sein, dass, indem der Werth des Ausdrucks $(\alpha^2-\beta)$ verschwindet, der Kegelschnitt durch eine Parabel hindurchgeht. In diesem Uebergangsfalle sind die beiden gemeinschaftlichen Asymptoten unendlich weit gerückt und sind in unendlicher Entfernung als parallel zu betrachten. Es gibt also im engern Sinne keine geradlinigen Asymptoten und an die Stelle der hyperbolischen oder elliptischen ist eine parabolische Asymptote getreten.

Um eine klare Anschauung von parabolischen Zweigen einer Curve zu erhalten, brauchen wir bloss den Uebergang von einer hyperbolischen zu einer elliptischen Asymptote auf irgend eine Weise näher festzustellen, etwa dadurch, dass dieselben alle einen gemeinschaftlichen Brennpunct und einen gemeinschaftlichen Scheitel behalten. Nähert sich alsdann der diesem Brennpuncte entsprechende Hyperbelzweig einer Parabel, so nähert sich die Richtung der beiden Asymptoten immer mehr der Richtung der Axe, während sie selbst immer weiter sich entfernen. Derjenige Asymptoten-Winkel, welcher den andern Hyperbelzweig umschliesst, rückt dadurch, zugleich mit diesem, und den an demselben sich ins Unendliche hinziehenden Zweigen der Curve immer weiter bis, für den Fall der Parabel, diese Zweige sich im Unendlichen verloren haben. Hier sind also die an einer hyperbolischen Asymptote sich hinziehenden unendlichen Zweige der Curve halb verschwunden, in der Art, dass, bei dem Uebergange von zwei reellen zu zwei imaginären Asymptoten, an jede Asymptote nicht mehr nach der zwiefachen, sondern nur nach einer Erstreckung derselben, die Curve sich hinzieht; bis sie auch die beiden letzten unendlichen Zweige verliert, und elliptische Asymptoten erhält.

Wenn wir bloss der Constanten ε einen andern beliebigen Werth beilegen, behält der neue Kegelschnitt (2), wie die neue Curve n. Ordnung (1), die beiden ursprünglichen Asymptoten. Der neue Kegelschnitt bleibt hierbei aber auch immer noch eine Doppel-Asymptote der ursprünglichen Curve (1), denn wir können, ohne weder die Gleichung (1), noch auch die Form dieser Gleichung zu ändern, den Coefficienten ε um irgend eine beliebige Grösse ε' wachsen lassen; wir brauchen dann bloss $\mu\Omega_{n-2}$ durch

$$\mu\Omega_{n-2} - \varepsilon'\Omega_{n-2} \equiv \mu'\Omega''_{n-2}$$

zu ersetzen. Diese Willkührlichkeit in der Annahme von ε ist unabhängig von der Art des Kegelschnittes; dieser behält immer als Doppel-Asymptote der Curve (1) eine überzählige Constante und, so wie es in dem Falle zweier reellen Asymptoten unendlich viele hyperbolische und in dem Falle zweier imaginären Asymptoten unendlich viele (theils reelle, theils imaginäre) elliptische Doppel-Asymptoten gibt, so bedingt die Existenz einer parabolischen Asymptote unendlich viele solcher Asymptoten. Die vorstehenden Erörterungen zeigen, dass alle diese parabolischen Asymptoten eine gemeinsame Axe und gleichen Parameter haben, und dass man also dieselben alle erhält, wenn man eine derselben, ohne sie zu drehen, nach der gemeinsamen Axen-Richtung sich fortbewegen lässt.

82. Um die parabolischen Asymptoten in der Gleichung der Curve n. Ordnung in Evidenz zu bringen, wollen wir

$$\Omega_2 \equiv p^2 + \lambda q$$

setzen. Indem wir alsdann, was unbeschadet der Allgemeinheit erlaubt ist, die Function Ω_{n-2} mit Θ_{n-2} vertauschen, geht diese Gleichung in die folgende über:

$$(p^2+\lambda q)\Theta_{n-2} + \mu\Omega_{n-2} = 0.$$

Diese Gleichung enthält noch zwei überzählige Constanten. Von diesen rührt eine daher, dass man überhaupt ein und dieselbe Parabel auf unendlichmalige Weise durch eine Gleichung von der obigen Form darstellen kann, und diese Constante kommt daher ausschliesslich auf den Factor $(p^2+\lambda q)$. Die andere wird nach der vorigen Nummer dadurch bedingt, dass die parabolischen Asymptoten der Curve nothwendig in unendlicher Anzahl vorhanden sind, und fällt daher, durch eine Particularisation derselben, aus der Gleichung der Curve aus.

Was die erste dieser beiden Constanten betrifft, so kommt

$$p^2 + \lambda q \equiv p'^2 + \lambda' q',$$

wenn wir die beiden neuen linearen Functionen p' und $\lambda' q'$ dadurch bestimmen, dass wir

$$p' \equiv p + \beta, \qquad \lambda' q' \equiv \lambda q + \gamma p + \delta,$$

setzen, und hierbei die drei Constanten β, γ und δ so bestimmen, dass sie den beiden folgenden Gleichungen Genüge thun:

$$\beta^2 + \delta = 0, \qquad 2\beta + \mu = 0.$$

Wir können zu diesem Ende, damit zugleich die Bestimmung der beiden übrigen Constanten linear bleibe β (oder auch μ) willkührlich annehmen. Wir werden hiernach in dem Folgenden auf einen Factor von der Form $(p^2+\lambda q)$ nur vier, das heisst so viele Constante rechnen, als zur Bestimmung einer Parabel nothwendig sind. Ueberdiess wollen wir der Kürze wegen einen Factor von der obigen Form durch das Symbol Π bezeichnen, und zur Unterscheidung verschiedener Factoren von derselben Form, diesem Symbol Marken beifügen.

83. Um die zweite überzählige Constante aus der Gleichung der Curve, die nun die folgende sei,

$$\Pi'\Theta_{n-2} + \mu\Omega_{n-2} = 0, \tag{1}$$

fortzuschaffen, wollen wir, durch Einführung einer willkührlichen neuen Constante δ, diese Gleichung zunächst auf nachstehende Weise schreiben:

$$(\Pi'+\delta)\Theta_{n-2} + (\mu\Omega_{n-2} - \delta\Theta_{n-2}) = 0,$$

und dann, was immer auf einzige Weise möglich ist, die eingeführte Constante δ so

bestimmen, dass

$$\mu\Omega_{n-2} - \delta\Theta_{n-2} \equiv \varrho \mathfrak{p} \Omega_{n-3} + \mu'\Omega_{n-3} \equiv \varrho(\mathfrak{p}+\alpha)\Theta_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4},$$

wobei $\mathfrak{p}$ eine von Π' abhängige lineare Function bedeutet. Wenn wir hiernach

$$\Pi' + \delta \equiv \Pi$$

setzen, entspricht Π einer, durch ihre besondere Beziehung zur Curve der n. Ordnung vollkommen bestimmte Parabel, und dann geht die Gleichung dieser Curve in die folgende über:

$$\Pi\Theta_{n-2} + \varrho(\mathfrak{p}+\alpha)\Theta_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4} = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichung enthält die nothwendigen und hinreichenden $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right)$, von einander unabhängigen Constanten. Wir können sie für die allgemeine Gleichung der Curven n. Ordnung mit parabolischen Asymptoten nehmen, und, als solche, sie allen allgemeinen Untersuchungen über solche Curven zu Grunde legen.

Jede der unendlich vielen parabolischen Asymptoten, von welchen eine in der Function Π' der Gleichung (1) in Evidenz tritt, schneidet die Curve n. Ordnung nur in $2(n-2)$ Puncten, weil vier Durchschnitts-Puncte, dem asymptotischen Character derselben zu Folge, unendlich weit liegen. Von den, im Allgemeinen, nicht unendlich weit entfernten Durchschnittspuncten, welche zugleich auf dem Umfange einer Curve der $(n-2)$. Ordnung liegen, ist in dem Falle der Parabel Π noch einer unendlich weit gerückt. Denn die Gleichung

$$\Pi = 0$$

reducirt die allgemeine Gleichung (2) auf

$$\varrho(\mathfrak{p}+\alpha)\Theta_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4} = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Curve der $(n-2)$. Ordnung dar, welche eine solche Asymptote hat, die der Durchmesser-Richtung der parabolischen Asymptoten parallel ist und welche somit die Parabel nur in $(2n-5)$ Puncten schneidet, weil nach der eben bezeichneten Richtung, ein Durchschnittspunct unendlich weit liegt. Wir werden die hierdurch näher characterisirte Parabel eine die Curve in unendlicher Entfernung fünfpunctig osculirende, oder im Allgemeinen kurz, die osculirende parabolische Asymptote nennen. Curven mit parabolischen Zweigen haben also unter ihren unendlich vielen parabolischen Asymptoten immer eine einzige und vollkommen bestimmte, fünfpunctig osculirende.

84. Im Allgemeinen hat eine Curve mit parabolischen Zweigen keine mehr als fünfpunctig osculirende Parabel; bei parabolischen Curven der n. Ordnung von besonderer Art kann indess die Ordnung der Osculation bis zu einer $2n$punctigen ansteigen. Die Anzahl der Constanten reducirt sich von Neuem um Eins für jede steigende Einheit in der Ordnung des Contactes.

Wir wollen zuvörderst die Curven der vierten Ordnung betrachten. Die Gleichung dieser Curven, in welcher aus der Gruppe der unendlich vielen parabolischen Asymptoten irgend eine, Π', in Evidenz tritt, ist die folgende:

$$\Pi'\Theta_2 + \mu\Omega_2 = 0. \tag{1}$$

Damit Π' in die fünfpunctig osculirende Parabel Π übergehe, muss die Function Ω_2 sich so particularisiren, dass die Gleichung der Curve in die nachstehende übergeht:

$$\Pi\Theta_2 + \mu[(\mathfrak{p}+\alpha)\mathfrak{r} + \beta] = 0. \tag{2}$$

Dadurch ist aus der Gleichung (1) die überzählige Constante verschwunden und die neue Gleichung (2) enthält die gerade nothwendige Anzahl von Constanten, nemlich 13. Die Curve Ω_2 ist hier nothwendig eine Hyperbel, deren eine Asymptote der Durchmesser-Richtung der parabolischen Asymptoten parallel ist, wonach sie die Parabel Π nur in drei Puncten schneidet.

Wenn die Function Ω_2 sich weiter particularisirt, so dass der bezügliche Kegelschnitt von der Parabel Π nur noch in zwei Puncten geschnitten wird, so particularisirt sich zugleich die Curve der n. Ordnung. Eine sechspunctig osculirende Parabel vertritt alsdann, unter unendlich vielen vierpunctig osculirenden, die Stelle der fünfpunctig osculirenden Parabel. In der gemachten Voraussetzung muss die Function Ω_2, wenn Π verschwindet, auf den ersten Grad sich reduciren, was folgende identische Gleichung bedingt:

$$\mu\Omega_2 \equiv \lambda\Pi + \varrho s.$$

Hiernach ist die allgemeine Gleichung solcher Curven vierter Ordnung, welche eine sechspunctig osculirende parabolische Asymptote haben, die folgende mit 12 Constanten:

$$\Pi(\Theta_2+\lambda) + \varrho s = 0. \tag{3}$$

Die beiden einzigen noch übrigen Durchschnitte der Curve mit ihrer parabolischen Asymptote Π liegen auf der geraden Linie S; soll auch einer von diesen beiden Durchschnittspuncten noch unendlich weit rücken, so muss die Linie S ein Durchmesser der Parabel Π werden. Diess fordert:

$$s \equiv p + \alpha.$$

Wenn also die mehr als vierpunctig osculirende Parabel eine siebenpunctig osculirende sein soll, so enthält die allgemeine Gleichung der so particularisirten Curve vierter Ordnung nur 11 Constanten und wird die folgende:

$$\Pi(\Theta_2+\lambda) + \varrho(p+\alpha) = 0. \tag{4}$$

Wenn endlich die Ordnung der Osculation der Curve und der Parabel Π zu einer achtpunctigen, und also, weil eine Curve der 4. und eine Curve der 2. Ordnung sich überhaupt nur in acht Puncten schneiden können, der höchstmöglichen, ansteigen soll, so reducirt sich die Anzahl der Constanten auf 10, und wir erhalten die nachstehende Form:

$$\Pi(\Theta_2+\lambda) + \mu = 0. \tag{5}$$

Weil, beim Uebergange von der Gleichung (2) zu der Gleichung (3), von der Gleichung (3) zu der Gleichung (4) und von dieser Gleichung zur Gleichung (5), jedesmal nur eine einzige Constante ausgefallen ist, und diese verschiedenen Gleichungen also die allgemeinen für die oben namhaft gemachten Particularisationen der Curven vierter Ordnung sind, so ist, was die Form dieser Gleichungen aussagt, eine nothwendige Folge dieser Particularisationen. Hiernach zeigt, zum Beispiel, die Gleichung (3) dass, wenn eine Curve vierter Ordnung mit parabolischen Asymptoten, von der Art ist, dass unter diesen eine sechspunctig osculirende Parabel sich befindet, es neben dieser Parabel immer noch einen zweiten Kegelschnitt: $\Theta_2 + \lambda = 0$, gibt, welcher mit derselben Curve in unendlicher Entfernung einen dreipunctigen Doppel-Contact hat, und dass alsdann das System dieser beiden Kegelschnitte die Curve in solchen vier Puncten schneidet, welche in gerader Linie (S) liegen. Diese gerade Linie, wird nach der Form der Gleichung (4), der Durchmesser-Richtung der parabolischen Asymptoten parallel, wenn unter diesen sich eine siebenpunctig osculirende befindet. Wenn endlich eine achtpunctig osculirende parabolische Asymptote vorhanden ist, so gibt es neben derselben, nach der Gleichung (5), immer noch einen Kegelschnitt, welcher mit der Curve in unendlicher Entfernung einen vierpunctigen Doppel-Contact hat.

85. Für Curven der 5. Ordnung ergeben sich Gleichungen von folgenden Formen:

$$\Pi\Theta_3 + \mu[(p+\alpha)rs + \varrho t] = 0, \tag{1}$$

$$\Pi(\Theta_3 + \lambda u) + \mu\Omega_2 = 0, \tag{2}$$

$$\Pi(\Theta_3 + \lambda u) + \mu[(p+\alpha)r + \varrho] = 0, \tag{3}$$

$$\Pi(\Theta_3 + \lambda u) + \mu s = 0, \tag{4}$$

$$\Pi(\Theta_3 + \lambda u) + \mu(p+\alpha) = 0, \tag{5}$$

$$\Pi(\Theta_3 + \lambda u) + \mu = 0. \tag{6}$$

Die Gleichung (1) ist die allgemeine Gleichung der Curven 5. Ordnung mit parabolischen Asymptoten, sie enthält $\frac{5(5+3)}{2} - 1 \equiv 19$ Constanten und es tritt in ihr Π als die fünfpunctig osculirende Parabel in Evidenz. In den sich schrittweise abstufenden besondern Fällen der Gleichungen (2) bis (6) steigt die Ordnung der Osculation allmählig an, während die Anzahl der nothwendigen Constanten von 18 bis auf 14 heruntersinkt. Die Gleichungen (2) und (3) haben, indem wir nach dem Frühern auf Π nur 4 Constanten rechnen, bezüglich 19 und 18, also eine Constante zu viel. Diese wird dadurch hervorgerufen, dass eine sechs- und siebenpunctig osculirende Parabel nach der Form der entsprechenden Gleichungen eine Curve der dritten Ordnung:

$$\Theta_3 + \lambda u = o,$$

bedingt, welche auf jeder ihrer Asymptoten die fragliche Curve 5. Ordnung dreipunctig osculirt und dann eine solche Curve unendlich viele andere von gleicher Beziehung zur Curve. (71). Diese Curven haben alle dieselben drei Asymptoten, und schneiden dieselben immer, so, dass die gerade Linie U, welche die jedesmaligen drei Durchschnittspuncte verbindet, dieselbe Richtung behält. In Uebereinstimmung hiermit können wir, ohne die Gleichung (2) irgend zu ändern, λu mit $\lambda(u+\varkappa)$ und zugleich $\mu\Omega_2$ mit $(\mu\Omega_2 - \lambda\varkappa\Pi)$ vertauschen, und dann, durch schickliche Bestimmung von $\varkappa$, die überzählige Constante ausfallen lassen. Die Gleichungen (4), (5) und (6), in welchen Π als acht-, neun- und zehnpunctig osculirende Parabel in Evidenz tritt, enthalten wiederum die nothwendige und hinreichende Anzahl von Constanten, um die allgemeinen Gleichungen für Curven der bezüglichen Art zu sein.

Die Gleichung

$$\Pi\Theta_3 + \mu\Omega_3 = o$$

zeigt, dass alle nicht unendlich weit entfernte Puncte, in welche die Curve 5. Ordnung von irgend einer vierpunctig osculirenden parabolischen und den, dem Factor Θ_3 entsprechenden, Asymptoten geschnitten wird, auf einer Curve dritter Ordnung liegen. Diese Curve Ω_3 particularisirt sich, von dem Falle der Gleichung (1) aus, durch die Fälle der folgenden Gleichungen hindurch, so, dass erstens P einer Asymptote dieser Curve parallel wird, dass zweitens diese Curve parabolische Asymptoten mit derselben Durchmesser-Richtung als die Curve 5. Ordnung hat, dass drittens die parabolischen Asymptoten der genannten beiden Curven auch gleichen Parameter haben, dass viertens dieselbe Gruppe unendlich vieler parabolischer Asymptoten beiden Curven angehört, dass fünftens unter diesen unendlich vielen parabolischen Asymptoten ein und dieselbe diejenige ist, welche beide Curven fünfpunctig osculirt, dass sechstens die Ordnung dieser Osculation zu einer sechspunctigen ansteigt.

Auf demselben Wege könnten wir zu analogen Betrachtungen über Curven der 6. und höhern Ordnungen fortschreiten. Doch wir wenden uns sogleich zu den allgemeinen Form-Bestimmungen.

86. Die allgemeine Function der n. Ordnung muss sich, wenn die bezügliche Curve eine $2m$punctig osculirende Parabel Π haben soll, durch das Verschwinden von Π auf den $(n-m)$. Grad reduciren. Hierdurch wird die Form der nachstehenden identischen Gleichung, bedingt:

$$\Omega_n \equiv \Pi\Omega_{n-2} + \mu\Omega'_{n-m}.$$

Diese Form schliesst, im Allgemeinen, überzählige Constanten ein, weil wir zu Ω_{n-2} eine willkührliche Function $\varrho\Omega_{n-m-2}$ addiren können, und dann bloss, damit die vorstehende Gleichung unverändert bleibe, die Function Ω_{n-m} durch eine andere gehörig bestimmte derselben Ordnung zu ersetzen brauchen, wobei alsdann die Form des zweiten Theiles der vorstehenden identischen Gleichung sich keineswegs ändert. Die Anzahl der Constanten desselben beträgt, indem wir vier auf Π rechnen:

$$5+\frac{(n-2)(n+1)}{2}+\frac{(n-m)(n-m+3)}{2},$$

und reducirt sich durch die Anzahl der willkührlichen Constanten der Function $\rho\Omega_{n-m-2}$ um

$$\frac{(n-m-2)(n-m+1)}{2}+1$$

Einheiten, nemlich auf: $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)-(2m-5)$,

also auf die nothwendige und hinreichende Anzahl von Constanten für solche Curven der n. Ordnung, welche unendlich viele parabolischen Asymptoten und unter diesen eine $2m$punctig osculirende haben.

Wenn m eine gerade Zahl $2m'$ bedeutet, so können wir, indem wir über alle willkührlichen Constanten der Function $\rho\Omega_{n-m-2}$ gehörig disponiren,

$$\Omega_{n-2}+\rho\Omega_{n-m-2}\equiv[\Theta_{n-2}+\alpha\Theta_{n-4}+\cdot\cdot+\gamma\Theta_{n-m}]$$

setzen, und erhalten alsdann die folgende allgemeine Gleichung mit der nothwendigen Anzahl von Constanten, in welcher Π als $4m'$punctig osculirende parabolische Asymptote in Evidenz tritt:

$$\Pi[\Theta_{n-2}+\alpha\Theta_{n-4}+\cdot\cdot+\gamma\Theta_{n-m}]+\mu\Omega_{n-m}=0. \qquad (1)$$

Wenn der Contact ein $(4m'+1)$punctiger wird, so wird dadurch bedingt, dass

$$\Omega_{n-m}\equiv(p+\alpha)\Theta_{n-m-1}+\delta\Omega_{n-m-2},$$

und folglich ergibt sich alsdann für die allgemeine Gleichung, in welcher die Anzahl der Constanten um eine Einheit sich vermindert hat:

$$\Pi[\Theta_{n-2}+\alpha\Theta_{n-4}+\cdot\cdot+\gamma\Theta_{n-m}]+\mu[(p+\alpha)\Theta_{n-m-1}+\delta\Omega_{n-m-2}]=0. \qquad (2)$$

Wenn der Contact zu einem $2(m'+1)$punctigen ansteigt, so ergibt sich die identische Bedingungs-Gleichung:

$$\mu\Omega_{n-m}\equiv(\Pi+\varkappa r)\Theta_{n-m-2}+\sigma\Omega_{n-m-2},$$

wobei wir die lineare Function r um eine willkührliche Constante wachsen lassen können, ohne weder die Gleichung der Curve selbst, noch ihre Form zu ändern. In folgendem Ausdruck ist die hierdurch angezeigte überzählige Constante ausgefallen:

$$\mu\Omega_{n-m}\equiv\mu(\Pi+\varkappa r)\Theta_{n-m-2}+\sigma(p+\alpha)\Theta_{n-m-3}+\tau\Omega_{n-m-4}$$

und somit erhält man für die Gleichung der Curve:

$$\Pi[\Theta_{n-2}+\alpha\Theta_{n-4}+\cdot\cdot+\gamma\Theta_{n-m}+\mu\Theta_{n-m-2}]+\lambda r\Theta_{n-m-2}+\sigma(p+\alpha)\Theta_{n-m-3}+\tau\Omega_{n-m-4}=0. \qquad (3)$$

Wenn letztlich der Contact in einen $(4m'+3)$punctigen übergeht, ist

$$\mu\Omega_{n-m}\equiv\mu(\Pi+\varkappa p)\Theta_{n-m-2}+\sigma\Omega_{n-m-2},$$

wonach die Gleichung der Curve folgende Form mit der nothwendigen und hinreichenden Constanten-Anzahl annimmt:

$$\Pi[\Theta_{n-2}+\alpha\Theta_{n-4}+\cdot\cdot+\gamma\Theta_{n-m}+\mu\Theta_{n-m-2}]+\lambda(p+\alpha)\Theta_{n-m-2}+\sigma\Omega_{n-m-3}=0.— \qquad (4)$$

87. Wir wollen, ähnlich wie wir früher die Annäherung einer Curve an geradlinige Asymptoten bestimmt haben, nun das Maass der Annäherung an parabolische Asymptoten bestimmen.

Der Werth der Function $\Pi\equiv p^2+\lambda q$ bleibt, wenn dieselbe auf einen gegebenen Punct bezogen wird, für jede Bestimmung der überzähligen Constanten, die sie einschliesst, dieselbe. Wir wollen, zum Behuf der Construction dieses Werthes, die überzählige Constante so bestimmen, dass p der Axe der Parabel und q der Tangente im Scheitel dieser Axe entspricht und dass überdiess diese beiden linearen Functionen kürzeste Abstände von den bezüglichen geraden Linien bedeuten. Wenn wir dann durch den gegebenen Punct einerseits eine gerade Linie parallel mit der Axe der bezüglichen Parabel Π legen und den Abstand dieses Punctes von dem einzigen Durchschnitte mit der Parabel δ nennen, und andrerseits eine zweite gerade Linie durch den gegebenen Punct, senkrecht gegen die Durchmesser-

Richtung der Parabel, ziehen, welche die Parabel in zwei Puncten schneidet, deren Abstände von dem gegebenen Puncte wir durch ϑ und $(2p-\vartheta)$ darstellen können, indem wir ϑ für den kleinern Abstand nehmen, so erhalten wir die nachstehende doppelte Gleichung:

$$\Pi = \lambda\delta = \vartheta(2p-\vartheta).$$

Diese Gleichung zeigt, dass, bei wachsendem Werthe von p, der Quotient $\frac{\vartheta}{\delta}$ sich immer mehr der Gränze Null nähert. Wenn wir also die Parabel Π, parallel mit sich selbst, nach der Richtung ihrer Durchmesser um eine Strecke δ verschieben, und auf der Parabel in ihrer neuen Lage ein Punct alsdann immer weiter fortrückt, so nähert sich der diesem Puncte entsprechende Werth von ϑ immer mehr der Gränze Null. Darum bleibt eine Parabel bei jeder solchen Verschiebung ihre eigene Asymptote und darum hat eine Curve, wenn sie überhaupt eine parabolische Asymptote hat, deren unendlich viele. Für den unendlich weit entfernten Punct ist ϑ ein unendlich Kleines von der Ordnung $\frac{1}{2}$, denn einerseits ist jene Entfernung ein unendlich Grosses von derselben Ordnung als q und andrerseits q von derselben Ordnung als p^2, also p ein unendlich Grosses von der Ordnung $\frac{1}{2}$.

Wir wollen, für immer weiter sich entfernende Puncte, den reciproken Werth von δ das Maass der Annäherung an die Parabel Π nach der Richtung ihrer Durchmesser und den reciproken Werth von ϑ das absolute Maass der Annäherung an die Parabel Π nennen. Zur Rechtfertigung der letzten Benennung ist es gut zu bemerken, dass, für einen immer weiter sich entfernenden Punct, ϑ als kürzesten Abstand von der Parabel Π zu betrachten ist.

Wenn die Annäherung nach der Durchmesser-Richtung für die Puncte eines an die Parabel Π sich hinziehenden Curven-Zweiges unendlich gross, also δ unendlich klein wird, so ist die absolute Annäherung an die Parabel Π ein unendlich Grosses und also ϑ ein unendlich Kleines von einer Ordnung, die um eine halbe Einheit gestiegen ist. Es folgt diess unmittelbar aus der vorstehenden Doppel-Gleichung, aus welcher, nach erlaubten Vernachlässigungen,

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{p}\cdot\delta = \pm\tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{q}}\cdot\delta$$

sich ergibt.

88. Wenn wir hiernach eine Curve mit parabolischen Asymptoten durch folgende Gleichung mit überzähligen Constanten darstellen:

$$\Pi\Omega'_{n-2} + \mu\Omega_{n-m} = 0, \qquad (1)$$

in welcher Π als 2mpunctig osculirende Parabel in Evidenz tritt, so kommt, indem wir Alles auf einen beliebigen Punct der fraglichen Curve beziehen:

$$\Pi = -\mu\frac{\Omega_{n-m}}{\Omega_{n-2}}.$$

Wenn dieser Punct auf einem an die Parabel Π sich hinziehenden Zweig dieser Curve immer weiter fortrückt und wir Ω_{n-m} und Ω_{n-2}, für einen Augenblick, als Functionen von p und q ansehen in welchen die Coefficienten der höchsten Potenzen von q gleich Eins sind, und dann p gegen q und niedere Potenzen von q gegen höhere vernachlässigen, so reducirt sich die letzte Gleichung auf

$$\Pi = -\mu q^{-(m-2)}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\delta = -\frac{\mu}{\lambda}\cdot q^{-(m-2)} \qquad (2)$$

Diese Gleichung zeigt, wie zu erwarten stand, dass wenn Π, indem wir $m=2$ nehmen, eine der unendlich vielen nicht osculirenden parabolischen Asymptoten ist, δ immer eine endliche Grösse ist; dass aber wenn in besondern Fällen $m>2$, und Π eine 2mpunctig osculirende parabolische Asymptote ist, δ ein unendlich Kleines der $(m-2)$. Ordnung wird. Die Gleichung

(1) muss sich, wenn Π in eine $(2m+1)$punctig osculirende Parabel übergehen soll, auf folgende Weise particularisiren.

$$\Pi\Omega_{n-2} + \mu(p+\alpha)\Omega_{n-m-1} + \rho\Omega_{n-m-2} = 0.$$

Dann finden wir, nach erlaubten Vernachlässigungen:

$$\delta = \frac{\Pi}{\lambda} = -\frac{\mu}{\lambda}\cdot pq^{-(m-1)} = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}(\pm q)^{-(m-\frac{3}{2})}. \tag{3}$$

Für die, dem allgemeinen Falle, dass $m=2$, entsprechende, fünfpunctig osculirende Parabel ist δ ein unendlich Kleines von der Ordnung $\frac{1}{2}$, was mit der vorigen Nummer in Uebereinstimmung ist.

Wir können die beiden Gleichungen (2) und (3) in eine einzige zusammenziehen, wenn, indem wir durch h eine beliebige gerade oder ungerade Zahl bezeichnen, die Ordnung der Annäherung der Curve an eine $h$punctig osculirende parabolische Asymptote, nach der Durchmesser-Richtung, durch die nachstehende Gleichung, in der $\varkappa$ eine Constante bezeichnet, ausdrücken:

$$\delta = \varkappa q^{-(\frac{1}{2}h-2)}. \tag{4}$$

Nach der vorigen Nummer erhalten wir aus dem Maasse der Annäherung einer Curve an eine parabolische Asymptote, nach der Durchmesser-Richtung, sogleich das absolute Maass der Annäherung. Zunächst gehen aus den beiden Gleichungen (2) und (3) die folgenden beiden hervor

$$\vartheta = \frac{\lambda}{2p}\cdot\delta = -\frac{\mu}{2p}\cdot q^{-(m-2)} = \pm\frac{\mu}{2\sqrt{\lambda}}(\pm q)^{-(m-\frac{3}{2})},$$

$$\vartheta = \frac{\lambda}{2p}\cdot\delta = -\tfrac{1}{2}\mu q^{-(m-1)}.$$

und diese beiden Gleichungen können wir in die folgende zusammenziehen:

$$\vartheta = \varkappa q^{-(\frac{1}{2}h-\frac{3}{2})}. \tag{5}$$

89. Wenn der Contact einer beliebigen Curve und einer Hyperbel nach der Richtung einer gemeinschaftlichen Asymptote von einem $h$punctigen zu einem $(h+1)$punctigen ansteigt, so schneidet die Curve die Hyperbel in einem Puncte weniger und die Ordnung der Annäherung des an jener Asymptote sich hinziehenden Hyperbel- und Curven-Zweiges steigt um eine Einheit. Wenn eine parabolische Asymptote einer Curve diese in einem Puncte weniger schneidet, weil ein neuer Durchschnittspunct unendlich weit gerückt ist, so steigt die Ordnung der Annäherung der Curve an jeden der beiden Parabel-Zweige um eine halbe Einheit: es theilen sich gleichsam diese beiden Parabel-Zweige in den unendlich weit gerückten Punct.

Wenn h eine gerade Zahl bedeutet, so erhalten wir aus den Gleichungen (4) und (5), demselben immer wachsenden Werth von q entsprechend, für δ einen einzigen Werth und für ϑ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe; wenn h eine ungerade Zahl bedeutet, verhält es sich umgekehrt, der Werth für δ ist ein doppelter, der Werth für ϑ ein einziger. Hieraus folgt, dass, wenn h gerade ist, weit genug entfernte Puncte der beiden parabolischen Zweige der Curve, welche an den beiden Zweigen der $h$punctig osculirenden Parabel sich hinziehen, entweder beidesmal innerhalb oder beidesmal ausserhalb dieser Parabel liegen; dass aber, wenn h ungerade ist, ein unendlicher Zweig innerhalb und der andere ausserhalb der Parabel liegt. Nehmen wir insbesondere eine der unendlich vielen nicht osculirenden parabolischen Asymptoten, so liegen hiernach beide Zweige entweder innerhalb oder beide ausserhalb. Wir wollen hier voraussetzen, dass beide Zweige ausserhalb liegen und dann die Parabel, ohne sie zu drehen, nach der Durchmesser-Richtung so fortrücken, dass sie den parabolischen Zweigen der Curve sich nähert. Hierbei bleibt sie, in allen ihren Lagen, eine Asymptote der Curve und wir gelangen dann zu einer vollkommen bestimmten Gränz-Lage,

wo sie in eine fünfpunctig osculirende übergeht. In dieser Gränz-Lage liegt ein unendlicher Zweig schon ganz innerhalb und der andere noch ausserhalb der parabolischen Asymptote. Ueber diese Gränz-Lage hinausgerückt, umschliesst die Parabel beide unendliche Zweige. Vor dieser Gränz-Lage liegt der erste parabolische Zweig der Curve ihr (wie man leicht sieht, um ein unendlich Kleines von der Ordnung $\frac{1}{2}$) näher als der zweite; über die Gränzlage hinaus, liegt der zweite Zweig ihr näher als der erste. Wenn, in besondern Fällen, die fünfpunctig osculirende parabolische Asymptote durch irgend eine ungeradpunctig osculirende ersetzt wird, so ändert sich hierin nichts, ausser dass, in der Gränz-Lage, der Contact ein innigerer ist und hiernach die Differenz in der Annäherung der beiden parabolischen Zweige an irgend eine ihrer unendlich vielen gemeinschaftlichen Asymptoten ein unendlich Kleines von höherer Ordnung wird. Wenn aber eine geradpunctig osculirende parabolische Asymptote die fünfpunctig osculirende vertritt, so treten bei der Gränz-Lage die parabolischen Zweige der Curve beide zugleich in die Parabel hinein. Die Annäherung der beiden parabolischen Zweige an eine beliebige ihrer gemeinschaftlichen, nicht osculirenden Asymptoten, ist alsdann nur um ein unendlich Kleines der ersten oder einer höhern Ordnung verschieden. —

90. Eine Curve der n. Ordnung hat, neben ihrer parabolischen Asymptote, im Allgemeinen, noch $(n-2)$ geradlinige Asymptoten; diese können in untergeordneten Fällen, alle oder theilweise mit der Curve in unendlicher Entfernung auch einen Contact höherer Ordnung haben. Die allgemeinen Gesetze, von welchen dieser abhängt, werden sich sogleich ergeben, nachdem wir die verschiedenen möglichen Fälle für Curven der 4. und 5. Ordnung zusammengestellt haben.

Die folgenden Schemata enthalten die diesen verschiedenen Fällen entsprechenden allgemeinen Gleichungen mit der nothwendigen und hinreichenden Anzahl von Constanten. Bei jeder Gleichung ist die Ordnung der Osculation für die geradlinigen Asymptoten, wie bisher, durch arabische Ziffern, die Ordnung der osculirenden parabolischen Asymptote durch eine römische Ziffer bezeichnet, in der Art, dass die Ziffer V zum Beispiel eine fünfpunctig osculirende Parabel anzeigt. Ueberdiess ist die jeder Gleichung nachgesetzte und mit Klammern umschlossene Zahl die Anzahl der Constanten.

A. Curven der 4. Ordnung mit einer fünfpunctig osculirenden parabolischen Asymptote:

V 22	$\Pi rs + \mu(p+\alpha)u + \lambda = 0$,	[13]
. 32	$\Pi rs + \mu(p+\alpha)(r+\beta) + \lambda = 0$,	[12]
. 42	$\Pi rs + \mu(p+\alpha)r + \lambda = 0$.	[11]

B. Curven der 4. Ordnung mit einer sechspunctig osculirenden parabolischen Asymptote:

VI 22	$\Pi(rs+\mu) + \lambda u = 0$,	[12]
. 33	$\Pi rs + \lambda u = 0$,	[11]
. 43	$\Pi rs + \lambda(r+\alpha) = 0$.	[10]

C. Curven der 4. Ordnung mit einer siebenpunctig osculirenden parabolischen Asymptote.

VII 22	$\Pi(rs+\mu) + \lambda(p+\alpha) = 0$,	[11]
. 33	$\Pi rs + \lambda(p+\alpha) = 0$.	[10]

D. Curven der 4. Ordnung mit einer achtpunctig osculirenden parabolischen Asymptote:

VIII 22	$\Pi(rs+\mu) + \lambda = 0$,	[10]
. 44	$\Pi rs + \lambda = 0$.	[9]

91. Curven der 5. Ordnung.

A. mit einer fünfpunctig osculirenden parabolischen Asymptote:

V 222	$\Pi rst + \mu(p+\alpha)uv + \lambda w = 0$,	[19]
. 322	$\Pi rst + \mu(p+\alpha)(r+\beta)v + \lambda w = 0$,	[18]

V 422	$\Pi rst + \mu(p+\alpha)rv + \lambda w = o,$	[17]
. 522	$\Pi rst + \mu(p+\alpha)rv + \lambda(r+\beta) = o,$	[16]
. 332	$\Pi rst + \mu(p+\alpha)(r+\beta)(s+\gamma) + \lambda w = o,$	[17]
. 432	$\Pi rst + \mu(p+\alpha)r(s+\gamma) + \lambda w = o,$	[16]
. 532	$\Pi rst + \mu(p+\alpha)r(s+\gamma) + \lambda(r+\beta) = o,$	[15]
. 442	$\Pi rst + \mu(p+\alpha)rs + \lambda w = o,$	[15]
. 542	$\Pi rst + \mu(p+\alpha)rs + \lambda(r+\beta) = o,$	[14]
. 552	$\Pi rst + \mu(p+\alpha)rs + \lambda = o.$	[13]

B. mit einer sechspunctig osculirenden parabolischen Asymptote:

VI 222	$\Pi(rst+\mu u) + \lambda\Omega_2 = o,$	[18] *)
. 322	$\Pi(rst+\mu r) + \lambda\Omega_2 = o,$	[17]
. 422	$\Pi(rst+\mu r) + \lambda(r+\alpha)u+\sigma = o,$	[16]
. 522	$\Pi(rst+\mu r) + \lambda ru + \sigma' = o,$	[15]
. 333	$\Pi rst + \lambda\Omega_2 = o,$	[16]
. 433	$\Pi rst + \lambda(r+\alpha)u + \sigma = o,$	[15]
. 533	$\Pi rst + \lambda ru + \sigma = o,$	[14]
. 443	$\Pi rst + \lambda(r+\alpha)(s+\beta) + \sigma = o,$	[14]
. 543	$\Pi rst + \lambda r(s+\beta) + \sigma = o,$	[13]
. 553	$\Pi rst + \lambda rs + \sigma = o.$	[12]

C. mit einer siebenpunctig osculirenden parabolischen Asymptote:

VII 222	$\Pi(rst+\mu u) + \lambda(p+\alpha)v\ \sigma = o,$	[17] **)
. 322	$\Pi(rst+\mu r) + \lambda(p+\alpha)v\ \sigma = o,$	[16]
. 422	$\Pi(rst+\mu r) + \lambda(p+\alpha)(r+\beta) + \sigma = o,$	[15]
. 522	$\Pi(rst+\mu r) + \lambda(p+\alpha)r + \sigma = o,$	[14]
. 333	$\Pi rst + \lambda(p+\alpha)v + \sigma = o,$	[15]
. 433	$\Pi rst + \lambda(p+\alpha)(r+\beta) + \sigma = o,$	[14]
. 533	$\Pi rst + \lambda(p+\alpha)r + \sigma = o,$	[13]

D. mit einer achtpunctig osculirenden parabolischen Asymptote:

VIII 222	$\Pi(rst+\mu u) + \lambda w = o,$	[16]
. 322	$\Pi(rst+\mu(r+\alpha)) + \lambda w = o,$	[15]
. 422	$\Pi(rst+\mu r) + \lambda w = o,$	[14]
. 522	$\Pi(rst+\mu r) + \lambda(r+\alpha) = o,$	[13]
. 333	$\Pi(rst+\mu) + \lambda w = o,$	[14]
. 444	$\Pi rst + \lambda w = o,$	[13]
. 544	$\Pi rst + \lambda(p+\alpha) = o.$	[12]

E. mit einer neunpunctig osculirenden parabolischen Asymptote:

IX 222	$\Pi(rst+\mu u) + \lambda(p+\alpha) = o,$	[15]
. 322	$\Pi(rst+\mu(r+\beta)) + \lambda(p+\alpha) = o,$	[14]
. 422	$\Pi(rst+\mu r) + \lambda(p+\alpha) = o,$	[13]
. 333	$\Pi(rst+\mu) + \lambda(p+\alpha) = o,$	[13]
. 444	$\Pi rst + \lambda(p+\alpha) = o.$	[12]

F. mit einer zehnpunctig osculirenden parabolischen Asymptote:

X 222	$\Pi(rst+\mu u) + \lambda = o,$	[14]
. 322	$\Pi(rst+\mu(r+\alpha)) + \lambda = o,$	[13]

*) Diese Gleichung enthält eine überzählige, nicht mitgerechnete Constante (85).

**) Auch hier ist eine überzählige Constante nicht mitgerechnet (85).

X 522	$\Pi(rst+\mu r) + \lambda = o,$	[12]
. 333	$\Pi(rst+\mu) + \lambda = o,$	[12]
. 555	$\Pi rst + \lambda = o.$	[11]

92. Auf diesem Wege können wir ohne Schwierigkeit weiter gehen und sowohl die Ordnung der Curve als die Ordnung der Osculation der parabolischen Asymptote beliebig ansteigen lassen. Hierbei gelangen wir zu dem folgenden Resultate.

Nachdem wir für Curven der $n.$ Ordnung das Schema für alle möglichen Fälle in Beziehung auf die verschiedenen Ordnungen für die Annäherung der Curven an ihre n geradlinigen Asymptoten gebildet haben, erhalten wir sogleich das Schema der möglichen Fälle, in welchen zwei Asymptoten unendlich weit gerückt sind, und durch parabolische Asymptoten vertreten werden. Ist nemlich unter diesen parabolischen Asymptoten die osculirende eine $2m$punctig oder $(2m+1)$punctig osculirende, so brauchen wir bloss in dem allgemeinen Schema diejenigen Combinationen zu nehmen, in welchen bezüglich das Ziffern-Paar $m\ m$ und $m\ m+1$ vorkommt und erhalten alsdann, wenn wir dieses Ziffern-Paar ganz ausser Acht lassen, das Schema für die verschiedenen möglichen Fälle, welche, in Beziehung auf die Ordnung des Contactes, an die noch übrigen $(n-2)$ geradlinigen Asymptoten der Curve Statt finden können.

Es würde, wenn alle verschiedenen Fälle moglich wären, die Anzahl derselben der Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen von $(n-1)$ Elementen zu $(n-2)$ gleich sein. Erstens aber fordern die Symbole $m\ m$ und $m\ m+1$, welche bezüglich die parabolische Asymptote vertreten, nach der 28. Nummer gewisse Combinationen rücksichtlich der Ordnung des Contactes der geradlinigen Asymptoten, und dann scheiden sich, nach der 34. Nummer, unmögliche Combinationen unmittelbar aus. (Vergleiche die folgende Nummer). Dann zweitens aber scheiden sich, nach der 34. Nummer, noch andere Fälle als unmögliche aus, weil das, die parabolische Asymptote vertretende Ziffern-Paar mit andern Ziffern zusammengestellt unmögliche Combinationen geben kann. (Vergleiche die 94. Nummer).

93. Wenn eine Curve von einer beliebigen $n.$ Ordnung unter ihren unendlich vielen parabolischen Asymptoten eine nur fünfpunctig osculirende hat, so hat sie ausserdem, wenn überhaupt geradlinige Asymptoten vorhanden sind, unter diesen nothwendig eine nicht osculirende. Die übrigen $(n-3)$ geradlinigen Asymptoten können alle möglichen Combinationen, in Beziehung auf die Steigerung der Ordnung des Contactes, darbieten. Wir erkennen hierin sogleich, wie die parabolische Asymptote, bei der Bestimmung der verschiedenen möglichen Fälle, die Stelle des Systems einer gewöhnlichen und einer dreipunctig osculirenden geradlinigen Asymptote einnimmt. Auszuschliessen von den möglichen Fällen sind indess, wenn n grösser als 5 ist, alle diejenigen Combinationen, welche für sich allein schon, nach der 34. Nummer, als unmögliche sich darstellen. So zum Beispiel ist, für $n=6$, der dem Symbole V6652 entsprechende Fall, wegen der Combination 665, nicht möglich.

Abstrahiren wir für einen Augenblick von den hiernach auszuschliessenden Combinationen, so erhalten wir überhaupt eine Anzahl von

$$\frac{(n-1)n\ \ldots\ (2n-5)}{1\ .\ 2\ \ldots\ (n-3)} \qquad (1)$$

verschiedenen Fällen, was sich sogleich ergibt, wenn wir erwägen, dass diese Anzahl der Anzahl aller Combinationen zu $(n-3)$ der $(n-1)$ Elemente $2, 3 \ldots n$ gleich ist. Was die auszuschliessenden Fälle betrifft, so wollen wir, indem wir beispielsweise $n=8$ setzen, uns zur 37. Nummer zurückwenden. Es ergeben sich hier

$$1 + 6 + \frac{6\ .\ 7}{1\ .\ 2} \equiv \frac{7\ .\ 8}{1\ .\ 2}$$

unmögliche Fälle, welche bezüglich den das Unmögliche bedingenden Combinationen 88887, 8887 und 887 entsprechen, ferner $3(1+5)$, welche den sechs letzten Combinationen der ersten Vertical-Columne, und endlich 3^2, welche den neun letzten Combinationen der zweiten Vertical-Columne entsprechen, also zusammen

$$\frac{7 \,.\, 8}{1 \,.\, 2} + 3 \,.\, 6 + 3^2 = 55.$$

Für einen beliebigen Werth von n ergibt sich, wie man bald erkennt, und ganz auf gleiche Weise, wie wir zu dem ersten Ausdruck auf der 33. Seite gekommen sind:

$$\frac{(n-1)n \,.\,.\,.\, (2n-8)}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, (n-6)} + 3 \,.\, \frac{(n-2)(n-1) \,.\,.\,.\, (2n-10)}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, (n-7)} + \,.\,.$$

$$+ 3^{n-8} \,.\, \frac{7 \,.\, 8}{1 \,.\, 2} + 3^{n-7} \,.\, 6 + 3^{n-6}. \qquad (2)$$

Wenn die Curve eine sechspunctig osculirende parabolische Asymptote hat, so hat sie ausserdem entweder zwei oder keine nicht osculirenden geradlinigen Asymptoten und in dem letztgenannten Falle immer eine dreipunctig osculirende. Hierin liegen die einzigen Beschränkungen rücksichtlich der Ordnung des Contactes der verschiedenen geradlinigen Asymptoten. Ausser diesen Beschränkungen ist jede Combination möglich, welche sich nicht an und für sich schon nach der 28. und 34. Nummer als unmöglich darstellt. Abstrahiren wir auch hier zuvörderst von den auszuschliessenden Combinationen, so ist die Anzahl solcher Fälle, in welchen zwei nicht osculirende Asymptoten vorkommen, gleich der Anzahl der Combinationen derselben $(n-1)$ Elemente als im vorigen Falle, mit Wiederholungen, zu $(n-4)$, also

$$\frac{(n-1)n \,.\,.\,.\, (2n-6)}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, (n-4)}.$$

Die Anzahl der Fälle mit einer dreipunctig osculirenden Asymptote ist gleich der Anzahl der Combinationen der $(n-2)$ Elemente $3, 4 \,.\,.\, n$, mit Wiederholungen, zu $(n-3)$, also:

$$\frac{(n-2)(n-1) \,.\,.\,.\, (2n-6)}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, (n-3)}.$$

Summiren wir die beiden vorstehenden Ausdrücke, so erhalten wir den Ausdruck (1). Um die Anzahl der auszuschliessenden Fälle zu bestimmen, wollen wir zuvörderst $n=8$ nehmen. Unmöglicher Fälle mit zwei gewöhnlichen Asymptoten, gibt es alsdann

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 6 \\ +3 \,.\, 1 \end{array}\right\} = 7 + 3 \,.\, 1,$$

unmöglicher Fälle mit einer dreipunctig osculirenden Asymptote

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 5 + \frac{5 \,.\, 6}{1 \,.\, 2} \\ + 3 \;(1 + 4) \\ + 3^2 \,.\, 1 \end{array}\right\} = \frac{6 \,.\, 7}{1 \,.\, 2} + 3 \,.\, 5 + 3^2.$$

Summiren wir diese beiden Ausdrücke, so kommt:

$$\frac{7 \,.\, 8}{1 \,.\, 2} + 3 \,.\, 6 + 3^2 = 55.$$

Die Anzahl der auszuschliessenden Fälle mit einer bloss fünfpunctig osculirenden parabolischen Asymptote ist also der Anzahl der auszuschliessenden Fälle mit einer sechspunctig osculirenden parabolischen Asymptote gleich. Und diess gilt offenbar für jeden Werth von n. Es ist also bewiesen, dass wir auch im letztgenannten Falle die Anzahl der verschiedenen möglichen Fälle erhalten, wenn wir von dem Ausdrucke (1) den Ausdruck (2) abziehn.

Wenn die Curve eine siebenpunctig osculirende parabolische Asymptote hat, so hat sie überdiess entweder zwei oder keine nicht osculirenden geradlinigen Asymptoten,

und im letztern Falle nothwendig zwei dreipunctig osculirende. Die parabolische Asymptote wird hier durch das Symbol 43 vertreten. Schliessen wir vorerst noch keine Fälle aus, so ergibt sich die folgende Anzahl:

$$\frac{(n-1)n\ldots(2n-6)}{1\,.\,2\ldots(n-4)}+\frac{(n-2)(n-1)\ldots(2n-7)}{1\,.\,2\quad\ldots(n-4)}. \tag{3}$$

Für $n=8$ beträgt die Anzahl der auszuschliessenden Fälle mit gewöhnlichen Asymptoten

$$\left.\begin{array}{r}1+6\\+3.1\end{array}\right\}\equiv 7+3,$$

ohne gewöhnliche Asymptoten

$$\left.\begin{array}{r}1+5\\+3.1\end{array}\right\}\equiv 6+3.$$

Für einen beliebigen Werth von n erhält man

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)n\,.\,.\,(2n-9)}{1\,.\,2\,.\,.\,(n-7)}&+3\frac{(n-2)(n-1)\,.\,.\,(2n-11)}{1\,.\,2\quad.\,.\,(n-8)}+\,.\,.\\&+3^{n-8}.\,7+3^{n-7},\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{(n-2)(n-1)\,.\,.\,(2n-10)}{1\,.\,2\quad.\,.\,(n-7)}&+3\frac{(n-3)(n-2)\,.\,.\,(2n-12)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(n-8)}+\,.\,.\\&+3^{n-8}.\,6+3^{n-7}.\end{aligned} \tag{5}$$

Die möglichen Fälle erhalten wir also, wenn wir die Summe der Ausdrücke (4) und (5) von dem Ausdrucke (3) abziehn.

Wenn die Curve eine achtpunctig osculirende parabolische Asymptote hat, so ist die Anzahl der verschiedenen möglichen Fälle der eben bestimmten gleich. Eine solche Asymptote fordert nemlich zwei gewöhnliche, oder drei dreipunctig, oder endlich zwei vierpunctig osculirende geradlinige Asymptoten. Der Ausdruck (3) erhält hiernach, statt des zweiten Gliedes die folgenden beiden Glieder

$$\frac{(n-2)(n-1)\,.\,.\,(2n-8)}{1\,.\,2\quad.\,.\,(n-5)}+\frac{(n-3)(n-2)\,.\,.\,(2n-8)}{1\,.\,2\quad.\,.\,(n-4)},$$

von welchen das erste die Anzahl der Combinationen mit drei dreipunctig und das zweite die Anzahl der Combinationen mit zwei vierpunctig osculirenden Asymptoten anzeigt. Die Summe dieser beiden Glieder ist aber dem eben genannten zweiten Gliede des Ausdruckes (3) gleich. Was die auszuschliessenden Fälle betrifft, so ist die Anzahl solcher Fälle, in welchen zwei gewöhnliche Asymptoten vorkommen, der vorhin bestimmten Anzahl gleich. Nehmen wir $n=8$, so ist nur ein Fall mit drei dreipunctig osculirenden Asymptoten unmöglich, nemlich der dem Symbole VIII 887333 entsprechende, während

$$\left.\begin{array}{r}1+4\\+3.1\end{array}\right\}\equiv 5+3$$

Fälle mit zwei vierpunctig osculirenden Asymptoten unmöglich sind. Bei beliebiger Annahme von n sind überhaupt

$$\frac{(n-2)(n-1)\,.\,.\,(2n-11)}{1\,.\,2\quad.\,.\,(n-8)}+\,.\,.\,3^{n-9}.\,7+3^{n-8}$$

Fälle mit drei dreipunctig und

$$\frac{(n-3)(n-2)\,.\,.\,.\,(2n-11)}{1\,.\,2\quad.\,.\,.\,(n-8)}+\,.\,.+3^{n-9}.\frac{6\,.\,7}{1\,.\,2}+3^{n-8}.\,5+3^{h-7}$$

Fälle mit zwei vierpunctig osculirenden Asymptoten auszuschliessen. Wenn wir die vorstehenden beiden Ausdrücke summiren, so erhalten wir den Ausdruck (5).

Ich verfolge diesen Gegenstand von untergeordneter Wichtigkeit hier nicht weiter. Wir finden keine Schwierigkeit wenn wir erwägen, dass eine $(2g-1)$punctig osculirende parabo-

lische Asymptote, nothwendig eine der (g—1) Combinationen 22, 333, 4444 . . und zuletzt (g—2)mal das Symbol (g—1) und (g—1)mal das Symbol g fordert, während bei einer 2$g$punctig osculirenden parabolischen Asymptote, die letzten beiden Combinationen, durch (g—1)mal das Symbol (g—1) und (g—2)mal das Symbol g vertreten werden. Ich mache nur noch darauf aufmerksam, dass man sich hiernach leicht davon überzeugt, wie die Anzahl der verschiedenen möglichen Fälle dieselbe bleibt, wenn die Osculation der parabolischen Asymptote von einer (2g—1)punctigen zu einer 2$g$punctigen ansteigt. Es ist jedoch zu bemerken, dass wir hierbei auf die nach der folgenden Nummer auszuschliessenden Fälle noch keine Rücksicht nehmen.

94. Keine Combination, welche nach der 34. Nummer sich als unmöglich darstellt, enthält (vorausgesetzt, dass wir Curven, welche wenigstens von der 5. Ordnung sind, betrachten) eine Ziffer die geringer ist als 4 und höchstens diese Ziffer ein einziges Mal. Deshalb sind auch dann erst, nach der Schluss-Bemerkung der 92. Nummer, neue Fälle als unmögliche abzusondern, wenn die Ordnung der Osculation für die parabolische Asymptote mindestens zu einer neunpunctigen ansteigt. Hier ergeben sich aber, indem wir das Symbol IX in 54 auflösen, nach der 31., 33., 35. und 37. Nummer, die folgenden Symbole, welche neue unmögliche Fälle anzeigen.

Für n=5 ein einziger Fall: IX 522.

Für n=6 drei Fälle: IX 6622

IX 6522

IX 5522.

Für n=7 neun Fälle:

IX 77722	IX 76622	IX 66622
IX 77522	IX 76522	IX 75522
IX 66522	IX 65522	IX 55522.

Für n=8 sieben und zwanzig Fälle:

IX 888822	IX 877722	IX 886622
IX 876622	IX 866622	IX 777722
IX 776622	IX 766622	IX 666622
IX 888522	IX 877522	IX 886522
IX 876522	IX 866522	IX 777522
IX 776522	IX 766522	IX 666522
IX 885522	IX 875522	IX 865522
IX 855522	IX 775522	IX 765522
IX 755522	IX 655522	IX 555522. *)

Wenn wir Curven mit einer zehnpunctig osculirenden parabolischen Asymptote betrachten, so ergibt sich eine gleiche Anzahl von neuen unmöglichen Fällen, als bei einer bloss neunpunctig osculirenden; und man überzeugt sich leicht, dass man die diesen Fällen entsprechenden Symbole sogleich erhält, wenn man in den vorstehenden Schemas IX mit X, und die letzte 5 (wenn überhaupt diese Ziffer vorkommt) mit 4 vertauscht.

*) Wir haben für jeden Werth von n die unmöglichen Fälle in zwei Gruppen abgesondert. In jedem Falle der ersten Gruppe gehört nur eine Ziffer des in 54 aufgelösten Symbols IX der das Unmögliche bedingenden Combination an; so zum Beispiel löset sich IX 6622 in 665.422 auf und 665 bedingt hier das Unmögliche. In jedem Falle der zweiten Gruppe gehören beide Ziffern 54 der das Unmögliche bedingenden Combination an, so zum Beispiel löset sich IX 6522 in 6554.22 auf, wobei 6554 das Unmögliche hervorruft.

Wir sehen hieraus, dass die Schluss-Bemerkung der vorigen Nummer auch ohne die beigefügte Beschränkung gilt, wenn g nicht grösser als 5 ist; wahrscheinlich gilt sie für jeden beliebigen Werth von g.

95. Wenn eine Curve zwei Gruppen parabolischer Asymptoten hat, so befindet sich in jeder der beiden Gruppen eine, im Allgemeinen fünfpunctig osculirende. Schreiben wir die Gleichungen zweier Parabeln auf folgende Weise:

$$\Pi_p = o, \qquad \Pi_r = o,$$

indem wir durch die Marken p und r anzeigen, dass die Durchmesser-Richtung der beiden Parabeln den beiden geraden Linien P und R bezüglich parallel ist, so ist folgende Gleichung:

$$\Pi_p \Pi_r \Theta_{n-4} + \mu(p+\alpha)(r+\beta)\Theta'_{n-4} + \lambda\Omega_{n-4} = o,$$

die allgemeine Gleichung solcher Curven der n. Ordnung, in welcher Π_p und Π_r als die beiden fünfpunctig osculirenden parabolischen Asymptoten in Evidenz treten. Die Anzahl der Constanten beträgt, indem wir deren vier auf jede der beiden Functionen Π rechnen:

$$\frac{n(n+3)}{2} - 2$$

und ist die gerade nothwendige, weil die Bedingung zweier Gruppen parabolischer Asymptoten die allgemeine Constanten-Anzahl für eine Curve der n. Ordnung offenbar um zwei Einheiten reducirt.

96. Die Ordnung der Osculation der beiden parabolischen Asymptoten Π_p und Π_r kann bei neuer Particularisation der Curve höher ansteigen. Wir wollen uns hier darauf beschränken, die Gleichungen der verschiedenen Fälle bei Curven der 4. und 5. Ordnung zusammenzustellen, indem wir, wie in der 90. Nummer vor jeder Gleichung die Ordnung der Osculation anzeigen, und die Anzahl der nothwendigen Constanten, welche sie enthält, ihr nachsetzen.

Bei Curven der 4. Ordnung mit zwei Gruppen parabolischer Asymptoten gibt es 4 einzelne Fälle:

V	V	$\Pi_p\Pi_r + \mu(p+\alpha)(r+\beta) + \lambda = o,$	[12]
VI	VI	$\Pi_p\Pi_r + \mu u = o,$	[11]
VII	VI	$\Pi_p\Pi_r + \mu(p+\alpha) = o,$	[10]
VIII	VIII	$\Pi_p\Pi_r + \mu = o.$	[9]

Die Curve der 5. Ordnung mit zwei Gruppen parabolischer Asymptoten haben überdiess immer auch noch eine geradlinige Asymptote. Indem wir die verschiedene Ordnung der Annäherung an diese ebenfalls unterscheiden, ergeben sich die nachstehenden einzelnen Fälle:

V	V	2	$\Pi_p\Pi_r s + \mu(p+\alpha)(r+\beta)u + \lambda w = o,$	[18]
.	.	3	$\Pi_p\Pi_r s + \mu(p+\alpha)(r+\beta)(s\gamma+) + \lambda w = o,$	[17]
.	.	4	$\Pi_p\Pi_r s + \mu(p+\alpha)(r+\beta)s + \lambda w = o,$	[16]
.	.	5	$\Pi_p\Pi_r s + \mu(p+\alpha)(r+\beta)s + \lambda(s+\delta) = o,$	[15]
VI	V	2	$\Pi_p\Pi_r s + \mu(\Pi_p+\varkappa u)(r+\beta) + \lambda(p+\alpha) = o,$	[17]
VI	VI	3	$\Pi_p\Pi_r s + \mu\Omega_2 = o,$	[16]
.	.	4	$\Pi_p\Pi_r s + \mu(s+\gamma)u + \lambda = o,$	[15]
.	.	5	$\Pi_p\Pi_r s + \mu s u + \lambda = o,$	[14]
VII	VI	3	$\Pi_p\Pi_r s + \mu(p+\alpha)u + \lambda = o,$	[15]
.	.	4	$\Pi_p\Pi_r s + \mu(p+\alpha)(s+\gamma) + \lambda = o,$	[14]
.	.	5	$\Pi_p\Pi_r s + \mu(p+\alpha)s + \lambda = o,$	[13]
VII	VII	3	$\Pi_p\Pi_r s + \mu(p+\alpha)(r+\beta) + \lambda = o,$	[14]
VIII	VIII	4	$\Pi_p\Pi_r s + \mu u = o,$	[13]
.	.	5	$\Pi_p\Pi_r s + \mu(s+\delta) = o,$	[12]

IX VIII 4 $\quad \Pi_p \Pi_r s + \mu(p+\alpha) = o,$ [12]

X X 5 $\quad \Pi_p \Pi_r s + \mu = o.$ [11]

97. Es kann eine Curve höherer Ordnung auch drei und mehrere Gruppen parabolischer Asymptoten haben, in deren jeder alsdann eine osculirende sich befindet. Nach der frühern Bezeichnung ist

$$\Pi_p \Pi_r \Pi_u + \mu(p+\alpha)(r+\beta)(u+\gamma)v + \lambda\Omega_2 = o$$

die allgemeine Gleichung der Curven der 6. Ordnung mit drei Gruppen parabolischer Asymptoten, und enthält die gerade nothwendige Anzahl von $\left(\frac{6\,.\,9}{1\,.\,2} - 3\right)$ Constanten. Es treten in derselben Π_p, Π_r und Π_u als die drei fünfpunctig osculirenden Parabeln in Evidenz.

Durch schrittweise Particularisationen dieser Gleichung, die ich jetzt nicht mehr auszuführen brauche, erhalten wir diejenigen einzelnen Fälle, in welchen die Ordnung der Osculation der drei, im Allgemeinen nur fünfpunctig, osculirenden Parabeln höher ansteigt, und die wir in folgendem Schema zusammenfassen können.

V V V	VI VI VI	VIII VII VI	X VIII VIII
VI V V	VII VI VI	IX VII VI	XI VIII VIII
VII V V	VIII VI VI	X VII VI	XII VIII VIII
VIII V V	IX VI VI	XI VII VI	IX IX VIII
IX V V	X VI VI	XII VII VI	X X X
X V V	XI VI VI	VII VII VII	XI X X
XI V V	XII VI VI	VIII VIII VIII	XII XII XII.
XII V V	VII VII VI	IX VIII VIII	

Wenn wir in einem beliebigen der vorstehenden Symbole jede der drei durch römische Ziffern bezeichneten Zahlen in zwei andere, die, je nachdem jene eine gerade oder ungerade ist, einander gleich oder um eine Einheit von einander verschieden sind, auflösen und diese durch zwei arabische Ziffern bezeichnen, erhalten wir stets eine mit Rücksicht auf die 28. und 34. Nummer mögliche Combination; stets aber eine unmögliche, wenn wir auf gleiche Weise ein unter den vorstehenden nicht befindliches Symbol, wie zum Beispiel VI VI V und IX IX IX, welche bezüglich durch 333332 und 555444 zu ersetzen sind, behandeln.

98. Wenn wir die Schluss-Bemerkung der vorigen Nummer umkehren und in einem Schema möglicher Fälle bei geradlinigen Asymptoten eine beliebige Combination nehmen, so erhalten wir im Allgemeinen mehrere mögliche Fälle mit parabolischen Asymptoten. Ein Beispiel gibt hier die beste Erläuterung. Indem wir in der möglichen Combination

6655322

66, 65, 55, 32 bezüglich durch XII, XI, X und V ersetzen, ergeben sich unter den übrigen möglichen Fällen auch die folgenden beiden mit drei Gruppen parabolischen Asymptoten:

XII X V 2, XI XI V 2.

Auf diesem Wege tritt uns eine Reihe einzelner Sätze über die Ordnung der Osculation parabolischer Asymptoten entgegen, ich begnüge mich mit ein paar Einzelnheiten.

Eine algebraische Curve, welche eine Gruppe parabolischer Asymptoten hat, unter denen sich (in dem allgemeinen Falle) eine nur fünfpunctig osculirende befindet, hat überdiess nothwendig noch eine zweite Gruppe solcher parabolischer Asymptoten, unter denen sich eine nur fünfpunctig osculirende befindet, oder eine reelle nicht osculirende geradlinige Asymptote.

Es ist dieser Satz demjenigen analog, dass, wenn nur geradlinige Asymptoten vorhanden sind, eine nicht osculirende immer eine zweite bedingt. Aehnlich ist der folgende Satz abgeleitet.

Eine Curve, welche zwei siebenpunctig osculirende Parabeln hat, hat überdiess wenigstens

1) zwei nicht osculirende, oder 2) eine dreipunctig osculirende geradlinige Asymptote, oder 3) zwei fünfpunctig, oder 4) eine sechspunctig, oder 5) eine zweite siebenpunctig osculirende parabolische Asymptote, oder endlich 6) eine nicht osculirende geradlinige und eine fünfpunctig osculirende parabolische Asymptote.

Weil für eine Curve der n. Ordnung die Combination

$$n \; n \; n-1$$

unmöglich ist, kann auch eine Curve dieser Ordnung, neben einer $2n$punctig osculirenden parabolischen Asymptote keine $(2n-1)$punctig, $(2n-2)$punctig und selbst keine $(2n-3)$punctig osculirende haben. Weil ferner die folgenden beiden Combinationen

$$n \; n-1 \; n-1 \; n-2 \qquad\qquad n-1 \; n-1 \; n-1 \; n-2$$

unmögliche sind, kann eine Curve der n. Ordnung weder neben einer $(2n-1)$punctig noch einer $(2n-2)$punctig osculirenden parabolischen Asymptote eine $(2n-3)$punctig osculirende haben. Beispiele geben die vorhergehenden Nummern in hinlänglicher Anzahl.

§. 4.

Paare reeller oder imaginärer parallelen Asymptoten.

99. Den Gang der Untersuchung der vorhergehenden Paragraphen können wir in folgenden Haupt-Momenten zusammenfassen. Es lässt sich im Allgemeinen die Gleichung der Curven der n. Ordnung unter der folgenden Form schreiben:

$$p\Omega_{n-1} + \mu\Omega_{n-2} = 0 \tag{1}$$

wobei die Function p einer geradlinigen Asymptote der Curve entspricht und vollkommen und auf lineare Weise bestimmt ist, sobald wir unter den n möglichen Asymptoten-Richtungen eine einzelne auswählen. Diese Asymptote kann reell (§. 1.) und imaginär (§. 2.) sein. In dem ersten Falle steht sie selbstständig für sich da, in dem letzten Falle bedingt sie eine zweite imaginäre Asymptote und somit hat sie auf die Form der Function Ω_{n-1} Einfluss. Dadurch werden wir veranlasst statt p ein Product zweier linearen Functionen in der Gleichung der Curve in Evidenz treten zu lassen:

$$\Theta_2\Omega'_{n-2} + \mu\Omega_{n-2} = 0. \tag{2}$$

Hierbei ist Θ_2 immer reell und bezieht sich entweder auf zwei reelle Asymptoten oder auf einen Asymptotenpunct. Die vorstehende Gleichung behält dieselbe Form, wenn wir zu Θ_2 eine willkührliche Constante hinzufügen; wir können sie alsdann auf folgende Weise schreiben:

$$\Omega_2\Omega'_{n-2} + \mu\Omega_{n-2} = 0. \tag{3}$$

Die Function Ω_2 entspricht Ellipsen oder Hyperbeln.

Zwischen den beiden allgemeinen Fällen ist der Uebergangs-Fall dadurch bezeichnet, dass die Bestimmung der Function p dadurch illusorisch wird, dass für diejenige Constante, von der sie auf lineare Weise abhängt, unendliche Werthe sich ergeben. Dann können die Formen (1) und (2) nicht mehr Statt finden. Die Form (3) particularisirt sich in die nachstehende:

$$\Pi\Omega'_{n-2} + \mu\Omega_{n-1} = 0, \tag{4}$$

indem die an die Stelle von Ω_2 getretene Function Π nun Parabeln entspricht (§. 3.).

Ein letzter, mehr noch untergeordneter Fall, der in Beziehung auf die Bestimmung der Function p Statt finden kann und mit dem wir uns im gegenwärtigen Paragraphen zu beschäftigen haben, ist derjenige, wo der Werth der eben erwähnten Constanten, von welcher diese Function abhängt, unbestimmt wird, weil er unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint. Dann lässt sich die Gleichung der Curve auf unendlichmalige Weise auf die Formen (1) und (2) bringen, wobei, was die letzte Form betrifft, die Function Θ_2 ein System von zwei parallelen geraden Linien bezeichnet. Ein solches System wird alsdann auch durch die Function Ω_2, welche

von Θ_2 nur um eine Constante verschieden ist, angezeigt, so dass die Gruppe von unendlich vielen Kegelschnitten, hier durch unendlich viele Systeme zweier parallelen geraden Linien, deren Richtung immer dieselbe bleibt, vertreten wird. Eines dieser Systeme besteht aus zwei parallelen Asymptoten der Curve. Diese können übrigens reell und imaginär sein und bei einer neuen Particularisation auch zusammenfallen.

Hiernach hätten wir denn alle möglichen Fälle erschöpft, welche eine Curve der n. Ordnung in Beziehung auf Doppel-Asymptoten darbieten kann. Die Function Ω_2 in der Gleichung (3) bezog sich nach einander auf Hyperbeln und Ellipsen, ein System von zwei reellen geraden Linien und einen Punct, auf eine Parabel, auf ein System von zwei reellen und von zwei imaginären Parallelen und endlich auf eine Doppellinie; die einzigen Fälle, welche bei Curven zweiter Ordnung Statt finden können.

100. In demjenigen Falle, der Gegenstand dieses Paragraphen werden soll, können wir, nach dem Vorbemerkten,

$$\Omega_2 \equiv (p^2-\lambda) \equiv (p+\sqrt{\lambda})(p-\sqrt{\lambda})$$

setzen. Indem wir alsdann, was im Allgemeinen erlaubt ist, Ω_{n-2} mit Θ_{n-2} vertauschen, ergibt sich für die Gleichung der Curve:

$$(p^2-\lambda)\Theta_{n-2} + \mu\Omega_{n-2} = o. \tag{1}$$

Es ist λ eine willkührliche Constante. Denn diese Gleichung geht in die folgende über

$$(p^2-\lambda')\Theta_{n-2} + \mu'\Omega''_{n-2} = o, \tag{2}$$

wenn wir λ mit λ' und demnach $\mu\Omega_{n-2}$ mit

$$\mu\Omega_{n-1} + (\lambda'-\lambda)\Theta_{n-2} \equiv \mu'\Omega'_{n-2}$$

vertauschen. Wir können also zwei solche gerade Linien, welche zu beiden Seiten der geraden Linie P gleich weit von ihr abstehen, von Vorne herein beliebig annehmen und dann diesen entsprechend die Function Ω_2 bestimmen. Insbesondere können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, jene beiden geraden Linien in der Linie P zusammenfallen lassen. Dann ergibt sich, indem wir λ' verschwinden lassen, folgende Gleichung

$$p^2\Theta_{n-2} + \mu'\Omega''_{n-2} = o, \tag{3}$$

welche die, einer zweimaligen Particularisation der Curve entsprechende, gerade nothwendige Anzahl von Constanten hat, nemlich $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 2\right)$.

Wir können aber auch der allgemeinen Gleichung der fraglichen Curven noch eine andere Form geben, welche unserer Absicht, die Natur der unendlichen Zweige zu discutiren, näher liegt. Das Characteristische der Form der Gleichung (1) liegt überhaupt darin, dass jede mit P parallele gerade Linie die Curve nur in $(n-2)$ Puncten schneidet, weil zwei Durchschnittspuncte unendlich weit liegen. Bestimmen wir aber λ', was immer auf einzige Weise möglich ist, dadurch dass

$$\mu'\Omega''_{n-2} \equiv \mu'(p+\alpha)\Theta_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4},$$

so kommt für die Gleichung der Curve, wenn wir alle Accente unterdrücken:

$$(p^2-\lambda)\Theta_{n-2} + \mu(p+\alpha)\Theta_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4} = o. \tag{4}$$

Dann aber schneidet jede der beiden geraden Linien, welche dem Factor $(p^2-\lambda)$ entsprechen, die Curve nur in $(n-3)$ Puncten, weil auf jeder drei Durchschnittspuncte unendlich weit liegen. Diese beiden geraden Linien, welche auf einzige Weise bestimmt sind und also in ausgezeichneter Beziehung zur Curve stehen, sind zwei parallele Asymptoten derselben. Die vorstehende Gleichung enthält, wie die Gleichung (3), die gerade nothwendige Anzahl von Constanten und kann mit derselben Allgemeinheit als jene den Untersuchungen dieses Paragraphen zu Grunde gelegt werden.

Je nachdem die nun vollkommen bestimmte Constante λ positiv oder negativ ist, sind

die beiden parallelen Asymptoten reell oder imaginär. Um diese Fälle zu unterscheiden, haben wir in den folgenden beiden Gleichungen λ bezüglich durch ξ^2 und $(-\xi^2)$ ersetzt:

$$(p+\xi)(p-\xi)\Theta_{n-2} + \mu(p+\alpha)\Theta_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4} = o, \qquad (5)$$

$$(p^2+\xi^2)\Theta_{n-2} + \mu(p+\alpha)\Theta_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4} = o. \qquad (6)$$

Der Uebergangs-Fall, in welchem die beiden parallelen Asymptoten zusammenfallen, ist durch das Verschwinden von ξ angezeigt. Diesem entspricht die folgende Gleichung

$$p^2\Theta_{n-2} + \mu(p+\alpha)\Theta_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4} = o, \qquad (7)$$

welche, wie die vorstehenden, die gerade nothwendige Anzahl von Constanten hat, nemlich $\left(\frac{n(n+3)}{1.2} - 3\right)$.

101. Um die Natur einer Curve mit zwei parallelen Asymptoten zu veranschaulichen, wollen wir eine geometrische Gränz-Betrachtung zu Hülfe nehmen. Wir wollen nemlich von einer beliebigen Curve mit einem Doppelpuncte ausgehen, und uns durch diesen Punct eine Reihe von geraden Linien, welche eine gegebene gerade Linie schneiden, gezogen denken. Nehmen wir alsdann, ausserhalb der Ebene der Curve, irgend einen Punct beliebig als Projections-Mittelpunct an und als Ebene auf welche projicirt wird, diejenige welche ursprünglich mit der Ebene der Figur zusammenfallend um die gegebene gerade Linie als um eine feste Axe continuirlich sich dreht, so behält im perspectivischen Bilde die Curve immer ihren Doppelpunct und die durch denselben gehenden geraden Linien schneiden die gegebene immer in denselben Puncten. Der Doppelpunct rückt, bei gehöriger Drehung der Ebene des Bildes, immer weiter und wenn zuletzt diese Ebene derjenigen geraden Linie parallel wird, welche den Projections-Mittelpunct mit dem ursprünglichen Doppelpuncte verbindet, so werden alle die fraglichen geraden Linien mit der eben genannten, und also auch unter sich, parallel: es hat alsdann die neue Curve einen Doppelpunct, welcher nach bestimmter Richtung unendlich weit liegt.

Auf jeder geraden Linie, welche durch einen Doppelpunct geht, fallen in diesem Puncte zwei Durchschnittspuncte mit der Curve zusammen und nur auf zweien derselben, den beiden Tangenten in demselben, fällt mit den beiden noch ein dritter Durchschnittspunct zusammen. Von solchen drei Durschnittspuncten ist einer als demjenigen Zweige, der berührt wird, fremd anzusehen und hat auf die Ordnung der Annäherung keinen Einfluss. So ist auch in dem Falle, dass der Doppelpunct nach gegebener Richtung unendlich weit gerückt ist, eine beliebige gerade Linie, welche diese Richtung hat, keine Asymptote mehr, obgleich auf ihr in unendlicher Entfernung zwei Durchschnittspuncte zusammenfallen. Auf jeder der beiden Asymptoten fallen solcher Durchschnitte drei zusammen, darum aber ist die Annäherung derselben an die Curve doch nicht von einer höhern Ordnung, als in dem allgemeinen Falle einer Asymptote, der keine andere parallel ist, und auf der nur zwei Durchschnitte in unendlicher Entfernung zusammenfallen.

Wir können also sagen, dass eine Curve mit zwei parallelen Asymptoten nach der Richtung dieser Asymptoten in unendlicher Entfernung einen Doppelpunct habe. Wenn die beiden parallelen Asymptoten imaginär sind, so ist der unendlich weit liegende Doppelpunct ein isolirter, conjugirter Punct der Curve. Wenn insbesondere die beiden parallelen Asymptoten in dieselbe gerade Linie zusammenfallen, so nähern sich dieser geraden Linie im Allgemeinen zwei Zweige der Curve, um auf ihr in unendlicher Entfernung eine Spitze, einen Rückkehrpunct, zu bilden.

102. In particulären Fällen können die beiden parallelen Asymptoten einzeln, oder auch beide zugleich, mit der Curve einen innigern Contact haben. Wenn auf einer von zwei parallelen Asymptoten m Durchschnitte mit der Curve unendlich weit liegen, so müssen wir

den Contact, um die Ordnung desselben in Uebereinstimmung mit dem Frühern zu bezeichnen, einen $(m-1)$punctigen nennen. Hiernach kann, auf jeder der beiden parallelen Asymptoten, unabhängig von der andern, der Contact von einem gewöhnlichen bis zu einem $(n-1)$punctigen ansteigen, wenn n die Ordnung der Curve bezeichnet und die beiden parallelen Asymptoten reell sind und nicht zusammenfallen.

Für die Curven der 4. und 5. Ordnung wollen wir die, den verschiedenen möglichen Fällen entsprechenden, Gleichungen zusammenstellen, hierbei aber bloss auf die beiden parallelen Asymptoten Rücksicht nehmen. Nach jeder Gleichung ist die nothwendige Constanten-Anzahl, vor jeder Gleichung die Ordnung des Contactes für die beiden parallelen Asymptoten angegeben.

Curven der 4. Ordnung:

22	$(p^2-\xi^2)qr + \mu(p+\alpha)s + \lambda = o,$	[12]
32	$(p^2-\xi^2)qr + \mu(p+\xi)s + \lambda = o,$	[11]
33	$(p^2-\xi^2)\Omega_2 + \mu(p+\alpha) = o.$	[10]

Curven der 5. Ordnung:

22	$(p^2-\xi^2)\Theta_3 + \mu(p+\alpha)rs + \lambda w = o,$	[18]
32	$(p^2-\xi^2)\Theta_3 + \mu(p+\xi)rs + \lambda w = o,$	[17]
42	$(p^2-\xi^2)\Theta_3 + \mu(p+\xi)rs + \lambda(p+\alpha) = o,$	[16]
33	$(p^2-\xi^2)\Theta_3 + \mu(p+\alpha)(p+\beta)r + \lambda(p+\gamma) = o,$	[16]
43	$(p^2-\xi^2)\Theta_3 + \mu(p+\xi)(p+\alpha)r + \lambda(p+\gamma) = o,$	[15]
44	$(p^2-\xi^2)\Omega_3 + \mu(p+\alpha) = o.$	[14]

108. Wir wollen sogleich zu den allgemeinen Form-Bestimmungen übergehen. Wenn eine Curve der n. Ordnung zwei parallele Asymptoten hat, und diese beide $m$punctig osculirende sind, so erhalten wir, in der Voraussetzung, dass m eine gerade Zahl ist, die folgende Gleichung:

$$(p^2-\xi^2)[\Theta_{n-2} + \varrho\Theta_{n-4} + \cdot\cdot + \tau\Theta_{n-m}] + \mu(p+\alpha)\Theta_{n-m-1} + \lambda\Omega_{n-m-2} = o. \quad (1)$$

Wenn m eine ungerade Zahl ist, ergibt sich die folgende Gleichung:

$$(p^2-\xi^2)[\Theta_{n-2} + \varrho\Theta_{n-4} + \cdot\cdot + \tau\Theta_{n-m+1}] + \mu(p+\alpha)(p+\beta)\Theta_{n-m-1} + \lambda(p+\gamma)\Theta_{n-m-2}$$
$$+ \sigma\Omega_{n-m-3} = o. \quad (2)$$

Wenn auf den beiden Asymptoten die Ordnung der Osculation eine verschiedene ist, auf der einen eine $m$punctige, auf der andern eine $(m+m'\equiv m_,)$punctige, so müssen wir, zum Behuf unserer Form-Bestimmungen, wiederum unterscheiden ob m und $m_,$ gerade oder ungerade Zahlen sind. Ist m gerade, so muss in der Gleichung (1) der folgende Ausdruck

$$(p+\alpha)\Theta_{n-m-1} + \lambda\Omega_{n-m-2},$$

indem er zugleich m' Constante verliert, sich so particularisiren, dass er sich, wenn wir $p=\pm\xi$ setzen, auf den $(n-m_,-1)$. Grad reducirt. Dieser Bedingung entspricht, wenn erstens auch m' eine gerade Zahl bedeutet und also m und $m_,$ beide gerade sind, die folgende Form:

$$(p^2-\xi^2)[\Theta_{n-2} + \varrho\Theta_{n-4} + \cdot\cdot + \tau\Theta_{n-m}] + \mu(p\pm\xi)[\Theta_{n-m-1} + \nu\Theta_{n-m-3} + \cdot\cdot + \varphi\Theta_{n-m_,+1}]$$
$$+ \lambda(p+\alpha)\Theta_{n-m_,-1} + \sigma\Omega_{n-m_,-2} = o, \quad (3)$$

und wenn m' eine ungerade Zahl bedeutet und also m gerade und $m_,$ ungerade ist, die folgende Form:

$$(p^2-\xi^2)[\Theta_{n-2} + \varrho\Theta_{n-4} + \cdot\cdot + \tau\Theta_{n-m}] + \mu(p\pm\xi)[\Theta_{n-m-1} + \nu\Theta_{n-m-3} + \cdot\cdot + \varphi\Theta_{n-m_,}]$$
$$+ \lambda\Omega_{n-m_,-1} = o. \quad (4)$$

Wenn ferner m und $m_,$ ungerade sind, so particularisirt sich die Gleichung (2), nachdem sie m' Constante verloren hat, in die folgende:

$$(p^2-\xi^2)[\Theta_{n-2} + \varrho\Theta_{n-4} + \cdot\cdot + \tau\Theta_{n-m+1}] + \mu(p\pm\xi)[(p+\alpha)\Theta_{n-m-1} + \nu\Theta_{n-m-2} + \cdot\cdot + \varphi\Theta_{n-m_,}]$$
$$+ \lambda\Omega_{n-m_,-1} = o, \quad (5)$$

und wenn endlich m ungerade und $m_{,}$ gerade ist, kommt:

$$(p^2-\xi^2)[\Theta_{n-2}+\varrho\Theta_{n-4}+\cdots+\tau\Theta_{n-m-1}]+\mu(p\pm\xi)[(p+\alpha)\Theta_{n-m-1}+\nu\Theta_{n-m-2}+\cdots+\varphi\Theta_{n-m_{,}+1}]$$
$$+\lambda(p+\gamma)\Theta_{n-m_{,}-1}+\sigma\Omega_{n-m_{,}-2}=0. \qquad (6)$$

In jeder der vorstehenden sechs Gleichungen ist die Anzahl der Constanten die gerade nothwendige; sie beträgt:

$$\frac{n(n+3)}{2}-(m+m_{,}-2).$$

104. Wenn die beiden parallelen Asymptoten imaginär sind, so kann auch auf ihnen der Contact mit der Curve zu einer höhern Ordnung ansteigen, nur dass alsdann für beide die Ordnung des Contactes gleich bleibt. Die Gleichungen (3)—(6) verlieren ihre reelle Bedeutung, und nur die Gleichungen (1) und (2) können auf den fraglichen Fall übertragen werden, indem wir ξ mit $\xi\sqrt{-1}$ vertauschen.

105. Wir wollen, für unsere nächsten Absichten, p und irgend eine andere lineare Function als diejenigen beiden betrachten, von welchen alle übrigen Functionen abhängen, und hiernach voraussetzen, dass in jeder Function Ω der Exponent der höchsten Potenz von q der Einheit gleich sei.

Die folgende Gleichung stellt, bei überzähligen Constanten, eine Curve mit zwei parallelen Asymptoten dar:

$$(p^2-\xi^2)\Omega'_{n-2}+\mu\Omega_{n-2}=0.$$

Wenn wir $q=\infty$ setzen, so kommt, vorausgesetzt, dass alsdann p nicht auch unendlich wird,

$$\Omega_{n-2}:\Omega'_{n-2}=1,$$

und diese Voraussetzung ist statthaft für Puncte der Curve, denn es gibt ihre Gleichung alsdann

$$p=\pm\xi\sqrt{(1-\frac{\mu}{\xi^2})}.$$

Zugleich aber sehen wir, dass die Curven sich nur bis zu einer gewissen endlichen Gränze, wenn sie überhaupt unendliche Zweige hat, den beiden geraden Linien

$$p\pm\xi=0$$

annähert. Diese beiden geraden Linien werden dann erst Asymptoten der Curve, wenn q nur in der $(n-3)$. Potenz in der Function Ω_{n-2} vorkommt. Aus folgender Gleichung:

$$(p^2-\xi^2)\Omega'_{n-2}+\mu(p+\alpha)\Omega_{n-3}+\lambda\Omega_{n-4}=0,$$

ergibt sich für die fraglichen unendlichen Zweige:

$$p\mp\xi=-\frac{\mu(p+\alpha)}{p\pm\xi}\cdot q^{-1},$$

und also, weil hiernach $(p\mp\xi)$ unendlich klein wird:

$$p\mp\xi=\mp\frac{\mu(\alpha\pm\xi)}{2\xi}\cdot q^{-1}.$$

Die Annäherung ist also der Annäherung an eine gewöhnliche Asymptote gleich.

Legen wir, unbekümmert um überzählige Constante, die folgende Gleichung zu Grunde:

$$(p^2-\xi^2)\Omega_{n-2}+\mu(p+\xi)\Omega_{n-m}+\lambda\Omega_{n-m_{,}}=0, \qquad (1)$$

wobei wir $m_{,}>m$ und $m>2$ nehmen, so finden wir bei gleichem Verfahren:

$$(p-\xi)=\mu\frac{\Omega_{n-m}}{\Omega_{n-2}}=\mu q^{-(m-2)},$$

$$(p+\xi)=\lambda\frac{\Omega_{n-m_{,}}}{\Omega_{n-2}}=\lambda q^{-(m_{,}-2)}.$$

Es stellt aber die Gleichung (1) eine Curve dar, welche zwei solche parallele Asymptoten hat, von denen die erste eine $(m-2)$punctig und die zweite eine $(m_{,}-3)$punctig

osculirende ist. Bei beiden ist, wie bei nicht-parallelen Asymptoten, die Ordnung der Annäherung um eine Einheit geringer als die Anzahl der im Osculationspuncte sich vereinigenden consecutiven Durchschnitts-Puncte der Curve und ihrer Asymptote.

Was die Lage der unendlichen Zweige gegen zwei parallele Asymptoten betrifft, so erkennen wir diese aus den letzten beiden Gleichungen wie in der 42. Nummer und überhaupt verhält sich hier Alles gerade so, als wenn zwei gewöhnliche Asymptoten mit ihren unendlichen Zweigen die parallele Lage angenommen hätten, und um alle möglichen Lagen zu bestimmen, können wir von zwei parallelen Asymptoten jede, abgesehen von der andern, für sich allein betrachten.

106. Wenn eine Curve der n. Ordnung zwei parallele Asymptoten und mit einer derselben einen bloss gewöhnlichen Contact hat, so hat sie einen Contact derselben Ordnung mit jeder beliebigen Hyperbel, welche dieselbe Asymptote zu ihrer eigenen hat. Eine solche Hyperbel schneidet denjenigen Zweig der gegebenen Curve, welcher an der andern parallelen Asymptote sich hinzieht, in noch einem Puncte, der unendlich weit liegt, aber als ein, dem Contacte auf der ersten Asymptote fremder Punct zu betrachten ist. Die fragliche Hyperbel hängt noch von drei Constanten ab, über die wir willkührlich gebieten und dadurch den Contact von einem gewöhnlichen zu einem fünfpunctigen ansteigen lassen können. Endlich wird noch, bei Curven der n. Ordnung von besonderer Art, die fünfpunctig osculirende Hyperbel durch eine mehrpunctig osculirende vertreten, und hierbei kann der Contact, bei zunehmender Particularisation, bis zu einem $(2n-1)$punctigen sich erheben. Wir wollen als besonderes Beispiel die Curven der dritten Ordnung nehmen und dasselbe, indem wir für die Behandlungsweise selbst den allgemeinsten Gesichtspunct wählen, vollständig discutiren.

Die allgemeine Gleichung der Curven dritter Ordnung mit zwei parallelen Asymptoten nimmt, wenn wir in ihr nach einander als drei-, vier- und fünfpunctig osculirende Hyperbel diejenige, deren Gleichung die folgende ist:

$$(p+\xi)s + \lambda = o, \tag{1}$$

in Evidenz treten lassen, die nachstehenden Formen an:

$$(p-\xi)[(p+\xi)s + \lambda] + \mu(p+\xi)(p+\alpha)(p+\beta) = o, \tag{2}$$

$$(p-\xi)[(p+\xi)s + \lambda] + \mu(p+\xi)^2(p+\alpha) = o, \tag{3}$$

$$(p-\xi)[(p+\xi)s + \lambda] + \mu(p+\xi)^3 = o. \tag{4}$$

Diese Behauptung ist ohne Weiteres gerechtfertigt, wenn wir einen Blick auf die Form dieser Gleichungen werfen und die in ihnen vorkommenden Constanten zählen.

Die Form der Gleichung (4) zeigt, dass die fragliche Hyperbel (1) die Curve nur auf der ersten der beiden Asymptoten

$$p + \xi = o, \qquad p - \xi = o, \tag{5}$$

in unendlicher Entfernung schneidet, und also des fremden Punctes wegen, der dem, an der zweiten Asymptote sich hinziehenden Zweige angehört nicht sechs- sondern nur fünfpunctig osculirt. In dem Falle der Gleichung (3) ist der Contact ein bloss vierpunctiger und der einzige nicht unendlich weit entfernt liegende Durchschnittspunct befindet sich auf der geraden Linie:

$$p + \alpha = o. \tag{6}$$

Endlich ist, in dem Falle der Gleichung (2), der Contact ein bloss dreipunctiger und zwei nicht unendlich weit entfernte Durchschnittspuncte liegen auf den beiden geraden Linien:

$$p + \alpha = o, \qquad p + \beta = o. \tag{7}$$

Die Curven dritter Ordnung mit zwei parallelen Asymptoten hangen von 7 Constanten ab. Diese Constanten finden sich in der Gleichung (4) wieder. Diese Gleichung gestattet also durchaus keine Particularisation ihrer Form mehr, wenn sie die allgemeine bleiben soll.

Die Gleichung (3) muss eine, die Gleichung (2) zwei überzählige Constante einschliessen, wenn die Gleichung (1) jede mögliche, bezüglich vier- und dreipunctig osculirende, Hyperbel darstellen soll. Diess findet wirklich Statt.

Um die Herleitung der vorstehenden Gleichungen (2), (3) und (4) brauchen wir uns hiernach gar nicht zu kümmern; sie sind durch sich selbst gerechtfertigt. Uebrigens ergibt sich die erste der genannten Gleichungen aus der letzten Gleichung der 52. Nummer, indem wir in dieser p mit $(p-\xi)$ und $(s+r)$ mit $(p+\xi)$ vertauschen. Und dann ergeben sich die beiden letzten dieser drei Gleichungen aus der ersten.

107. In der Gleichung (2) kann die lineare Function s mit jeder andern vertauscht werden, ohne dass, bei gehöriger Bestimmung der Constanten in ihrem zweiten Gliede, diese Gleichung irgendwie sich ändert. Jeder andern Function-Bestimmung entspricht eine andere dreipunctig osculirende Hyperbel, welche die Curve in zwei andern Puncten schneidet. Umgekehrt können wir diese beiden Puncte willkührlich annehmen und dadurch die lineare Function s vollkommen bestimmen. Setzen wir insbesondere voraus, dass diese beiden Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, so reduciren sich die ersten Theile der Gleichungen (7) auf blosse Constanten, und indem wir alsdann q statt s schreiben, kommt:

$$(p-\xi)[(p+\xi)q + \lambda] + \mu(p+\xi) = o. \tag{8}$$

In dieser Gleichung tritt die dritte Asymptote der Curve durch die Function q in Evidenz; diess ist eine nothwendige Folge unserer Voraussetzung und geht auch aus der vorstehenden Gleichung, die durch das Verschwinden von q auf den ersten Grad sich reducirt, unmittelbar hervor. Diese Gleichung enthält nur noch sieben Constante, die, wenn die Curve gegeben ist, vollkommen bestimmt sind.

Die vorstehende Gleichung (8) können wir auch unter der nachstehenden Form schreiben:

$$(p+\xi)[(p-\xi)q + \mu] + \lambda(p-\xi) = o, \tag{9}$$

in welcher offenbar die Hyperbel:

$$(p-\xi)q + \mu = o, \tag{10}$$

als diejenige in Evidenz tritt, welche die Curve auf der zweiten der beiden parallen Asymptoten (5) dreipunctig osculirt und zu ihrer zweiten Asymptote die dritte Asymptote der Curve hat.

Wir können endlich die Gleichungen (8) und (9) auch folgendergestalt schreiben:

$$(p-\xi)[(p+\xi)q + (\mu+\lambda)] + 2\mu\xi = o, \tag{11}$$
$$(p+\xi)[(p-\xi)q + (\mu+\lambda)] - 2\lambda\xi = o,$$

wobei die beiden Hyperbeln:

$$(p\pm\xi)q + (\mu+\lambda) = o, \tag{12}$$

als diejenigen hervortreten, welche die Curve auf der dritten Asymptote Q dreipunctig osculiren und eine der beiden parallelen Asymptoten der Curve zu ihrer zweiten Asymptote haben.

Zum Behuf geometrischer Constructionen wollen wir die beiden linearen Functionen p und q nun dahin näher bestimmen, dass die erste derselben den kürzesten Abstand des Punctes, auf welchen sie bezogen wird, von der Linie P bedeutet, wonach 2ξ der kürzeste Abstand der beiden parallelen Asymptoten von einander darstellt; und dass die zweite jener beiden linearen Functionen dasjenige Segment bedeutet, welches, auf einer mit den beiden parallelen Asymptoten parallelen geraden Linie, zwischen dem bezüglichen Puncte und der dritten Asymptote Q liegt. Dann ist der constante Inhalt derjenigen drei Dreiecke, welche von den Asymptoten-Winkeln der drei Hyperbeln (1), (10) und (12) durch ihre Tangenten abgeschnitten werden und die wir Δ' Δ'' und Δ_q nennen wollen, durch die folgenden drei Constanten bestimmt:

$$\pm 2\lambda, \qquad \pm 2\mu, \qquad \pm 2(\lambda+\mu).$$

Hierdurch erhalten zunächst die beiden Constanten λ und μ der allgemeinen Gleichung (8) ihre geometrische Bedeutung.

Die Werthe dieser beiden Constanten haben übereinstimmende Zeichen, wenn die Curve die dritte Asymptote Q zwischen den beiden parallelen Asymptoten schneidet; fällt hingegen dieser Durchschnitt ausserhalb derselben, so haben λ und μ entgegengesetzte Zeichen. Diess ergibt sich auf analytischem Wege eben so leicht, als durch die unmittelbare geometrische Anschauung. Denn wenn wir durch p^0 denjenigen Werth bezeichnen, welcher dem Durchschnitte der Curve mit der dritten Asymptote Q entspricht, so gibt die Gleichung der Curve, indem wir q gleich Null setzen:

$$\frac{p^0}{\xi} = -\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda} \tag{13}$$

woraus wir sehen, dass, abgesehn vom Zeichen, $p^0 < \xi$ oder $p^0 > \xi$, je nachdem μ und λ im Zeichen übereinstimmen oder nicht. Wir erhalten hiernach den folgenden Satz.

Der constante Inhalt derjenigen Dreiecke, die von dem Asymptoten-Winkel einer, die Curve auf ihrer dritten Asymptote dreipunctig osculirenden Hyperbel durch eine Tangente abgeschnitten werden, ist entweder der Summe oder der Differenz des constanten Inhaltes der beiden, von den Asymptoten-Winkeln zweier, die Curve auf ihren beiden parallelen Asymptoten dreipunctig osculirenden Hyperbeln durch eine Tangente abgeschnittenen Dreiecke gleich, je nachdem die Curve von ihrer dritten Asymptote innerhalb oder ausserhalb der beiden parallelen Tangenten geschnitten wird.

Zur geometrischen Construction der beiden Constanten λ und μ ist es hinreichend, wenn, ausser den drei Asymptoten der Curve, noch irgend zwei Puncte derselben gegeben sind. Wir wollen hier für diese beiden Puncte den eben bestimmten Durchschnittspunct der Curve mit ihrer dritten Asymptote Q und ihren Durchschnittspunct mit der Linie P nehmen. Für diesen letztern gibt die Gleichung der Curve, indem wir p gleich Null setzen und den resultirenden Werth von q durch eine Marke unterscheiden,

$$q^0\xi = \mu - \lambda. \tag{14}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhalten wir durch Division

$$-\frac{\xi}{p^0} \cdot q^0\xi = \mu + \lambda, \tag{15}$$

und hiernach

$$\frac{p^0-\xi}{p^0} \cdot q^0\xi = 2\mu, \qquad -\frac{p^0+\xi}{p^0} \cdot q^0\xi = 2\lambda. \tag{16}$$

Ich füge eine Figur hinzu, um die geometrische Bedeutung der letzten vier Gleichungen anschaulicher zu machen. Fig. 1. H'G' und und H''G'' sind die beiden parallelen Asymptoten und werden von der dritten Asymptote Q in den beiden Puncten G' und G'' geschnitten. Die gerade Linie P, welche in der Mitte zwischen den beiden parallelen Asymptoten hindurchgeht, schneidet die Curve dritter Ordnung in dem Puncte M. Wenn wir alsdann durch diesen Punct eine beliebige (etwa mit der Asymptote Q parallele) gerade Linie N'N'' legen, so ist der Inhalt des resultirenden Vierecks N'N''G''G', das von dieser Linie und den drei Asymptoten gebildet wird, gleich $\pm 2(\mu-\lambda)$, also gleich der Differenz oder der Summe der beiden Dreiecke Δ'' und Δ', je nachdem die Curve von ihrer dritten Asymptote zwischen G' und G'' geschnitten wird oder nicht. In der Figur haben wir den letztern Fall in Anschauung gebracht, und den fraglichen Durchschnitt S genannt. Diejenige gerade Linie, welche die Puncte M und S verbindet, schneide die erste der beiden parallelen Asymptoten (5) in K'

und die zweite in K". K'P" und K"P' sind parallel mit der Asymptote Q gezogen und dadurch auf der Linie P die Puncte P" und P' bestimmt worden. Dann ist G'P" und G"P' und endlich, parallel mit SM, die gerade Linie G"L' gezogen worden. Nach dieser Construction ist:

$$\Delta G'H'G'' = -2\lambda = \Delta',$$
$$\Delta G''H''G' = 2\mu = \Delta'',$$
$$\Delta G''L'G' = 2(\mu+\lambda) = \Delta''-\Delta' = \Delta_{1}.$$

Diese drei Dreiecke haben überdiess eine solche Lage, dass ihre dritten Seiten H'G", H"G' und L'G" Tangenten dreier Hyperbeln sind, von welchen die beiden ersten (1) und (10) die Curve auf einer der beiden parallelen Asymptoten dreipunctig osculiren und die dritte Asymptote der Curve auch zu der ihrigen haben, und von welchen die dritte die Curve auf Q dreipunctig osculirt und zugleich die erste der beiden parallelen Asymptoten (5) auch zu der ihrigen hat. Da endlich H'G", H"G' und L"G' auf der Linie P bezüglich in P', P" und P^0 halbirt werden, so sind diese drei Puncte diejenigen, in welchen die genannten drei geraden Linien von den drei fraglichen osculirenden Hyperbeln berührt werden.

Aus der obigen Construction folgt, dass M in der Mitte zwischen P' und P" liegt und $0P^0$ gleich P'M. und MP" ist.

An die vorstehenden Erörterungen schliesst sich die Construction mehrerer Aufgaben an. So, zum Beispiel, können wir eine Curve der dritten Ordnung mit zwei parallelen Asymptoten construiren, wenn diese beiden Asymptoten, auf ihnen das Maass der Annäherung und zugleich die dritte Asymptote der Curve gegeben ist. (Diese dritte Asymptote braucht, wenn nicht die absolute Lage der zu construirenden Curve in Betracht kommt, bloss der Richtung nach gegeben zu sein). Denn alsdann sind durch das Maass der Annäherung auf den beiden parallelen Asymptoten die Puncte P' und P" bestimmt, folglich auch die Puncte K' und K" und der Punct S. Ausserdem ist M, als die Mitte zwischen P' und P" bestimmt und somit die Curve. Unmittelbar erhält man das Maass der Annäherung auf der dritten Asymptote.

Schliesslich bemerken wir noch, dass nach den Gleichungen (14) und (15) das Maass der Annäherung an die beiden parallelen Asymptoten dasselbe ist, einmal wenn q' verschwindet und also die Asymptote Q von der Curve in der Mitte zwischen ihren Durchschnitten mit den beiden parallelen Asymptoten geschnitten wird, das andere Mal wenn p^0 unendlich wird, und also die Asymptote Q eine dreipunctig osculirende ist. Nur liegen in diesen Fällen die osculirenden Hyperbeln auf verschiedenartige Weise gegen die beiden parallelen Asymptoten.

108. Wenn in der Gleichung (2) der 106. Nummer die Constante β insbesondere gleich ξ wird, so fällt, indem diese Gleichung in die Gleichung (3) übergeht, ein neuer Durchschnittspunct mit dem Osculationspuncte auf der ersten der beiden parallelen Asymptoten (5) zusammen, wodurch die Osculation zu einer vierpunctigen ansteigt. Nehmen wir ferner an, dass der einzige noch übrige Durchschnittspunct nach der Richtung der dritten Asymptote Q unendlich weit liege, so muss sich $(p+\alpha)$ auf eine blosse Constante reduciren. Dann ist die zweite Asymptote der osculirenden Hyperbel, die Linie S, mit Q parallel und indem wir demgemäss $(q+\gamma)$ für s schreiben, wird die Gleichung der Curve:

$$(p-\xi)[(p+\xi)(q+\gamma)+\lambda]+\mu(p+\xi)^2 = 0.$$

Die Bedingung, dass Q eine Asymptote der Curve ist, fordert, dass durch das Verschwinden von q die vorstehende Gleichung auf den ersten Grad sich reducire. Soll diess geschehn, so muss γ gleich $(-\mu)$ sein. Hiernach verliert die vorstehende Gleichung eine Constante und hat in der folgenden Form die gerade nothwendige Anzahl von Constanten:

$$(p-\xi)[(p+\xi)(q-\mu)+\lambda]+\mu(p+\xi)^2 = 0. \tag{17}$$

Die Constante λ hat dieselbe Bedeutung behalten, welche sie in der vorigen Nummer hatte;

die Constante μ ist derjenige Werth von q, welcher dem Mittelpuncte der, die Curve auf der ersten ihrer beiden parallelen Asymptoten vierpunctig osculirenden Hyperbel entspricht.

Wenn wir q^0 und p^0 wieder in der bisherigen Bedeutung nehmen, so kommt, indem wir in der letzten Gleichung nach einander q und p gleich Null setzen:

$$\frac{p^0}{\xi} = \frac{\lambda - 2\mu\xi}{\lambda + 2\mu\xi},$$

$$\xi q^0 = -(\lambda - 2\mu\xi),$$

und hieraus

$$\frac{p^0 - \xi}{p^0} = \frac{-4\mu\xi}{\lambda - 2\mu\xi} = \frac{\mu}{\frac{1}{4}q^0}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass, wenn wir den Punct C, welcher dadurch bestimmt ist, dass CO = OS, mit demjenigen Puncte I, welcher auf der Linie P der Asymptote Q viermal näher liegt als der Punct M, durch eine gerade Linie verbinden, diese gerade Linie die erste der beiden Parallel-Asymptoten in dem Mittelpuncte C′ der vierpunctig osculirenden Hyperbel schneidet. Dieselbe gerade Linie schneidet auch die zweite Parallel-Asymptote in dem gemeinschaftlichen Mittelpuncte C″ derjenigen Hyperbeln, welche die Curve auf dieser zweiten Asymptote vierpunctig osculiren. Denn man erhält offenbar denjenigen Werth von μ, welcher diesem Mittelpunct entspricht, wenn man in der letzten Gleichung das Zeichen von ξ ändert. Fig. 2.

Wir sehen hieraus, wie auch in dem Falle, dass eine Curve dritter Ordnung zwei parallele Asymptoten hat, die gemeinschaftlichen Mittelpuncte derjenigen drei Gruppen von Hyperbeln, welche die Curve auf den drei Asymptoten vierpunctig osculiren in gerader Linie liegen. Denn C ist nach dem Satze der 46. Nummer dieser Mittelpunct auf der Asymptote Q. Die Construction der Mittelpuncte auf den beiden Parallel-Asymptoten nach dem genannten Satze wird illusorisch, und wir haben dieselbe direct construiren müssen.

Zur vollständigen Construction der osculirenden Hyperbel:

$$(p+\xi)(q-\mu) + \lambda = 0,$$

können wir statt λ auch denjenigen Punct bestimmen, in welchem die Hyperbel die Linie P oder die zweite Parallel-Asymptote schneidet. In beiden Fällen wird diese Bestimmung leicht.

109. Indem wir uns zu der Gleichung (4) der 106. Nummer:

$$(p-\xi)[(p+\xi)s + \lambda] + \mu(p+\xi)^3 = 0,$$

wenden, in welcher eine, die Curve auf der ersten Parallel-Asymptote fünfpunctig osculirende Hyperbel sich darstellt, wollen wir, um auch die dritte Asymptote der Curve in Evidenz treten zu lassen,

$$s \equiv q + \delta p + \gamma$$

setzen, dann ergeben sich, damit die Gleichung der Curve durch das Verschwinden von q auf den ersten Grad sich reducire, zur Bestimmung der beiden Constanten δ und γ die folgenden beiden Gleichungen:

$$\delta + \mu = 0,$$

$$\gamma + 3\mu\xi = 0;$$

somit kommt:

$$s \equiv q - \mu(p+3\xi), \tag{18}$$

und die Gleichung der Curve wird:

$$(p-\xi)[(p+\xi)(q-\mu(p+3\xi)) + \lambda] + \mu(p+\xi)^3 = 0.$$

Aus der identischen Gleichung (18) fällt in die Augen, dass zugleich

$$s = 0, \quad q = 0, \quad p = -3\xi,$$

wonach die Linie S, die zweite Asymptote der fünfpunctig osculirenden Hyperbel, die Asymptote Q, in einem Puncte A′ schneidet, welcher, auf entgegengesetzter Seite von der ersten

Parallel - Asymptote, so weit als die zweite Parallel-Asymptote absteht. Da überdiess, nach der vorigen Nummer, der Mittelpunct C' der fraglichen Hyperbel bekannt ist, so ist die Linie S diejenige, welche die beiden Puncte A' und C' verbindet. Nach einer analogen Construction erhalten wir die gerade Linie $A''C''$ als die zweite Asymptote derjenigen Hyperbel, welche die Curve auf der zweiten der beiden Parallel - Asymptoten (5) fünfpunctig osculirt.

Um die fünfpunctig osculirende Hyperbel

$$(p+\xi)(q-\mu(p+3\xi)) + \lambda = o,$$

wenn die Curve gegeben ist, zu construiren, ist es am einfachsten, statt λ, denjenigen Punct D' zu bestimmen, in welchem diese Hyperbel die Linie P schneidet. Wenn wir, zur Unterscheidung, diejenigen Werthe von q, welche diesem Durchschnitte und dem Mittelpuncte der Hyperbel entsprechen q' und q'' nennen, und q^0 in der bisherigen Bedeutung beibehalten, so geben die Gleichungen der Curve und der Hyperbel, indem wir p gleich Null setzen:

$$\xi(q^0-3\mu\xi) = \mu\xi^2 - \lambda,$$
$$\xi(q'-3\mu\xi) = -\lambda,$$

woraus sich, durch Abziehn, sogleich ergibt:

$$q^0 - q' = \mu\xi = \tfrac{1}{2}q'',$$

so dass man den gesuchten Punct D' erhält, indem man $D'M = \tfrac{1}{2}G'C'$ macht. —

110. Es kann eine Curve auch mehrere Paare paralleler Asymptoten haben, dann reducirt sich in ihrer allgemeinen Gleichung die Anzahl der Constanten für jedes Paar um zwei Einheiten. Wir wollen als Beispiel die Curven der 5. Ordnung mit zwei Paaren paralleler Asymptoten nehmen, und die verschiedenen Fälle in Beziehung auf die Ordnung des Contactes auf diesen Asymptoten zusammenstellen. Wir wollen hierbei der frühern Bezeichnung uns bedienen, und vor jeder Gleichung die Art des Contactes, nach jeder Gleichung die Anzahl ihrer Constanten bemerken.

22,22,2	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\alpha)(q+\beta)s + \mu v = o,$	[16]
32, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\xi)(q+\beta)s + \mu v = o,$	[15]
42, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\xi)(q+\beta)s + \mu(p+\gamma) = o,$	[14]
33, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\alpha)(p+\delta)(q+\beta) + \mu(p+\gamma) = o,$	[14]
43, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\xi)(p+\alpha)(q+\beta) + \mu(p+\gamma) = o,$	[13]
44, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p^2-\xi^2)(q+\beta) + \mu(p+\gamma) = o,$	[12]
32,32,2	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\xi)(q+\zeta)s + \mu v = o,$	[14]
42, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\xi)(q+\zeta)s + \mu(p+\gamma = o,$	[13]
33, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\xi)(p+\alpha)(q+\zeta) + \mu v = o;$	[13]
43, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\xi)(p+\alpha)(q+\zeta) + \mu(p+\gamma) = o,$	[12]
44, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p^2-\xi^2)(q+\zeta) + \mu(p+\gamma) = o,$	[11]
42,42,2	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\xi)(q+\zeta)s + \mu = o,$	[12]
33, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\alpha)(p+\delta)(q+\zeta) + \mu = o,$	[12]
43, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\xi)(p+\alpha)(q+\zeta) + \mu = o,$	[11]
44, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p^2-\xi^2)(q+\zeta) + \mu = o,$	[10]
33,33,3	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\alpha)(q+\beta) + \mu = o,$	[12]
43, . .	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\xi)(q+\beta) + \mu = o,$	[11]
44, . 4	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \mu(p+\gamma) = o,$	[10]
43,43,3	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \lambda(p+\xi)(q+\zeta) + \mu = o,$	[10]
44,44,5	$(p^2-\xi^2)(q^2-\zeta^2)r + \mu = o.$	[9]

Wir haben in dem vorstehenden Schema auf die verschiedene Ordnung der Osculation der fünften, jedesmal reellen, Asymptote keine besondere Rücksicht genommen und jedesmal nur den allgemeinsten Fall hervorgehoben, wo diese Ordnung die möglichst niedere ist.

Unmöglich sind die den nachstehenden Combinationen entsprechenden Fälle:

33,22,3	43,32,3	44,42,3	43,43,2
. . 4	. . 4	. . 4	. . 4
. . 5	. . 5	. . 5	. . 5
43,22,3	44,32,3	33,33,2	44,43,2
. . 4	. . 4	. . 4	. . 3
. . 5	. . 5	. . 5	. . 4
44,22,3	42,42,4	43,33,2	. . 5
. . 4	33,42,3	. . 4	44,44,2
. . 5	. . 4	. . 5	. . 3
42,32,5	. . 5	44,33,2	. . 4
33,32,3	43,42,3	. . 3	
. . 4	. . 4	. . 5	
. . 5	. . 5		

Es würde uns hier zu weit führen, wenn wir für den untergeordneten Fall paralleler Asymptoten diejenigen Sätze entwickeln wollten, nach welchen überhaupt die unmöglichen Fälle auszuschliessen sind. Zu diesem Ende müssten wir die Betrachtungen der 28. und 34. Nummer unter den gehörigen Modificationen wieder aufnehmen. Es mag uns genügen, im Stande zu sein, nach unserer allgemeinen Methode zu erkennen, ob ein vorgelegter Fall möglich oder unmöglich ist, und zwar lediglich daraus, ob es möglich ist, die demselben entsprechende Gleichung unmittelbar hinzuschreiben oder nicht.

§. 5.

Doppel-Asymptoten. Berührung zweier reellen oder imaginären unendlichen Zweige. Spitzen erster und zweiter Art in unendlicher Entfernung.

111. Wir haben schon in dem vorigen Paragraphen dem mehr particularisirten Falle, dass die beiden parallelen Asymptoten einer Curve in eine Doppel-Asymptote zusammenfallen, seine Stelle angewiesen (99). In diesem neuen Paragraphen wollen wir diesen Fall mit Ausführlichkeit discutiren.

Wir bemerken zuvörderst, dass für alle Zweige einer Curve, welche einer Doppel-Asymptote sich annähern, die Ordnung der Annäherung dieselbe ist. Denn in den Gleichungen der 103. Nummer hört der Unterschied des Zeichens von ξ, mit dem Verschwinden dieser Constanten, ganz auf.

Setzen wir in den Gleichungen (1) und (2) der eben angeführten Nummer, welche auf den Fall zweier Parallel-Asymptoten, auf deren jeder der Contact ein $m$punctiger ist, und m einmal eine gerade und das andere Mal eine ungerade Zahl bedeutet, Bezug haben, ξ gleich Null, so kommt:

$$p^2[\Theta_{n-2} + \varrho\Theta_{n-4} + \cdot\cdot + \tau\Theta_{n-m}] + \mu(p+\alpha)\Theta_{n-m-1} + \lambda\Omega_{n-m-2} = 0, \tag{1}$$

$$p^2[\Theta_{n-2} + \varrho\Theta_{n-4} + \cdot\cdot + \tau\Theta_{n-m+1}] + \mu(p+\alpha)(p+\beta)\Theta_{n-m-1} + \lambda(p+\gamma)\Theta_{n-m-2} + \sigma\Omega_{n-m-3} = 0. \tag{2}$$

In diesen Gleichungen hat sich die Anzahl der Constanten um eine Einheit, nemlich auf

$$\frac{n(n+3)}{1\,.\,2} - (2m-1), \tag{3}$$

reducirt. Wir können beide in der folgenden mit überzähligen Constanten zusammenfassen:

$$p^2\Omega_{n-2} + 2\mu p\Omega_{n-m-1} + \lambda\Omega'_{n-m-1} = 0. \tag{4}$$

Dividiren wir diese Gleichung durch Ω_{n-2}, so kommt, wenn wir die Function-Bestimmung der 105. Nummer beibehalten und dann niedere Potenzen von q gegen höhere vernachlässigen:

$$p^2 + 2\mu p q^{-(m-1)} + \lambda q^{-(m-1)} = o. \quad (5)$$

Die beiden Werthe von p, die, bei wachsendem Werthe von q, diese Gleichung befriedigen, sind beide unendlich klein, sie ergeben sich sogleich, wenn wir das zweite Glied der vorstehenden Gleichung vernachlässigen; dann kommt:

$$p = \pm \sqrt{(-\lambda q^{-(m-1)})}. \quad (6)$$

Es hat also die Curve unendliche Zweige, welche der Doppel-Asymptote sich immer mehr annähern.

Der allgemeine Fall einer Doppel-Asymptote ist derjenige, wo $m=2$. Dann kommt:

$$p = \pm \sqrt{(\pm\lambda)} \cdot (\mp q)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Ordnung der Annäherung hier nur $\frac{1}{2}$ und also der Ordnung der Annäherung an eine gewöhnliche parabolische Asymptote gleich ist (87). Das Zeichen der Constanten λ bestimmt ob, für positive oder negative Werthe des immerfort wachsenden q, die entsprechenden Werthe von p reell oder imaginär sind. Die Werthe von p sind immer gleich und von entgegengesetztem Zeichen. Also nähern sich der Doppel-Asymptote zwei unendliche Zweige gleich stark auf den beiden Seiten derselben; sie ziehen sich nach derselben Richtung an dieser Asymptote hin, um in unendlicher Entfernung eine Spitze erster Art zu bilden, während, nach entgegengesetzter Richtung, kein unendlicher Zweig der Curve an der Doppel-Asymptote sich hinzieht.

Fig. 3.

112. Setzen wir $m=3$, so kommt:

$$p = \pm \sqrt{-\lambda} \cdot q^{-1},$$

oder

$$pq \pm \sqrt{-\lambda} = o,$$

woraus wir sehen, dass alsdann der Doppel-Asymptote P sich vier hyperbolische Zweige (H_1 und H^2, H_2 und H^1) nähern, die auf den beiden Seiten derselben nach ihrer doppelten Erstreckung sich hinziehn und dass die Ordnung der Annäherung gleich Eins ist, wie bei einer gewöhnlichen Hyperbel. Es können hierbei übrigens die hyperbolischen Zweige sowohl alle vier imaginär, als auch alle vier reell sein.

Fig 4.

Es zeigt uns aber der Ausdruck (3) dass, wenn m um Eins steigt, die nothwendige Constanten-Anzahl der allgemeinen Gleichung um zwei Einheiten sich reducirt. Diess weiset uns darauf hin, dass zwischen dem allgemeinen Falle, wo $m=2$, und dem eben betrachteten Falle, wo $m=3$, noch ein Uebergangsfall in der Mitte liegt.

Wenn die Gleichung:

$$(p^2-\xi^2)\Theta_{n-2} + \mu(p+\alpha)\Theta_{n-3} + \lambda\Omega_{n-4} = o,$$

in der zwei gewöhnliche Parallel-Asymptoten in Evidenz treten, in die folgende übergeht:

$$(p^2-\xi^2)\Theta_{n-2} + \mu(p\pm\xi)\Theta_{n-3} + \lambda\Omega_{n-4} = o,$$

so steigt auf einer dieser beiden Asymptoten der Contact zu einem dreipunctigen an. Wenn wir $\xi=o$ setzen, so rückt immer noch durch das Verschwinden von α ein neuer Durchschnittspunct auf den beiden zusammenfallenden Asymptoten unendlich weit. Dieser Punct gehört aber keiner der beiden Asymptoten ausschliesslich an, es steigt auf jeder von beiden die Ordnung des Contactes um eine halbe Einheit an, nemlich von $\frac{1}{2}$ zu 1. Die Ordnung der Annäherung ist also hier schon dieselbe als in dem zuletzt betrachteten Falle.

Dem neuen Falle entspricht, dass die Gleichung (5) nachstehende Form annimmt:

$$p^2 + 2\mu p q^{-1} + \lambda q^{-2} = o.$$

Lösen wir diese Gleichung in Beziehung auf p auf, so kommt:

$$p = (-\mu \pm \sqrt{(\mu^2-\lambda)})q^{-1},$$

oder

$$pq + (\mu \mp \sqrt{(\mu^2-\lambda)}) = o. \quad (7)$$

Hieraus sehen wir, dass die Annäherung der Curve an ihre Doppel-Asymptote von der

ersten Ordnung ist, und dass sich vier hyperbolische Zweige dieser Asymptote nähern. Diese vier Zweige sind reell oder imaginär, je nachdem

$$\mu^2 - \lambda > 0 \quad \text{oder} \quad \mu^2 - \lambda < 0.$$

Wenn, in dem ersten Falle λ negativ ist, so erhält das constante Glied in der Gleichung (7) zwei Werthe von verschiedenem Zeichen und es liegen die vier reellen Zweige, wie in dem zu Anfange dieser Nummer betrachteten Falle, der sich bloss dadurch auszeichnet, dass das Maas der Annäherung für beide Zweigen-Paare gleich ist. Wenn λ hingegen positiv ist, so liegen die vier unendlichen Zweige paarweise wie die Zweige derselben Hyperbel. Der Fall, dass

$$\mu^2 - \lambda = 0,$$

bildet den Uebergang zwischen den beiden Fällen vier reeller und vier imaginärer Asymptoten. Im Allgemeinen sind, bei diesem Uebergangs-Falle, zwei Zweige schon verschwunden und die beiden noch übrigen bilden dann in unendlicher Entfernung eine Spitze zweiter Art. Die Discussion dieses Falles und seiner Particularisationen wird später ihre Stelle finden.

113. Die folgende Gleichung mit überzähligen Constanten:

$$(p^2 - \xi^2)\Omega_{n-2} + 2\mu(p \pm \xi)\Omega_{n-m-1} + \lambda\Omega_{n-m_{,}-1} = 0,$$

ist, indem wir voraussetzen, dass $m \overline{\overline{>}} 2$ und $m_{,} \overline{\overline{>}} m$, die allgemeine Gleichung für Curven der n. Ordnung mit zwei parallelen Asymptoten, von welchen die eine die Curve $m$punctig und die andere $m_{,}$punctig osculirt. Setzen wir ξ gleich Null, so kommt:

$$p^2\Omega_{n-2} + 2\mu p\Omega_{n-m-1} + \lambda\Omega_{n-m_{,}-1} = 0. \qquad (1)$$

Diese Gleichung stellt also Curven der n. Ordnung dar, welche eine solche Doppel-Asymptote haben, welche als daraus hervorgegangen sich darstellt, dass zwei parallele Asymptoten, von denen die eine eine $m$punctig und die andere eine $m_{,}$punctig osculirende war, zusammengefallen sind. Auf jeder von solchen zwei Asymptoten liegt ein Punct, welcher dem an der andern sich hinziehenden Zweige angehört, unendlich weit, auf beide zusammen kommen also nicht $(m+m_{,}+2)$, sondern nur $(m+m_{,})$ unendlich weit entfernte Durchschnittspuncte. Eine mit der Doppel-Asymptote zusammenfallende gerade Linie schneidet die Curve in $(m_{,}+1)$ unendlich weit entfernten Puncten; eine zweite solche gerade Linie schneidet die Curve zwar auch in einer gleichen Anzahl solcher Puncte, unter diesen sind aber nothwendig $(m_{,}-m)$ der obigen $(m_{,}+1)$ Durchschnittspuncte enthalten, und die Zahl der neuen Durchschnittspuncte beträgt nur $(m+1)$. Wir erhalten also wiederum, wenn wir auch hier noch zwei abziehen, $(m+m_{,})$ als die Anzahl der auf der Doppel-Asymptote unendlich weit liegenden Puncte.

Wir können, um die Gleichung (1) zu befriedigen, niedere Potenzen von q gegen höhere, indem wir q unendlich gross nehmen, dann jedesmal vernachlässigen, wenn durch diese Vernachlässigung p nicht auch unendlich gross wird. Wird p unendlich klein, so hat die Curve unendliche Zweige, welche an der geraden Linie P, als einer Asymptote sich hinziehen. In der vorstehenden Voraussetzung über m und $m_{,}$ findet diess jedesmal Statt. Um die Ordnung der Annäherung der Curve an diese Doppel-Asymptote P zu bestimmen, kommt:

$$p^2 + 2\mu p q^{-(m-1)} + \lambda q^{-(m_{,}-1)} = 0, \qquad (2)$$

und wenn wir diese Gleichung in Beziehung auf p auflösen, ergibt sich:

$$p = -\mu q^{-(m-1)} \pm \sqrt{[\mu^2 q^{-2(m-1)} - \lambda q^{-(m_{,}-1)}]}. \qquad (3)$$

114. Wenn erstens $m = m_{,}$, so entspricht die Doppel-Asymptote zweien gleichvielpunctig osculirenden Parallel-Asymptoten und dann kommt:

$$p = \pm(-\lambda q)^{-\frac{m-1}{2}}. \qquad (4)$$

Je nachdem also m eine gerade oder ungerade Zahl ist, wird die Ordnung der Annäherung der Curve an ihre Doppel-Asymptote durch einen Bruch oder durch eine ganze Zahl dargestellt, wenn wir die Ordnung der Annäherung einer Curve an eine gewöhnliche Asymptote

durch die Einheit ausdrücken. In dem Falle, dass m eine gerade Zahl bedeutet, hat die Curve eine Spitze erster Art in unendlicher Entfernung; die Ordnung der Annäherung kann von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ und so fort bis (je nachdem die Ordnung der Curve eine gerade oder ungerade ist) $\frac{n-1}{2}$ oder $\frac{n}{2}$ ansteigen. Hierhin gehört insbesondere der am Ende der 111. Nummer betrachtete Fall, in welchem, weil die Ordnung der Annäherung nur $\frac{1}{2}$ ist, jeder unendliche Zweig einer gewöhnlichen Hyperbel, welcher an der Doppel-Asymptote sich hinzieht, zwischen dieser und der Curve liegt. Umgekehrt verhält sichs, wenn die Ordnung des Contactes eine höhere ist, dann liegt ein unendlicher Zweig der Curve immer zwischen der Doppel-Asymptote und einem an ihr sich hinziehenden Hyperbel-Zweige. Wir können den Lauf der in Rede stehenden unendlichen Zweige der Curve annäherungsweise durch folgende Gleichung darstellen:

$$p^2q^{m-1} + \lambda = 0.$$

Wenn m eine ungerade Zahl bedeutet, so kann man die Gleichung (2) mit Hinweglassung des zweiten zu vernachlässigenden Gliedes, auf folgende Weise in zwei rationale Factoren auflösen:

$$[pq^{\frac{m-1}{2}} - (-\lambda)^{\frac{1}{2}}][pq^{\frac{m-1}{2}} + (-\lambda)^{\frac{1}{2}}] = 0.$$

Diese Gleichung stellt ein System von zwei hyperbolischen Curven dar, die den Lauf von vier unendlichen Zweigen der Curve annäherungsweise darstellen, und mit diesen zugleich, je nachdem λ negativ oder positiv ist, entweder reell oder imaginär sind. Die beiden hyperbolischen Curven liegen, in Beziehung auf die beiden Seiten der Doppel-Asymptoten, entgegengesetzt. Je nachdem aber $\frac{m-1}{2}$ eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet, ordnen sich die vier unendlichen Zweige der Curve paarweise entweder so zusammen, dass diejenigen beiden, welche auf denselben Seiten der Doppel-Asymptote liegen (H^1 und H_1, H^2 und H_2) durch das Unendliche hindurch sich fortsetzen und gleichsam nur einen einzigen Zweig bilden, oder so, dass die sich entsprechenden Zweige auf entgegengesetzter Seite der Doppel-Asymptote liegen (H^1 und H_2, H^2 und H_1). Letzteres findet Statt in dem zu Anfange der 112. Nummer betrachteten Falle, in welchem die Ordnung der Annäherung der Einheit gleich ist. In untergeordneten Fällen kann diese Ordnung, durch alle ganzen Zahlen hindurch, bis (je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet) $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ anwachsen.

Fig. 4.

115. Wenn zweitens $m_, < 2m-1$, so ist das letzte Glied in der Gleichung (2) immer noch das Ueberwiegende, es bleibt also in Beziehung auf die Lage der unendlichen Zweige der Curve gegen ihre Doppel-Asymptote und die Ordnung der Annäherung, Alles wie in dem ersten Falle, in der Art, dass, wenn $m_,$ gerade ist, eine Spitze erster Art vorhanden ist, die Curve aber vier unendliche Zweige hat, wenn $m_,$ ungerade ist.

Fig. 4—7.

116. Wenn drittens $m_, > 2m-1 = 2m-1+g$, so können wir die Gleichung (2) auf folgende Weise schreiben:

$$p(p+2\mu q^{-(m-1)}) + \lambda q^{-2(m-1)-g} = 0,$$

und dann in die folgenden beiden auflösen:

$$p = -2\mu q^{-(m-1)},$$

$$p = -\frac{\lambda}{2\mu} \cdot q^{-(m-1)-g}.$$

Wir können diese beiden Gleichungen als die Entwicklung der beiden durch die Gleichung (3) gegebenen Werthe von p ansehen, oder wir können auch unmittelbar, um die vorste-

hende Gleichung zu befriedigen, einmal das Glied $\lambda q^{-2(m-1)-g}$ gegen p und das andere Mal p gegen $2\mu q^{-(m-1)}$ vernachlässigen. In diesem Falle hat die Curve vier unendliche Zweige, welche paarweise zusammengehören, und von der geradlinigen Doppel-Asymptote P bezüglich *m*punctig und $(m+g)$punctig osculirt werden. Wenn m und $(m+g)$ beide gerade Zahlen bedeuten, so haben, je nachdem λ eine positive oder negative Grösse ist, die unendlichen Zweige H^1 und H_2, H^2 und H_1 die Lage, wie in der 5. oder der 4. Figur. Wenn m und $(m+g)$ beide ungerade Zahlen sind, so erhalten wir, je nachdem λ eine positive oder negative Grösse ist, den Fall der 6. oder der 4. Figur, in denen die Zweige H^1 und H_1, H^2 und H_2 zusammengehören. Wenn endlich von den beiden Zahlen eine gerade und die andere ungerade ist, so erhalten wir die, durch die 7. Figur dargestellte Lage der vier Zweige, von welchen der eine H^2 entweder mit H_1 oder H_2 zusammengehört.

117. Wenn viertens $m = 2m - 1$, so kommt: Fig. 4—8

$$p = (-\mu \pm \sqrt{(\mu^2 - \lambda)})q^{-(m-1)}.$$

Die Ordnung der Annäherung der Curve an ihre Doppel-Asymptote wird also durch eine ganze Zahl ausgedrückt, und diese kann von Eins bis zu $\frac{2n-4}{3}$ oder wenn dieser Ausdruck keine ganze Zahl ist, bis zu der unmittelbar kleinern ganzen Zahl ansteigen. Curven der fraglichen Art müssen also den dritten Grad nothwendig übersteigen.

Die letzte Gleichung stellt mit Berücksichtigung des doppelten Zeichens zwei hyperbolische Curven von derselben Ordnung dar, die reell oder imaginär sein und auch zusammenfallen können. Wenn

$$\mu^2 - \lambda > 0,$$

so sind sie reell und zugleich mit ihnen vier unendliche Zweige der Curve, welche an ihnen, als an Asymptoten sich hinziehen. Je nachdem λ positiv oder negativ ist, liegen die zwei hyperbolischen Curven auf entgegengesetzte oder auf gleiche Weise in Beziehung auf die beiden Seiten der Doppel-Asymptote. Je nachdem ferner m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, liegen die beiden Zweige jeder der beiden hyperbolischen Curven auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite der Doppel-Asymptote. Hierdurch sind die folgenden vier verschiedenen Lagen der vier unendlichen Zweige der Curve gegen ihre Doppel-Asymptote bestimmt. 1) Wenn λ positiv m gerade ist, erhalten wir den Fall der 4. Figur, und es gehören die Zweige H^1 und H_2, H^2 und H_1 zusammen; 2) wenn λ positiv und m ungerade ist, ist die Lage der unendlichen Zweige die vorige, nur gehören H^1 und H_1, H^2 und H_2 zusammen; 3) wenn λ negativ und m gerade ist, ergibt sich die Lage der 5. Figur, in welcher H^1 und H_2, H^2 und H_1 zusammengehören, 4) wenn endlich λ negativ und m ungerade ist, liegen alle vier Zweige, H^1 und H_1, H^2 und H_2 auf derselben Seite der Doppel-Asymptote. (Fig. 6.)

Wenn

$$\mu^2 - \lambda < 0,$$

so sind die beiden hyperbolischen Curven, und zugleich mit diesen, die vier unendlichen Zweige der Curve imaginär.

Wenn endlich

$$\mu^2 - \lambda = 0,$$

so fallen die beiden hyperbolischen Asymptoten zusammen, indem die Gleichung (2) in die folgende übergeht:

$$(pq^{m-1} + \mu)^2 = 0.$$

Um in diesem Falle die Lage der unendlichen Zweige der Curve zu bestimmen, müssen wir in der Gleichung der Curve mit den Gliedern der höchsten Ordnung

$$(pq^{m-1} + \mu)^2 q^{n-2m+1}$$

auch noch die Glieder der unmittelbar niedern Ordnung zusammennehmen. Wenn wir erwägen,

dass, für immer wachsende Werthe von q, das Product pq^{m-1} einer Constanten gleich wird, so erhalten wir hiernach folgende Gleichung:

$$(pq^{m-1}+\mu)^2 q^{n-2m+1} + 2\varkappa(pq^{m-1}+\gamma)q^{n-2m} = 0, \qquad (5)$$

oder, indem wir

$$pq^{m-1} + \mu \equiv Y, \qquad \gamma - \mu \equiv \alpha,$$

setzen, und durch q^{n-2m} dividiren:

$$Y^2 q + 2\varkappa(Y+\alpha) = 0.$$

In dem zweiten Gliede dieser Gleichung verschwindet Y gegen α und somit kommt:

$$pq^{m-1} + \mu \equiv Y = \pm\sqrt{(\pm 2\alpha\varkappa)} \,.\, (\mp q)^{-\frac{1}{2}}.$$

Der vorstehende Werth für Y zeigt, dass die rellen Puncte der Curve nur nach einer einzigen der beiden Erstreckungen der Doppel-Asymptote P liegen, und dass das Zeichen von $\alpha\varkappa$ bestimmt, nach welcher von beiden.

Wir können, zum Behuf der geometrischen Deutung, p und q als Parallel-Coordinaten construiren und überdiess, da q jede beliebige lineare Function sein kann, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, annehmen, dass die beiden Coordinaten-Axen P und Q auf einander senkrecht stehen. Fällen wir hiernach von einem Puncte (p, q) der Curve ein Perpendikel auf P, so schneidet dasselbe die hyperbolische Curve Y in einem solchen Puncte, dem derselbe Werth von q und irgend ein Werth p, entspricht, der dadurch auf lineare Weise bestimmt ist, dass

$$p_1 q^{m-1} + \mu = 0.$$

Ziehen wir diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so kommt:

$$(p-p_1)q^{m-1} = \pm\sqrt{(\pm 2\alpha\varkappa)} \,.\, (\mp q)^{-\frac{1}{2}},$$

mithin

$$(p-p_1) = \pm\sqrt{(\pm 2\alpha\varkappa)} \,.\, (\mp q)^{-(m-\frac{1}{2})}.$$

Wir sehen hieraus, dass zwei unendliche Zweige der Curve nach derselben Richtung an die hyperbolische Doppel-Asymptote sich so an beiden Seiten derselben hinziehen, dass die Ordnung der Annäherung, die $(p-p_1)$ zum Ausdruck hat, um eine halbe Einheit höher ist, als die Ordnung der Annäherung derselben Curven-Zweige oder auch der hyperbolischen Doppel-Asymptote an ihre gemeinschaftliche geradlinige Doppel-Asymptote P. Die Annäherung der beiden Curven-Zweige unter sich, welche $2(p-p_1)$ zum Ausdrucke hat, ist ebenfalls von der $(m-\frac{1}{2})$. Ordnung. Es sind von den vier Zweigen der Curve in den Fällen der 5. und 6. Figur zwei, nach derselben Richtung sich erstreckende, verschwunden und die beiden übrigen bilden in unendlicher Entfernung eine S p i t z e d e r z w e i t e n A r t. (Fig. 8.) Es findet diess Statt, gleichviel ob m eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet.

Die unendlichen Zweige der Curve ändern ihre Form, wenn α verschwindet, oder, was dasselbe ist, γ und μ gleich werden. Dann müssen wir, um den Lauf derselben annäherungsweise darzustellen, zu den beiden Gliedern der Gleichung (5) noch ein drittes von nachstehender Form:

$$\xi(pq^{m-1}+\zeta)q^{n-2m-2} \equiv (\xi Y+\delta)q^{n-2m-2},$$

welches von der unmittelbar niedern Ordnung ist, hinzunehmen. Hiernach verwandelt sich die genannte Gleichung, wenn wir zugleich durch q^{n-2m-2} dividiren, und Y gegen δ vernachlässigen, in die folgende:

$$Y^2 q^2 + 2\varkappa Yq + \delta = 0. \qquad (6)$$

Lösen wir diese Gleichung in Beziehung auf q auf, so ergibt sich

$$Y = \left\{-\varkappa \pm \sqrt{(\varkappa^2-\delta)}\right\} q^{-1},$$

und also, mit Beibehaltung der frühern Bezeichnung:

$$(p-p_1) = \left\{-\varkappa \pm \sqrt{(\varkappa^2-\delta}\right\} q^{-m}.$$

Die Curve hat in diesem Falle im Allgemeinen vier unendliche Zweige, welche paarweise

zusammengehörend, an der hyperbolischen Doppel-Asymptote sich hinziehen, und unter einander und mit dieser Asymptote einen Contact haben, dessen Ordnung um eine Einheit höher ist, als die Ordnung der Annäherung an die geradlinige Doppel-Asymptote P. Der fragliche Contact ist ein $(m+1)$punctiger. Es sind die beiden Paare unendlicher Zweige reell, wenn

$$\varkappa^2 - \delta > 0$$

und dann bestimmt das Zeichen von δ ob sie auf entgegengesetzte oder auf gleiche Weise gegen ihre hyperbolische Doppel-Asymptote liegen. Sie sind imaginär, wenn

$$\varkappa^2 - \delta < 0.$$

Wenn insbesondere

$$\varkappa^2 - \delta = 0,$$

so nimmt die Gleichung (6) die nachstehende Form an:

$$(Yq + \varkappa)^2 = 0;$$

und dann müssen wir wieder zur allgemeinen Gleichung zurückgehen, um den Lauf der unendlichen Zweige zu bestimmen, und aus jener Gleichung noch die Glieder von folgender Form hinzunehmen:

$$\gamma(pq^{m-1}+\varepsilon)q^{n-2m-3} \equiv (\gamma Y+\sigma)q^{n-2m-3},$$

und dann kommt, indem wir durch q^{n-2m-3} dividiren und Y gegen σ vernachlässigen:

$$(Yq+\varkappa)^2 q + \sigma = 0.$$

Diese Gleichung gibt:

$$Y = \{-\varkappa \pm \sqrt{(\mp\sigma)}(\pm q)^{-\frac{1}{2}}\}q^{-1},$$

und zeigt, dass in dem vorliegenden Uebergangs-Falle von reellen zu imaginären unendlichen Zweigen der Curve, schon zwei der vier Zweige verschwunden sind und die beiden übrigbleibenden eine Spitze zweiter Art bilden, welche ganz auf derselben Seite der hyperbolischen Doppel-Asymptote Y liegt. Diese beiden Zweige haben mit dieser einen Contact von derselben Ordnung beibehalten, die Ordnung der Annäherung der beiden Zweige unter sich und mit der Curve:

$$Yq + \varkappa = 0,$$

ist um eine halbe Einheit, zu der $(m+\frac{1}{2})$. angestiegen. Die Ordnung jener Annäherung der beiden Zweige an einander hat zum Ausdruck:

$$2\sqrt{\sigma} \,.\, q^{-(m+\frac{1}{2})}.$$

Erst wenn σ verschwindet, steigt, indem die Ordnung der Annäherung an die hyperbolische Doppel-Asymptote unverändert bleibt, der Contact der unendlichen Zweige zu einer $(m+2)$-punctigen an (die Annäherung wird von der $(m+1)$. Ordnung). Die Curve hat dann im Allgemeinen ihre vier unendlichen Zweige wiedererhalten, die reell und imaginär sein können, wozwischen wieder ein Uebergangs-Fall liegt, in welchem zwei Zweige wegfallen und die beiden noch übrigen in unendlicher Entfernung, nach der $(m+\frac{3}{2})$. Ordnung sich an einander annähernd, eine Spitze zweiter Art bilden. Auf diesem Wege können wir weiter gehen. Wenn überhaupt zwei Zweige in unendlicher Entfernung eine Spitze zweiter Art bilden, so haben sie mit der geradlinigen Doppel-Asymptote P einen Contact, dessen Ordnung durch eine ganze Zahl ausgedrückt wird; die Ordnung ihrer Annäherung an einander wird aber immer durch eine grössere und zwar gebrochene Zahl deren Nenner 2 ist ausgedrückt.

Der Gang dieser Untersuchungen ist zur Genüge in dem Vorstehenden angezeigt; wir brechen mit der blossen Andeutung hier ab, dass die zuletzt discutirten Gleichungen in der folgenden Form enthalten sind:

$$Y^2q^g + 2\mu Yq^h + \lambda = 0,$$

in welcher die hyperbolische Doppel-Asymptote Y auf dieselbe Weise in Evidenz tritt, wie in der Gleichung (2) die geradlinige Doppel-Asymptote P. Die Discussion beider Gleichungen nimmt ganz denselben Weg.

Wir wollen diesen Paragraphen damit beschliessen, dass wir alle verschiedenen möglichen Fälle für Curven der 4. und 5. Ordnung ausführlich discutiren.

118. Für Curven der 4. Ordnung ergeben sich, wenn wir in den Formen der drei ersten Gleichungen der 102. Nummer ξ verschwinden lassen:

$$p^2rs + \mu(p+\pi)t + \lambda = o, \tag{1}$$

$$p^2rs + \mu pt + \lambda = o, \tag{2}$$

$$p^2rs + \mu p^2 + \lambda(p+\pi) = o. \tag{3}$$

Wir wollen voraussetzen, dass die drei linearen Functionen r, s, t von der Form $(q+\alpha p+\beta)$ seien. Die erste Gleichung, mit ihren 11 nothwendigen Constanten, entspricht dem Zusammenfallen zweier nicht osculirenden Parallel-Asymptoten, und gibt, indem wir p gegen Constante und Constante gegen q vernachlässigen, für die, an der Doppel-Asymptote P sich hinziehenden unendlichen Zweige

$$p^2 = \pm \sqrt{(\mp \mu\pi)}(\pm q)^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Curve hat also in unendlicher Entfernung eine gewöhnliche Spitze erster Art.

119. Die Gleichung (2) reducirt sich, bei gleicher Vernachlässigung, und indem wir 2μ an die Stelle von μ schreiben, auf folgende Weise:

$$p^2q^2 + 2\mu pq + \lambda = o$$

und zerfällt alsdann in die folgenden beiden:

$$pq + \mu \pm \sqrt{(\mu^2-\lambda)} = o.$$

Die Curve hat also in diesem Falle vier unendliche Zweige, welche an den durch diese beiden Gleichungen dargestellten Hyperbeln, dreipunctig osculirend, sich hinziehen. Die Function q ist eine willkührliche, und diess wird geometrisch dadurch bedingt, dass die Bestimmung einer bloss dreipunctig osculirenden Hyperbel zwei willkührliche Constante zulässt. Jedes Paar der vier unendlichen Zweige der Curve hat offenbar seine fünfpunctig osculirende Hyperbel, die wir jetzt in Evidenz bringen wollen. Wenn wir zu diesem Ende

$$pq + \mu \equiv Y, \qquad \mu^2 - \lambda \equiv \mu_{,}^2,$$

setzen, so können wir die Gleichung der Curve (2) auf folgende Weise schreiben:

$$(Y+\mu_{,})(Y-\mu_{,}) + \nu p(Y+\delta) + \varrho p^2(Y+\varepsilon) + \sigma p^3 + \tau p^4 = o, \tag{4}$$

wobei die einzelnen Glieder so auf einander folgen, dass, für die an P sich hinziehenden unendlichen Zweige der Curve, jedes spätere Glied ein unendlich Kleines von höherer Ordnung ist. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn zugleich

$$Y = o, \qquad \mu_{,}^2 + \nu\delta p + \varrho\varepsilon p^2 + \sigma p^3 + \tau p^4 = o,$$

woraus ersichtlich ist, dass die Hyperbel Y die Curve nur in vier Puncten schneidet, weil v [illegible] nach der Richtung der Doppel-Asymptote unendlich weit liegen. Von diesen letztern vier Puncten kommen zwei auf die Berührung mit jedem Paare der vier unendlichen Zweige der Curve. Die Hyperbel $(Y+\mu_{,})$ schneidet die Curve nur in drei Puncten, weil sie ein Zweigenpaar dreipunctig osculirt und das andere berührt. Soll diese Hyperbel jenes Zweigenpaar vierpunctig osculiren, so müssen wir $\delta=\mu_{,}$ setzen, damit es nur zwei Durchschnittspuncte gebe, und in dem Falle einer fünfpunctigen Oculation, muss auch $\varepsilon=\mu_{,}$ genommen werden. Hierbei bleibt die Hyperbel $(Y-\mu_{,})$ eine das andere Zweigenpaar bloss dreipunctig osculirende; soll sie eine vierpunctig osculirende sein, so muss das zweite Glied in der Gleichung der Curve (4) ganz ausfallen; es muss auch das dritte Glied verschwinden, wenn sie fünfpunctig osculiren soll. Sind demnach

$$Y_1 = o, \qquad Y_2 = o,$$

die Gleichungen der beiden fünfpunctig osculirenden Hyperbeln, so kommt für die Gleichung der Curve:

$$Y_1 Y_2 + \sigma p^3(p+\pi) = o. \tag{5}$$

Diese Gleichung hat die volle, dem vorliegenden Falle entsprechende Anzahl von Constanten, nemlich 10, und findet so in sich selbst ihre Rechtfertigung.

In besondern Fällen von Curven der 4. Ordnung, kann die Ordnung der Osculation zu einer sechspunctigen ansteigen. Die Gleichung der Curve geht dann, indem sie eine einzige Constante verliert, in die folgende über:

$$Y_1 Y_2 + \sigma p^4 = o, \tag{6}$$

und zeigt, dass alsdann nicht nur eine, sondern dass die beiden fünfpunctig osculirenden Hyperbeln des allgemeinen Falles durch sechspunctig osculirende vertreten werden.

Es können die vier, in dem Vorstehenden discutirten, unendlichen Zweige der Curve sowohl reell als imaginär sein. In dem Uebergangs-Falle, wo

$$\mu^2 - \lambda \equiv \mu_,^2 = o,$$

verwandelt sich die Gleichung (4) in folgende:

$$Y^2 + \nu p(Y+\delta) + \varrho p^2(Y+\varepsilon) + \sigma p^3 + \tau p^4 = o,$$

und gibt, bei gehörigen Vernachlässigungen, für die unendlichen Zweige der Curve:

$$Y^2 + \nu\delta p = o.$$

Zwei der vier unendlichen Zweige sind verschwunden, die beiden übriggebliebenen bilden eine Spitze zweiter Art auf der Hyperbel Y, in der Art, dass die Ordnung ihrer Annäherung an einander und an diese Hyperbel $\frac{3}{2}$ beträgt.

Die obige Gleichung der Curve hat noch zwei überzählige Constante, um diese fortzuschaffen, brauchen wir bloss

$$Y + \tfrac{1}{2}\nu p + \tfrac{1}{2}\varrho p^2 \equiv Y_0$$

zu setzen, und erhalten alsdann für die Curve eine Gleichung von folgender Form mit den 9 nothwendigen Constanten:

$$Y_0^2 + \alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3 + \delta p^4 = o. \tag{7}$$

Wenn insbesondere in der letzten Gleichung α verschwindet, so kommt

$$Y_0^2 + \beta p^2 + \gamma p^3 + \delta p^4 = o,$$

oder, indem wir $\sqrt{-\beta} \equiv \mu_0$ setzen,

$$(Y_0+\mu_0 p)(Y_0-\mu_0 p) + \gamma p^3 + \delta p^4 = o.$$

Die Curve hat ihre vier unendlichen Zweige wiedererhalten. Beide Paare dieser Zweige werden von der Hyperbel Y_0 dreipunctig osculirt. Jede der beiden Hyperbeln

$$Y_0 \pm \mu_0 p = o$$

osculirt ein Zweigenpaar vier- und das andere dreipunctig und schneidet überdiess, hiermit in Uebereinstimmung, die Curve nur noch in einem einzigen Puncte auf der geraden Linie:

$$\delta p + \gamma = o.$$

Wenn wir auf gleiche Weise, wie in dem frühern analogen Falle, die beiden, ein Zweigenpaar fünfpunctig osculirenden, Hyperbeln, welche hier auch das andere Zweigenpaar dreipunctig osculiren, in Evidenz bringen, so ergibt sich folgende Gleichung, welche ebenfalls die acht nothwendigen Constanten hat:

$$Y_1 Y_2 + \sigma p^4 = o. \text{*)} \tag{8}$$

Die unendlichen Zweige der Curve sind, je nachdem β negativ oder positiv ist, entweder alle vier reell oder imaginär. Wenn β verschwindet, wird die Gleichung der Curve

$$Y_0^2 + \gamma p^3 + \delta p^4 = o.$$

Die Curve hat alsdann von ihren unendlichen Zweigen wiederum zwei verloren, und die

*) Weil die beiden Hyperbeln Y_1 und Y_2 sich dreipunctig osculiren, und demnach Y_2 die Form $(Y_1+\alpha p+\beta p^2)$ hat, kommen auf das Glied $Y_1 Y_2$ nur $5+2=7$ Constante.

beiden übrigbleibenden bilden eine Spitze zweiter Art, und haben unter einander und mit der Hyperbel Y_0 einen Contact von der Ordnung $\frac{5}{2}$. Die letzte Gleichung schliesst die nothwendige Anzahl von Constanten in sich ein, nemlich 7.

Weiter können wir hier nicht particularisiren, denn, wenn aus der letzten Gleichung auch das Glied γp^3 ausfällt, löset dieselbe in die Gleichungen zweier reellen oder imaginären Hyperbeln sich auf.

120. Die Gleichung (3) der 118. Nummer:

$$p^2rs + \mu p^2 + \lambda(p+\pi) = 0, \tag{3}$$

entspricht dem Zusammenfallen zweier osculirenden Parallel-Asymptoten. Hier ist die Annäherung der Curve an ihre Doppel-Asymptote, wie in dem Falle der vorigen Nummer, von der ersten Ordnung. Wir können diese Gleichung zunächst unter der folgenden Form schreiben:

$$(pq+\mu_{\prime})(pq-\mu_{\prime}) + \nu p(pq+\delta) + \varrho p^2(pq+\varepsilon) + \sigma p^3 + \tau p^4 = 0,$$

welche sich von der Gleichung (4) der vorigen Nummer nur dadurch unterscheidet, dass pq an die Stelle von Y getreten ist. Die Curve hat demnach zwei solche unendliche Zweigenpaare, für welche das Maass der Annäherung dasselbe ist; nur liegen dieselben, wegen des entgegengesetzten Zeichens von $\mu_{\prime}$, entgegengesetzt in Beziehung auf die Doppel-Asymptote P. Die letzte Gleichung können wir wiederum, um die beiden fünfpunctig osculirenden Hyperbeln in Evidenz treten zu lassen, folgendergestalt schreiben:

$$Y_1 Y_2 + \sigma p^3(p+\pi) = 0;$$

sie schliesst, auch in dieser Form, die 9 nothwendigen Constanten ein.

Wenn π verschwindet, so werden auch hier die beiden fünfpunctig osculirenden Hyperbeln durch sechspunctig osculirende vertreten. —

121. Wenn wir in den letzten sechs Gleichungen der 102. Nummer ξ gleich Null setzen, erhalten wir die folgenden:

$$p^2\Theta_3 + \mu(p+\alpha)rs + \lambda w = 0, \tag{1}$$
$$p^2\Theta_3 + \mu prs + \lambda w = 0, \tag{2}$$
$$p^2\Theta_3 + \mu prs + \lambda(p+\alpha) = 0, \tag{3}$$
$$p^2\Theta_3 + \mu(p+\alpha)(p+\beta)r + \lambda(p+\gamma) = 0, \tag{4}$$
$$p^2\Theta_3 + \mu p(p+\alpha)r + \lambda(p+\gamma) = 0, \tag{5}$$
$$p^2\Omega_3 + \mu(p+\alpha) = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichungen entsprechen dem Zusammenfallen zweier parallelen Asymptoten, die mit der Curve in den verschiedenen möglichen Ordnungen der Annäherung stehen. In dem Falle der ersten und letzten Gleichung, die dem Zusammenfallen zweier gewöhnlichen und zweier vierpunctig osculirenden parallelen Asymptoten entsprechen, bildet die Curve eine Spitze erster Art; die Ordnung der Annäherung der beiden Zweige an einander und an die Doppel-Asymptote beträgt bezüglich $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$. In dem Falle der 4. Gleichung sind zwei dreipunctig osculirende parallele Asymptoten zusammengefallen, und wir erhalten zwei Paare gewöhnlicher hyperbolischer Zweige, die entgegengesetzt in Beziehung auf die beiden Seiten der Doppel-Asymptote liegen und für welche das Maass der Annäherung dasselbe ist. Die Ordnung der Annäherung ist dieselbe wie bei einer gewöhnlichen Asymptote (114). Die 3. Gleichung endlich entspricht dem Zusammenfallen einer gewöhnlichen und einer vierpunctig osculirenden parallelen Asymptote; und stellt eine Curve mit vier immer reellen unendlichen Zweigen dar, von welchen zwei mit der Doppel-Asymptote einen Contact der zweiten und zwei einen Contact der ersten Ordnung haben. Die Gleichungen der beiden hyperbolischen Asymptoten sind:

$$pq + \mu = 0, \qquad pq^2 + \lambda\alpha = 0,$$

und die Lage der unendlichen Zweige gegen die Doppel-Asymptote ist wie in der 7. Figur. (116.) In dem Falle der vorletzten Gleichung, wo eine vierpunctig mit einer dreipunctig osculirenden Parallel-Asymptote zusammenfällt, ist wiederum eine Spitze erster Art vorhanden und die Ordnung der Annäherung beträgt hier, wie in dem letzten Falle, $\frac{3}{2}$. (115.)

122. Hiernach bedarf nur noch die zweite Gleichung, die, wenn wir in ihrem zweiten Gliede μ durch 2μ ersetzen, die folgende wird:

$$p^2\Theta_3 + 2\mu p\Theta_2 + \lambda w = o, \tag{1}$$

einer ausführlichern Discussion. Die entsprechende Curve hat, im Allgemeinen, vier unendliche Zweige, die an der Doppel-Asymptote P sich hinziehen. Diese Zweige haben mit der Doppel-Asymptote einen gewöhnlichen (zweipunctigen), und, paarweise, mit den durch folgende Gleichung

$$p^2q^2 + 2\mu pq + \lambda \equiv (pq+\sigma)(pq+\sigma') = o$$

dargestellten beiden Hyperbeln einen dreipunctigen Contact. Je nachdem der Ausdruck $(\mu^2-\lambda)$ positiv oder negativ ist, sind die in Rede stehenden vier unendlichen Zweige reell oder imaginär.

Wenn insbesondere $\mu^2=\lambda$ und also $\sigma=\sigma'$, so können wir, indem wir Functionen von der Form

$$1 + \alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3 + \cdots + \zeta p^n,$$

der Kürze halber durch φ_n bezeichnen, die Gleichung der Curve auf folgende Weise schreiben:

$$(pq+\mu)^2 s + \varkappa(pq+\mu)\varphi_3 + \varrho\varphi_5 = o;$$

oder, indem wir

$$pq + \mu \equiv Y$$

setzen, auch folgendergestalt:

$$Y^2 s + 2\varkappa Y\varphi_3 + \varrho\varphi_5 = o. \tag{2}$$

Um den Lauf der unendlichen Zweige der Curve annäherungsweise darzustellen, ergibt sich die nachstehende Gleichung:

$$Y^2 + 2\varkappa Yq^{-1} + \varrho q^{-1} = o,$$

welche, weil wir das zweite Glied gegen das dritte ohne Weiteres vernachlässigen können, sich auf folgende:

$$Y^2 + \varrho q^{-1} = o,$$

reducirt und

$$Y = \pm\sqrt{\mp\varrho}\,(\pm q)^{-\frac{1}{2}}$$

gibt. Es hat also die Curve in unendlicher Entfernung auf der Hyperbel Y eine **Spitze zweiter Art**. Die beiden Zweige, welche die Spitze bilden, haben unter sich und mit einem, durch das Zeichen von ϱ bestimmten, Zweige der eben genannten Hyperbel einen Contact von der Ordnung $\frac{3}{2}$. (117.) Die Gleichung (2) enthält 17 Constante und unter diesen **zwei** überzählige, denn die neue Bedingung $\mu^2=\lambda$ reducirt die 16 Constanten der Gleichung (1) auf 15. Diese beiden überzähligen Constanten kommen auf die willkührliche Annahme der Function q, welche in keiner Beziehung zur Curve steht. Wenn wir insbesondere annehmen, dass die Linie Q eine Asymptote der Curve sein soll, so reducirt sich der Exponent der Function φ_5 um zwei Einheiten und wir erhalten alsdann die folgende Gleichung mit der gerade nothwendigen Anzahl von Constanten:

$$Y^2 s + 2\varkappa\varphi_3 Y + \varrho\varphi'_3 = o.$$

Dass aber die Function q willkührlich von Vorne herein angenommen werden kann, wird geometrisch dadurch bedingt, dass die Hyperbel Y von den beiden unendlichen Zweigen der Curve nur nach der Ordnung $\frac{3}{2}$ osculirt wird, und folglich jede beliebige Hyperbel, welche die Hyperbel Y nach der zweiten Ordnung (dreipunctig) osculirt, zu der Curve in gleicher Beziehung steht.

Wir können auch die folgende Gleichung:

$$Y^2 s + 2\varkappa p^2(1+\alpha p)Y + \varrho\varphi_5 = 0, \qquad (3)$$

welche 15, und unter diesen keine willkührlichen Constanten enthält, anstatt der letzten Gleichung, für die allgemeine Gleichung solcher Curven der 5. Ordnung nehmen, welche eine nicht osculirende Doppel-Asymptote P haben und deren, an dieser Asymptote sich hinziehenden, Zweige unter sich in einem mehr innigen Contacte, als eine blosse Berührung ist, stehen. *)

Die Natur der unendlichen Zweige ändert sich schrittweise, wenn in der Function φ_5 der letzten Gleichung das constante Glied und die niedrigsten Potenzen von p ausfallen. Schreiben wir demnach, um zugleich alle particulären Fälle hervorzuheben, diese Gleichung folgendergestalt:

$$Y^2 s + 2\varkappa p^2(1+\alpha p)Y + \varrho p^h \varphi_{5-h} = 0,$$

so ergibt sich für die unendlichen Zweige:

$$Y^2 q + 2\varkappa p^2 Y + \varrho p^h = 0;$$

indem wir annäherungsweise $q = -\mu p^{-1}$ setzen, kommt:

$$Y^2 - 2\varkappa\mu p^3 Y - \varrho\mu p^{h+1} = 0,$$

und hiernach

$$Y = \varkappa\mu p^3 \pm ((\varkappa\mu)^2 p^6 + \varrho\mu p^{h+1})^{\frac{1}{2}}.$$

So lange $h<5$, reducirt sich diese Gleichung auf:

$$Y = \pm(\varrho\mu p^{h+1})^{\frac{1}{2}};$$

---

*) Da die Form der Gleichung (3) den nachfolgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt wird, scheint es mir angemessen, die Behauptung des Textes, ungeachtet sie in sich selbst ihre Rechtfertigung findet, dadurch zu bestimmen, dass wir unmittelbar zeigen, wie die Gleichung (2), welche wir unter folgender Form schreiben können:

$$Y^2 s + 2\mu\sigma Y + \tau p Y + 2\varkappa p^2(Y+\delta p) + \varrho\varphi_5 = 0, \qquad (a)$$

in folgende Form verwandelt werden kann:

$$Y_1 s_1 + 2\varkappa' p^2(Y_1+\delta p) + \varrho'\varphi'_5 = 0. \qquad (b)$$

In der ursprünglichen Gleichung ist:

$$s \equiv q + \gamma p + \varepsilon, \qquad Y \equiv pq + \mu.$$

Da jede Hyperbel Y_1, welche Y dreipunctig osculirt, zu der Curve in derselben Beziehung als Y steht, so muss die Form (a) im Allgemeinen unverändert bleiben, wenn wir in derselben, nach folgender identischen Gleichung mit zwei unbestimmten Constanten:

$$Y \equiv Y_1 + \alpha p + \beta p^2,$$

statt der Function Y die neue Function Y_1 einführen. Es ist offenbar, dass, bei dieser Umformung, die beiden letzten Glieder der ersten Gleichung in den beiden letzten der zweiten Gleichung sich wiederfinden. Die drei ersten Glieder der Gleichung (a) geben, wenn wir diejenigen Ausdrücke, welche wir in den beiden letzten Gliedern der Gleichung (b) zusammenfassen können, unberücksichtigt lassen, folgende Entwicklung:

$$Y_1^2 s + 2\alpha p Y_1(q+\varepsilon) + 2\beta p^2 Y_1 q + \alpha^2 p^2 q + 2\mu\sigma Y_1 + \tau p Y_1,$$

und da

$$pq = Y - \mu,$$

sokommt:

$$Y_1^2(s+2\beta p+2\alpha) - 2\mu(\alpha-\sigma)Y_1 + (2\alpha\delta - 2\beta\mu + \alpha^2 + \tau)pY_1.$$

In diesem Ausdrucke verschwinden die Coefficienten von Y_1 und pY_1 wenn wir über die beiden unbestimmten Constanten (was immer, ohne dass dieselben unendlich werden, möglich ist) so verfügen, dass

$$\alpha = \sigma, \qquad 2\mu\beta = 2\sigma\delta + \sigma^2 + \tau.$$

Setzen wir hiernach, der Kürze halber,

$$+ 2\beta p + 2\alpha \equiv s_1,$$

so ergibt sich, was zu zeigen war, ganz einfach:

$$Y_1^2 s_1.$$

also kommt, wenn h eine ungerade Zahl bedeutet:

$$Y = \pm \sqrt{(\varrho\mu)} \cdot p^{\frac{h+1}{2}},$$

und die Curve hat vier unendliche Zweige, die, je nachdem $\varrho\mu$ positiv oder negativ ist, entweder alle vier reell oder alle vier imaginär sind; wenn aber h gleich Null oder gerade ist, kommt

$$Y = \pm \sqrt{(\pm\varrho\mu)} \cdot (\pm p)^{\frac{h+1}{2}},$$

wonach die Curve eine Spitze zweiter Art hat; das Zeichen von $\varrho\mu$ bestimmt, auf welcher Seite der Doppel-Asymptote P diese Spitze liegt. Wenn endlich $h=5$, so kommt:

$$Y = \{ \varkappa\mu \pm ((\varkappa\mu)^2+\varrho\mu)^{\frac{1}{2}} \} p^3,$$

wonach die Curve wiederum vier unendliche Zweige hat, die reell oder imaginär sind, je nachdem der Ausdruck $((\varkappa\mu)^2+\varrho\mu)$ positiv oder negativ ist.

Es ergibt sich auf diese Weise, dass die Curve, wenn ihre allgemeine Gleichung folgende Formen hat:

$$Y^2s + 2\varkappa p^2(1+\alpha p)Y + \varrho\varphi_5 = 0, \qquad [15] \qquad (3)$$
$$Y^2s + 2\varkappa p^2(1+\alpha p)Y + \varrho p^2\varphi_3 = 0, \qquad [13] \qquad (4)$$
$$Y^2s + 2\varkappa p^2(1+\alpha p)Y + \varrho p^4(1+\beta p) = 0, \qquad [11] \qquad (5)$$

in unendlicher Entfernung auf der Hyperbel Y eine Spitze zweiter Art bildet. Die Spitzen in den Fällen der vorstehenden drei Gleichungen unterscheiden sich durch die Ordnung der Annäherung derjenigen beiden unendlichen Zweige, welche dieselben bilden, unter einander und an die Hyperbel Y. Diese Ordnung ist bezüglich $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ und $\frac{7}{2}$.

Wenn aber die Gleichung der Curve eine der nachstehenden Formen hat:

$$Y^2s + 2\varkappa p^2(1+\alpha p)Y + \varrho p\varphi_4 = 0, \qquad [14] \qquad (6)$$
$$Y^2s + 2\varkappa p^2(1+\alpha p)Y + \varrho p^3\varphi_2 = 0, \qquad [12] \qquad (7)$$
$$Y^2s + 2\varkappa p^2(1+\alpha p)Y + \varrho p^6 = 0, \qquad [10] \qquad (8)$$

so ziehen sich an der Doppel-Asymptote P, ohne von ihr osculirt zu werden, zwei Paare unendlicher Zweige hin. Diese osculiren sich aber unter einander, so wie die Hyperbel Y bezüglich drei-, vier- und fünfpunctig. Bei jeder Gleichung ist die nothwendige Constanten-Anzahl bemerkt.

123. In dieser und der folgenden Nummer wollen wir die Discussion der vorigen aus einem andern Gesichtspuncte wieder aufnehmen und hierbei bloss unser allgemeines Princip der Behandlung in Anwendung bringen.

Wenn die Curve zwei Paare unendlicher Zweige hat, so hat jedes derselben seine, an der Doppel-Asymptote P sich hinziehende, fünfpunctig osculirende Hyperbel. Diese beiden Hyperbeln, welche wir durch Y_1 und Y_2 bezeichnen wollen, können wir in der Gleichung der Curve unmittelbar in Evidenz bringen, und erhalten alsdann, den Gleichungen (1), (6), (7) und (8) entsprechend, als vollkommen äquivalent, die folgenden:

$$Y_1 Y_2 s + \nu p^2(Y_1+\delta) + \varrho p^3(Y_1+\varepsilon) + \sigma p^4 + \tau p^5 = 0, \qquad [16] \qquad (9)$$
$$Y_1 Y_2 s + \nu p^2(Y_1+\delta p) + \varrho p^3(Y_1+\varepsilon p) + \sigma p^5 = 0, \qquad [14] \qquad (10)$$
$$Y_1 Y_2 s + \nu p^2(Y_1+\delta p^2) + \varrho p^4(Y_1+\varepsilon p^2) = 0, \qquad [12] \qquad (11)$$
$$Y_1^2 s + \nu p^2(Y_1+\delta p^3) + \varrho p^5 Y_1 = 0. \qquad [10] \qquad (12)$$

In dem allgemeinsten Falle der Gleichung (1) haben die zwei Paare unendlicher Zweige der Curve, welche an der Doppel-Asymptote sich hinziehen, einen gewöhnlichen Contact. Diejenige Hyperbel also, welche ein Zweigenpaar nach der Richtung dieser Doppel-Asymptote fünfpunctig osculirt, berührt zugleich das andere Zweigenpaar, so dass sie, weil nach dieser Richtung sieben Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, die Curve nur noch in

drei Puncten schneidet. Diess tritt aus der Form der Gleichung (9) unmittelbar hervor, denn, setzen wir in dieser Gleichung Y_1 (oder Y_2) gleich Null, so ergibt sich eine Gleichung von der Form:

$$\mathrm{p}^2\varphi_3 = 0.$$

Diese Gleichung stellt zwei mit der Doppel-Asymptote zusammenfallende und drei ihr parallele gerade Linien dar. Jede dieser letztern schneidet die Hyperbel Y_1 (oder Y_2) in einem einzigen Puncte. Die beiden fünfpunctig osculirenden Hyperbeln haben unter sich einen gewöhnlichen Contact, weil die von ihnen osculirten unendlichen Zweige der Curve ebenfalls unter einander einen solchen Contact haben; daher ist

$$Y_2 \equiv Y_1 + \alpha + \beta\mathrm{p} + \gamma\mathrm{p}^2,$$

wonach auf $Y_1 Y_2$ nur acht Constante kommen. Somit ergibt sich sogleich 16 als die Anzahl der Constanten in der Gleichung (9). Wenn auf einem der von Y_1 (oder Y_2) fünfpunctig osculirten unendlichen Zweige der Curve ein Punct immer weiter rückt, so wird die Function Y_1 (oder Y_2) ein unendlich Kleines der dritten Ordnung, während Y_2 (oder Y_1) constant und gleich $+\alpha$ (oder $-\alpha$) und zugleich s ein unendlich Grosses der ersten Ordnung wird. Das erste Glied der Gleichung (9) ist also unendlich klein und von der zweiten Ordnung, von derselben Ordnung als das zweite Glied; dann steigt diese Ordnung in jedem folgenden Gliede um eine Einheit.

Wenn die unendlichen Zweigenpaare der Curve sich d r e i p u n c t i g o s c u l i r e n, so müssen die beiden fünfpunctig osculirenden Hyperbeln Y_1 und Y_2 unter einander einen Contact derselben Ordnung haben, wonach

$$Y_2' \equiv Y_1 + \beta\mathrm{p} + \gamma\mathrm{p}^2.$$

Jede dieser Hyperbeln schneidet die Curve nur in 2 Puncten, weil 8 Durchschnittspuncte, von welchen drei demjenigen Zweigenpaare, das von eben dieser Hyperbel nicht fünfpunctig osculirt wird, angehören, nach der Richtung von P unendlich weit liegen. Diess fordert, dass in der Gleichung (9) noch δ verschwindet, wonach dieselbe, nachdem sie 2 Constante verloren hat, in die Gleichung (10) übergeht.

Wenn die beiden unendlichen Zweigenpaare sich v i e r p u n c t i g o s c u l i r e n, so kommt, damit auch die beiden fünfpunctig osculirenden Hyperbeln unter einander einen vierpunctigen Contact haben:

$$Y_2 \equiv Y_1 + \gamma\mathrm{p}^2.$$

Dann schneidet jede dieser Hyperbeln die Curve nur noch in einem einzigen Puncte, weil 9 Puncte, von welchen 5 dem einen und 4 dem andern Zweigenpaare angehören, nach der Richtung von P unendlich weit liegen. Indem wir demgemäss in der Gleichung (10) $\delta = 0$ setzen, geht diese Gleichung, nach Verlust zweier Constanten, in die Gleichung (11) über.

Wenn endlich die beiden Zweigenpaare sich fünfpunctig osculiren, so ist die fünfpunctig osculirende Hyperbel für beide dieselbe. Sie tritt in der Gleichung (12), in der sich die Constanten-Anzahl wiederum um zwei Einheiten vermindert hat, in Evidenz. Diese Hyperbel kann, ausser dem doppelten Osculationspuncte, keinen Punct mehr mit der Curve gemein haben.

124. Zwischen den vier, durch die Gleichungen (9)—(12) der vorigen Nummer dargestellten, Fälle von Curven mit vier unendlichen Zweigen schalten sich die drei, durch die Gleichungen (3)—(5) der 122. Nummer dargestellten, Fälle von Curven mit einer Spitze zweiter Art in der Art ein, dass die Constanten-Anzahl nun schrittweise durch jede Einheit hindurch von 16 bis 10 abnimmt. Die zunehmende Particularisation kommt also lediglich auf die zu discutirenden unendlichen Zweige. Der Grund, warum für die zwischenliegenden Fälle die Form der Gleichungen (9)—(12) illusorisch wird, wird in den folgenden Andeutungen ihre Erläuterung finden.

Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung ist in der Gleichung (9):

$$Y_{\prime}Y_{\prime\prime} \equiv Y_{\prime}^2 + (\alpha+\beta p+\gamma p^2)Y_{\prime} \equiv Y^2 - \tfrac{1}{4}(\alpha+\beta p+\gamma p^2)^2,$$

indem wir Y durch die nachstehende identische Gleichung einführen:

$$Y_{\prime} + \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta p+\gamma p^2) \equiv Y.$$

Hiernach können wir die eben genannte Gleichung, wenn wir, der Kürze wegen,

$$\tfrac{1}{4}\alpha^2 \equiv -\xi, \qquad \tfrac{1}{2}\alpha\beta \equiv -\varkappa, \qquad \tfrac{1}{4}(\beta^2+2\alpha\gamma) \equiv -\lambda, \tag{13}$$

setzen, auch auf folgende Form, mit der gerade nothwendigen Anzahl von Constanten, bringen:

$$(Y^2+\xi+\varkappa p+\lambda p^2)s + \nu' p^2(Y+\delta') + \varrho' p^3(Y+\varepsilon') + \sigma' p^4 + \tau' p^5 = 0. \tag{14}$$

Diejenige Curve der vierten Ordnung, deren Gleichung:

$$Y^2 + \xi + \varkappa p + \lambda p^2 = 0,$$

steht hierbei in derselben Beziehung zu den unendlichen Zweigen der Curve, als früher das System der beiden fünfpunctig osculirenden Hyperbeln $Y_{\prime}$ und $Y_{\prime\prime}$.

Wenn wir von der Form der Gleichung (14) ausgehen, so können wir nur dann auf reelle Weise zu der Form (9) zurückkehren, wenn ξ negativ ist. Wenn ξ und somit auch α verschwindet, so werden, im Allgemeinen, die Werthe von β und γ, als Folge der Gleichungen (13), unendlich und darum kann alsdann die Form der Gleichung (9) nicht mehr bestehen. In diesem Falle ergibt sich die Gleichung:

$$(Y^2+\varkappa p+\lambda p^2)s + \nu' p^2(Y+\delta') + \varrho' p^3(Y+\varepsilon') + \sigma' p^4 + \tau' p^5 = 0,$$

als äquivalent mit der Form der Gleichung (3), für die allgemeine Gleichung der Curven 5. Ordnung mit einer Spitze zweiter Art. Hierbei stellt diejenige Curve 4. Ordnung, deren Gleichung folgende ist:

$$Y^2 + \varkappa p + \lambda p^2 = 0,$$

und welche selbst eine Spitze zweiter Art hat, den Lauf derjenigen unendlichen Zweige, welche die fragliche Spitze bilden, genauer dar, als die Hyperbel Y.

Wenn auch $\varkappa=0$, so werden die drei Gleichungen (13) befriedigt, wenn wir $\alpha=0$ und $\beta^2+4\lambda=0$ setzen. Dann können wir also wiederum zu der allgemeinen Form der Gleichung (9) zurückgehen, und zwar auf reelle Weise, wenn λ negativ ist. —

§. 6.

Asymptoten der dritten Ordnung. *)

125. In denjenigen Fällen, wo wir der allgemeinen Gleichung der Curven der n. Ordnung nicht mehr die folgende Form:

$$p\Omega_{n-1} + \mu\Omega_{n-2} = 0$$

geben konnten, oder wo diese Form nicht mehr eine einzige und vollkommen bestimmte blieb, haben wir die allgemeine Gleichung auf die folgende Form gebracht:

$$\Omega_2\Omega'_{n-2} + \mu\Omega_{n-2} = 0.$$

Dadurch lassen wir, statt der geradlinigen Asymptote **P**, Asymptoten der zweiten Ordnung durch die Function Ω_2 in Evidenz treten. Jede besondere Bestimmung über diese Function Ω_2 hat uns zu Curven der n. Ordnung mit Asymptoten von eigenthümlicher Art, namentlich zu Curven mit parabolischen Asymptoten und mit Parallel-Asymptoten geführt. Es ist klar,

*) Wir nennen überhaupt Asymptoten der m. Ordnung solche Curven, welche m geradlinige Asymptoten vertreten, nicht aber eine Curve der m. Ordnung, welche mit der gegebenen Curve bloss eine oder mehrere, jedoch nicht alle, Asymptoten gemein hat.

dass der frühere Fall geradliniger Asymptoten in dem Falle von Asymptoten der zweiten Ordnung einbegriffen ist.

Wenn wir der allgemeinen Gleichung der Curven der n. Ordnung auch die letzte Form nicht mehr geben können, oder wenn, indem Ω_2 aufhört eine Asymptote der Curve zu sein, diese Form unbestimmt wird, so müssen wir uns zu der nachstehenden Form wenden:

$$\Omega_3\Omega_{n-3} + \mu\Omega_{n-2} = 0,$$

in welcher durch den Factor Ω_3 Asymptoten der dritten Ordnung in Evidenz treten. Alle frühern Fälle finden wir auch hier wieder. Die geraden Linien und Kegelschnitte, welche Asymptoten der Curve Ω_3 sind, sind es auch für die vorliegende Curve der n. Ordnung. Als neue Fälle erhalten wir also nur diejenigen, in welchen die folgende identische Gleichung:

$$\Omega_3 \equiv p\Omega_2 + xs$$

nicht Statt finden kann, oder Statt finden kann, ohne dass p und Ω_2 Asymptoten der Curve Ω_3 sind. Einerseits particularisirt sich die Function Ω_3 alsdann auf folgende zwiefache Weise:

$$\Omega_3 \equiv (p^3+\lambda q^2) + \varrho(p+\delta), \tag{1}$$

$$\Omega_3 \equiv p^3 + \lambda q, \tag{2}$$

und die entsprechende Curve der dritten Ordnung, die dann weder gerade Linien noch Kegelschnitte zu Asymptoten hat, hat entweder semicubi-parabolische Asymptoten, oder sie selbst ist eine cubische Parabel und hat nur andere cubische Parabeln zu ihren Asymptoten. Andrerseits ergeben sich die folgenden Particularisationen der Function Ω_3:

$$\Omega_3 \equiv p(p^2+\lambda q) + \mu, \tag{3}$$

$$\Omega_3 \equiv p^3 + \alpha p + \beta, \tag{4}$$

und die entsprechende Curve der dritten Ordnung ist eine Trident-Curve, die neben einer geradlinigen Asymptote solche parabolische Asymptoten hat, deren Durchmesser der geradlinigen Asymptote parallel sind, oder sie artet in ein System von drei parallelen geraden Linien aus.

Die hierdurch angezeigten vier neuen Fälle wollen wir nach einander einzeln discutiren.

Erster Fall.

Curven mit semicubi-parabolischen Asymptoten.

126. Die allgemeine Form der Gleichung solcher Curven der n. Ordnung ist, indem wir, was im Allgemeinen erlaubt ist, Ω_{n-3} durch Θ_{n-3} ersetzen:

$$\Omega_n \equiv [(p^3+\lambda q'^2) + \varrho(p+\delta)]\Theta_{n-3} + \mu''\Omega''_{n-2} = 0,$$

$$\equiv (p^3+\lambda q'^2)\Theta_{n-3} + \mu'\Omega'_{n-2} = 0. \tag{1}$$

Diese Form enthält noch eine überzählige Constante. Denn, ohne weder die vorstehende Gleichung selbst noch ihre Form zu ändern, können wir sie, durch Einführung einer unbestimmten Constanten x, auf folgende Weise schreiben:

$$\Omega_n \equiv (p^3+\lambda(q'+x)^2)\Theta_{n-3} + [\mu'\Omega'_{n-2} - \lambda(2xq'+x^2)\Theta_{n-3}],$$

und wenn wir dann, was immer auf lineare Weise möglich ist, x so bestimmen, dass

$$\mu'\Omega'_{n-2} - \lambda(2xq'+x^2)\Theta_{n-3} \equiv \mu(p+\alpha)\Theta'_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4},$$

und zugleich, der Kürze halber,

$$q' + x \equiv q$$

setzen, so ergibt sich:

$$\Omega_n \equiv (p^3+\lambda q^2)\Theta_{n-3} + \mu(p+\alpha)\Theta'_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4}.\text{*)} \tag{2}$$

*) Wir werden in dem Folgenden die verschiedenen Functionen Θ und Ω als von p und q abhängig betrachten, und hierbei voraussetzen, dass der Coefficient der höchsten Potenz von q jedesmal gleich Eins sei.

Diese Form, welche keine neue Reduction mehr gestattet, enthält **zwei** Constante weniger als die allgemeine Form der Function des n. Grades, nemlich $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 2\right)$, und ist die **allgemeine** für den in Rede stehenden Fall.

In dem Falle der identischen Gleichung (1) werden drei geradlinige Asymptoten durch die semicubische Parabel:

$$p^3 + \lambda q'^2 = o, \tag{3}$$

vertreten. Diese Parabel behält dieselbe Beziehung zur Curve, wie wir sie auch, parallel mit sich selbst, nach der Richtung der geraden Linie P verschieben (eine Verschiebung, bei welcher der Rückkehrpunct der Parabel diese gerade Linie beschreibt). Eine besondere und ausgezeichnete Beziehung zur Curve erhält dieselbe indess in derjenigen Lage, wo ihre Gleichung in die folgende übergeht:

$$p^3 + \lambda q^2 = o, \tag{4}$$

wonach die Form der identischen Gleichung (2) sich herausstellt.

127. Wenn wir zwei solche Puncte der semicubi-parabolischen Asymptote (3) und der Curve Ω_n betrachten, welche demselben Werthe von q entsprechen und die bezüglichen Werthe der Function p durch p und $(p+\pi)$ bezeichnen, so gibt die Gleichung der Curve, verbunden mit der Gleichung der genannten Parabel:

$$(3\pi p^2 + 3\pi^2 p + \pi^3)\Theta_{n-3} + \mu'\Omega'_{n-2} = o.$$

Wenn wir q, und also auch q', unendlich gross nehmen, so wird nach der Gleichung (3) auch p unendlich gross und zwar in der Art, dass q^2 und p^3 von gleicher Ordnung sind, und wir also p gegen q vernachlässigen können. Um alsdann die letzte Gleichung zu befriedigen, können wir auch π gegen p vernachlässigen, weil der Werth von π durch diese Vernachlässigung nicht unendlich gross wird; wir finden alsdann nemlich:

$$\pi = -\frac{\mu'\Omega'_{n-2}}{3p^2\Theta_{n-3}} = -\frac{\mu' q}{3p^2} = \frac{\mu' p}{3\lambda q} = -\frac{\mu'}{3\lambda^{\frac{1}{3}}}\,q^{-\frac{1}{3}}. \tag{5}$$

In dem Falle der Gleichung (2) und der semicubi-parabolischen Asymptote (4), finden wir, indem wir $\mu'\Omega'_{n-2}$ durch $\mu(p+\alpha)\Theta'_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4}$ ersetzen, auf gleichem Wege:

$$\pi = -\frac{\mu p\Theta'_{n-3}}{3p^2\Theta_{n-3}} = -\frac{\mu}{3}\cdot p^{-1} = \frac{\mu}{3\lambda^{\frac{1}{3}}}\cdot q^{-\frac{2}{3}}. \tag{6}$$

128. Aus den analytischen Entwicklungen der vorigen beiden Nummern ergeben sich die nachstehenden Folgerungen.

Die durch die Gleichungen (1) und (2) dargestellten Curven der n. Ordnung haben unendlich viele semicubi-parabolische Asymptoten, welche man nach einander alle erhält, wenn man eine derselben parallel mit sich selbst verschiebt. Von je zwei solchen Parabeln ist auch jede als Asymptote der andern anzusehen; ein ganz analoger Fall, wie wenn man eine gewöhnliche Parabel parallel mit sich selbst und nach ihrer Durchmesser-Richtung verschiebt. Unter diesen unendlich vielen semicubi-parabolischen Asymptoten ist aber immer **eine**, welche mit der Curve in unendlicher Entfernung einen innigern Contact hat, und die wir zur Auszeichnung eine siebenpunctig osculirende nennen wollen. Für diese Asymptote, welche durch die Gleichung (4) dargestellt wird, ist die Ordnung des Contactes, die nach der vorigen Nummer im Allgemeinen nur $\frac{1}{3}$ ist, bis $\frac{2}{3}$ angestiegen.

In dem Falle einer gewöhnlichen semicubi-parabolischen Asymptote ändert, nach der Gleichung (5), π sein Zeichen zugleich mit q; die Curve nähert sich also ihrer Asymptote, je nachdem μ' positiv oder negativ ist, beidesmal auf der convexen oder beidesmal auf der concaven Seite. In dem Falle der siebenpunctig osculirenden Asymptote zeigt die Gleichung (6) dass π sein Zeichen beibehält, wenn q das seinige wechselt: die zwei Zweige der Curve

ziehen sich an den beiden Zweigen dieser Asymptote einerseits an der convexen und andrerseits an der concaven Seite der letztern hin.

129. Bei Curven mit semicubi-parabolischen Asymptoten, von besonderer Art, kann an die Stelle der siebenpunctig-osculirenden eine mehr als siebenpunctig osculirende treten und diese bei Curven der n. Ordnung sich bis zu einer $3n$punctig osculirenden erheben. Hierbei particularisirt die Curve sich so, dass die $(3n-7)$ Durchschnittspuncte mit der osculirenden Asymptote, welche im Allgemeinen nicht unendlich weit liegen, allmählich unendlich weit rücken. Für jeden neuen unendlich weit rückenden Punct, steigt die Ordnung des Contactes um $\frac{1}{3}$, so dass dieselbe für die osculirende Asymptote von $\frac{7}{3}$ bis $(n-\frac{2}{3})$ ansteigen kann.

In dem Falle einer gewöhnlichen semicubi-parabolischen Asymptote liegen zwei Zweige der Curve beide auf den convexen oder beide auf den concaven Seiten dieser Asymptote. Rücken wir die Curve, parallel mit sich selbst, weit genug gegen die Asymptote fort, so treten beide Zweige der Curve auf die entgegengesetzten Seiten dieser Asymptote hinüber. Es gibt hierbei eine Gränze, bei welcher die Ordnung des Contactes ansteigt und je nachdem diese Ordnung $\frac{2m}{3}$ oder $\frac{2m+1}{3}$ ist, ist in der Gränz-Lage ein unendlicher Zweig der Curve schon hinübergerückt und der andere noch nicht: oder es rücken bei dieser Gränze beide Zweige zugleich hinüber.

130. Wir wollen für Curven der 4. Ordnung die verschiedenen möglichen Fälle zusammenstellen und da diese Curven ausserdem immer noch eine reelle geradlinige Asymptote haben, auch in Beziehung auf diese die verschiedenen Ordnungen des Contactes unterscheiden. Hiernach erhalten wir das Schema der nachstehenden Gleichungen, mit der nothwendigen Anzahl von Constanten, die nach jeder Gleichung bemerkt ist. Von den beiden vor jeder Gleichung stehenden Ziffern bezeichnet die erste die Ordnung des Contactes für die semicubi-parabolische Asymptote und die zweite die Ordnung des Contactes für die geradlinige Asymptote, beidesmal nach der Anzahl der unendlich weit entfernten Durchschnittspuncte.

7,2	$(p^3+\lambda q^2)r + \mu(p+\alpha)s + \sigma = o,$	[12]
.,3	$(p^3+\lambda q^2)r + \mu(p+\alpha)(r+\beta) + \sigma = o,$	[11]
.,4	$(p^3+\lambda q^2)r + \mu(p+\alpha)r + \sigma = o,$	[10]
8,2	$(p^3+\lambda q^2)r + \mu(p^2+\gamma s) = o,$	[11]
9,3	$(p^3+\lambda q^2)r + \mu s = o,$	[10]
.,4	$(p^3+\lambda q^2)r + \mu(r+\beta) = o,$	[9]
10,3	$(p^3+\lambda q^2)r + \mu(p+\alpha) = o,$	[9]
12,4	$(p^3+\lambda q^2)r + \mu = o.$	[8]

131. An das Schema der vorigen Nummer knüpfen sich mehrere Bemerkungen an, die einer Verallgemeinerung fähig sind. Es gibt keinen Contact einer Curve der 4. Ordnung und ihrer semicubi-parabolischen Asymptote, welcher von der zweiten Ordnung oder mit andern Worten ein elfpunctiger ist. Bei einer Curve der n. Ordnung überhaupt ist jede Contact-Ordnung $\frac{h}{3}$ möglich, wenn wir durch h eine beliebige ganze Zahl bis $(3n-5)$ bezeichnen, mit der einzigen Ausnahme, dass h nicht gleich $(3n-6)$ und also die Ordnung des Contactes nicht gleich $(n-2)$ sein kann. Es rücken beim Uebergange von der Gleichung:

$$(p^3+\lambda q^2)\Omega_{n-3} + \mu(p+\alpha) = o,$$

zu der Gleichung:

$$(p^3+\lambda q^2)\Omega_{n-3} + \mu = o,$$

die letzten beiden Durchschnittspuncte beide unendlich weit; und dass es keinen Zwischenfall gibt folgt daraus, dass die Gleichung der Curve hierbei nur eine Constante verliert.

Der Erklärungsgrund dieses analytischen Resultats ist hier wiederum derselbe als derjenige, den wir dafür erhalten haben, dass eine Curve der n. Ordnung neben zwei $n$punctig osculirenden geradlinigen Asymptoten keine dritte $(n-1)$punctig osculirende haben kann. Nur liegen hier diese drei Asymptoten unendlich weit, dem analog, wie in dem Falle einer gewöhnlichen parabolischen Asymptote zwei geradlinige Asymptoten unendlich weit liegen. Es steht also auch hier der Satz der 9. Nummer im Hintergrunde.

122. Die in der vorletzten Nummer aufgezählten möglichen Fälle können wir auch aus dem allgemeinen Schema für die bei geradlinigen Asymptoten möglichen Fälle in der 29. Nummer ableiten; und diess gilt allgemein für Curven von einer beliebigen Ordnung. Wir brauchen nur zu diesem Ende die semicubi-parabolische Asymptote, wenn sie bezüglich

$3h$punctig, $(3h+1)$punctig, $(3h+2)$punctig

osculirt, durch die Symbole:

$h\,h\,h$ $\qquad h+1\;h\;h$ $\qquad h+1\;h+1\;h$

darzustellen. So kann, zum Beispiel, neben einer 10punctig osculirenden semicubi-parabolischen Asymptote, der hiernach das Symbol 433 entspricht, wenn die Curve bloss von der 4. Ordnung ist, weder eine gewöhnliche noch eine vierpunctig osculirende geradlinige Asymptote vorhanden sein, weil die beiden Symbole:

433.2 $\qquad$ 433.4

unmöglich sind, sondern die geradlinige Asymptote osculirt immer dreipunctig, dem Symbol

433.3

entsprechend.

Die eben bezeichnete Symbolisations-Weise der osculirenden semicubi-parabolischen Asymptote ist überall statthaft, was für Asymptoten nebenher auch noch vorhanden sein mögen. Beispielsweise will ich die verschiedenen möglichen Fälle zusammenstellen, die bei Curven der 5. Ordnung, welche neben einer semicubi-parabolischen Asymptote eine gewöhnliche parabolische Asymptote haben, Statt finden können. Wir müssen uns hierbei erinnern, dass eine $2h$punctig osculirende Parabel dem Symbol $h\;h$ und eine $(2h+1)$punctig osculirende dem Symbol $h+1\;h$ entspricht. Vor jeder Gleichung ist das entsprechende Symbol, nach jeder Gleichung die Anzahl ihrer Constanten bemerkt.

322,32 $\quad (p^3+\lambda q^2)(r^2+\sigma s) + \mu(p+\alpha)(r+\beta)t + \varrho w = 0,$ *) $\quad$ [17]
» 33 $\quad \ldots\ldots + \mu(p+\alpha)(r^2+\gamma(s+\zeta)) + \varrho w = 0,$ $\quad$ [16]
» 43 $\quad \ldots\ldots + \mu(p+\alpha)(r^2+\sigma(s+\zeta)) + \varrho w,$ $\quad$ [15]
» 44 $\quad \ldots\ldots + \mu(p+\alpha)(r^2+\sigma s) + \varrho w,$ $\quad$ [14]
» 54 $\quad \ldots\ldots + \mu(p+\alpha)(r^2+\sigma s) + \varrho(r+\beta) = 0,$ $\quad$ [13]
» 55 $\quad \ldots\ldots + \mu(p+\alpha)(r^2+\sigma s) + \varrho = 0,$ $\quad$ [12]
332,32 $\quad (p^3+\lambda q^2)(r+{}^2\sigma s) + \mu(p^2+\delta t)(r+\beta) + \varrho(p+\alpha) = 0,$ $\quad$ [16]
333,33 $\quad (p^3+\lambda q^2)(r^2+\sigma s) + \mu t u + \varrho = 0,$ $\quad$ [15]
» 43 $\quad \ldots\ldots + \mu(r+\beta)u + \varrho = 0,$ $\quad$ [14]
» 44 $\quad \ldots\ldots + \mu(r^2+\sigma s) + \varrho w = 0,$ $\quad$ [13]
» 54 $\quad \ldots\ldots + \mu(r^2+\sigma s) + \varrho(r+\beta) = 0,$ $\quad$ [12]
» 55 $\quad \ldots\ldots + \mu(r^2+\sigma s) + \varrho = 0,$ $\quad$ [11]
433,33 $\quad (p^3+\lambda q^2)(r^2+\sigma s) + \mu(p+\alpha)u + \varrho = 0,$ $\quad$ [14]
» 43 $\quad \ldots\ldots + \mu(p+\alpha)(r+\beta) + \varrho = 0,$ $\quad$ [13]
443,33 $\quad (p^3+\lambda q^2)(r^2+\sigma s) + \mu(r^2+\delta t) = 0,$ $\quad$ [13]

---

*) Auf den Ausdruck $(r^2+\sigma s)$, welcher eine überzählige Constante einschliesst, sind nur diejenigen 4 Constanten zu rechnen, von welchen die bezügliche Parabel abhängt.

444,44	$(p^3+\lambda q^2)(r^2+\sigma s) + \mu t = o,$	[12]
. ,54	$\ldots\ldots + \mu(r+\beta) = o,$	[11]
544,44	$(p^3+\lambda q^2)(r^2+\sigma s) + \mu(p+\alpha) = o,$	[11]
555,55	$(p^3+\lambda q^2)(r^2+\sigma s) + \mu = o.$	[10].

133. Als letztes Beispiel wollen wir die Curven der 6. Ordnung mit zwei Gruppen semicubi-parabolischer Asymptoten behandeln, uns hierbei indess auf die symbolische Darstellung der 30 verschiedenen möglichen Fälle beschränken. Es ergibt sich hier das folgende Schema:

322,322	332,332	433,433
332, »	333,333	443, »
333, »	433, »	444,444
433, »	443, »	544, »
443, »	444, »	554. »
444, »	544, »	544,544
544, »	554, »	555,555
554, »	555, »	655, »
555, »	655, »	666,666.
655, »	666. »	
666, »		

Wir erhalten die Ordnung der Annäherung der Curve an die durch eines der vorstehenden Symbole bezeichnete semicubi-parabolische Asymptote, wenn wir die drei Ziffern dieses Symbols addiren, von der Summe 5 abziehen und dann durch 3 dividiren. Für die beiden Asymptoten kann hiernach zugleich bestehen die Ordnung $\frac{2}{3}$ mit der Ordnung $\frac{2}{3}$, 1 bis $3\frac{2}{3}$ und $4\frac{1}{3}$; überdiess die Ordnung 1 nur mit der Ordnung 1, die Ordnung $1\frac{1}{3}$ mit den Ordnungen $1\frac{1}{3}$ bis $3\frac{2}{3}$ und $4\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$ mit $1\frac{2}{3}$ und 2; $2\frac{1}{3}$ mit $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$ und 3; $2\frac{2}{3}$ mit $2\frac{2}{3}$; $3\frac{1}{3}$ mit $3\frac{1}{3}$ und $3\frac{2}{3}$; endlich $4\frac{1}{3}$ mit $4\frac{1}{3}$.

134. In dem allgemeinen Falle semicubi-parabolischer Asymptoten gibt es neben der einzigen siebenpunctig osculirenden semicubischen Parabel, unendlich viele andere sieben und auch achtpunctig osculirende andere Asymptoten der dritten Ordnung. Der Kürze halber wollen wir uns hier auf Curven der vierten Ordnung beschränken.

Die allgemeine Gleichung der 130. Nummer können wir immer, durch Einführung zweier überzähligen Constanten, auf folgende Form bringen:

$$\{p^3 + \lambda q^2 + \varrho(p+\delta)\}r + \mu(p+\alpha)s + \sigma = o, \tag{1}$$

und dann treten die durch folgende Gleichung:

$$p^3 + \lambda q^2 + \varrho(p+\delta) = o, \tag{2}$$

bei willkührlicher Annahme von ϱ und δ, dargestellten Curven der dritten Ordnung, als siebenpunctig osculirende Asymptoten statt der semicubischen Parabel:

$$p^3 + \lambda q^2 = o,$$

mit der sie ebenfalls einen siebenpunctigen Contact haben, in Evidenz.

Wir können ϱ immer so bestimmen, dass die Gleichung der Curve nachstehende Form annimmt:

$$\{p^3 + \lambda q^2 + \varrho(p+\delta)\}r + \mu(p^2+\sigma s) = o. \tag{3}$$

Dann steigt der Contact der Curve mit ihren Asymptoten (2) zu einem achtpunctigen, und da hierbei δ noch überzählige Constante bleibt, gibt es unendlich viele solcher achtpunctig osculirenden Asymptoten der dritten Ordnung. Aber im Allgemeinen können wir, durch keine Bestimmung jener überzähligen Constanten δ, den Contact der Curve mit einer dieser Asymptoten zu einem neunpunctigen ansteigen lassen. Diess kann nur dadurch geschehen, dass die zweite Potenz von p aus dem zweiten Gliede der letzten Gleichung ausfällt.

Die Form dieser Gleichung, welche dann folgende wird:

$$\{p^3 + \lambda q^2 + \varrho(p+\delta)\}r + \mu s = o, \tag{4}$$

zeigt, dass es nach dieser Particularisation unendlich viele neunpunctig osculirende Asymptoten der dritten Ordnung gibt, welche, wie früher die achtpunctig osculirenden, bei willkührlicher Annahme von δ durch die Gleichung (2) dargestellt werden. Dann aber befindet sich unter den unendlich vielen neunpunctig osculirenden Asymptoten eine zehnpunctig osculirende; dieser entspricht eine solche Annahme von δ, durch welche die vorstehende Gleichung die folgende Form annimmt:

$$\{p^3 + \lambda q^2 + \varrho(p+\delta)\}r + \mu(p+\alpha) = o. \tag{5}$$

Wenn endlich, durch eine neue Particularisation, die letzte Gleichung in folgende sich verwandelt:

$$\{p^3 + \lambda q^2 + \varrho(p+\delta)\}r + \mu = o, \tag{6}$$

so gibt es, unter den unendlich vielen neunpunctig osculirenden Asymptoten statt einer zehnpunctig osculirenden eine zwölfpunctig osculirende. Wir sind auf diesem Wege zu den folgenden Resultaten gelangt, für die in dem Frühern noch keine Analogie sich gefunden hat.

Die Curven vierter Ordnung mit semicubi-parabolischen Asymptoten haben, im Allgemeinen, unendlich viele achtpunctig osculirende Asymptoten der dritten Ordnung, aber unter diesen keine neunpunctig osculirende. In besondern Fällen, die nur von $\left(\frac{4\,.\,7}{2} - 3\right)$ Constanten abhängen, gibt es unendlich viele neunpunctig osculirende Asymptoten der dritten Ordnung, und unter denselben eine zehnpunctig osculirende. Und endlich kann noch in einem untergeordneten Falle diese zehnpunctig osculirende Asymptote durch eine zwölfpunctig osculirende vertreten werden.

Jede der fraglichen Asymptoten der dritten Ordnung hat, wenn sie eine $m$punctig osculirende ist, mit der Curve einen Contact der $\left(\frac{m-5}{3}\right)$. Ordnung.

Zweiter Fall.

Curven mit Trident-Curven als Asymptoten.

135. Die allgemeine Gleichung solcher Curven der n. Ordnung ist die folgende:

$$(p(p^2+\lambda q)+\mu)\Theta_{n-3} + \sigma\Omega_{n-2} = o, \tag{1}$$

oder auch die folgende:

$$p(p^2+\lambda q)\Theta_{n-3} + \sigma\Omega_{n-2} = o, \tag{2}$$

wenn wir statt der Trident-Curve eine gewöhnliche Parabel und einen ihrer Durchmesser in Evidenz bringen. Aber es ist weder die Parabel noch ihr Durchmesser, und also auch nicht die Trident-Curve, eine Asymptote der Curve. Wir überzeugen uns hiervon sogleich, wenn wir die letzte Gleichung unter nachstehenden Formen schreiben:

$$p = -\sigma\frac{\Omega_{n-2}}{(p^2+\lambda q)\Theta_{n-3}},$$

$$(p^2+\lambda q) = -\sigma\frac{\Omega_{n-2}}{p\Theta_{n-3}}.$$

Die erste Form zeigt, dass die Gleichung der Curve befriedigt wird, wenn wir $q=\infty$ und p gleich einer endlichen Grösse $\left(-\frac{\sigma}{\lambda}\right)$ nehmen. Aus der zweiten Form folgt, dass wir

um dieselbe Gleichung zu befriedigen, q und p^2 als unendlich gross und von derselben Ordnung betrachten können, wonach alsdann für den Ausdruck $(p^2+\lambda q)$ ein Werth sich ergibt, der zwar unendlich gross, aber nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ ist. Der geraden Linie P nähert sich hiernach die Curve nur bis auf einen endlichen Abstand, sie bleibt von der Parabel:

$$p^2 + \lambda q = 0 \tag{3}$$

ebenfalls in einer endlichen Entfernung, weil sie von ihr, nach der Richtung ihrer Durchmesser um einen unendlich grossen Abstand, der mit p von derselben Ordnung ist, entfernt bleibt. Wir sehen hieraus, dass die gerade Linie P, so wie auch die Parabel (3), nach gehöriger Lagen-Aenderung, Asymptoten der Curve der *n.* Ordnung werden.

Wir können die gerade Linie P und die Parabel (3) auf unendlichmalige Weise, parallel mit sich selbst, verschieben, ohne dass die Gleichung (2) ihre Form ändert. Führen wir nemlich zwei willkührliche Constanten γ und δ ein, welche durch die Bedingungs-Gleichung:

$$\gamma + 2\delta = 0$$

mit einander verknüpft sind, so können wir die Gleichung (2), indem wir der Kürze wegen,

$$\sigma\Omega_{n-2} - [\gamma\lambda q+\delta^2 p+2\delta\gamma p+\delta^2\gamma]\Theta_{n-3} \equiv \sigma'\Omega'_{n-2}$$

setzen, auf die folgende Weise schreiben:

$$(p+\gamma)((p+\delta)^2+\lambda q)\Omega_{n-3} + \sigma'\Omega'_{n-2} = 0.$$

Setzen wir hiernach, was immer erlaubt ist:

$$p + \gamma \equiv p' \quad (p+\delta)^2 + \lambda q \equiv p'^2 + \lambda' q',$$

so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$p'(p'^2+\lambda' q')\Theta_{n-3} + \sigma'\Omega'_{n-2} = 0, \tag{4}$$

welche, in der Form, genau mit der Gleichung (2) übereinstimmt.

Die Gleichung (2) enthält noch zwei überzählige Constanten. Die eine derselben fällt aus, wenn wir in der letzten Gleichung γ so bestimmen, dass

$$\sigma'\Omega'_{n-2} \equiv \mu(p+\alpha)\Theta'_{n-3} + \varrho\Omega_{n-4},$$

und dann kommt, mit Hinweglassung der überflüssigen Accente:

$$p(p^2+\lambda q)\Theta_{n-3} + \mu(p+\alpha)\Theta'_{n-3} + \varrho\Omega_{n-4} = 0. \tag{5}$$

Um die letzte überzählige Constante fortzuschaffen, können wir die vorstehende Gleichung, durch Einführung einer neuen unbestimmten Constanten $\varkappa$, auf folgende Weise schreiben:

$$p(p^2+\lambda(q+\varkappa))\Theta_{n-3} + \mu(p+\alpha)\Theta'_{n-3} - \lambda\varkappa p\Theta_{n-3} + \varrho\Omega_{n-4} = 0,$$

und dann $\varkappa$ so bestimmen, dass

$$\mu(p+\alpha)\Theta'_{n-3} - \lambda\varkappa p\Theta_{n-3} + \varrho\Omega_{n-4} \equiv \mu' p^2\Omega_{n-4} + \varrho'\Omega_{n-3} \equiv \mu'(p^2+\gamma s)\Theta_{n-4} + \sigma(p+\zeta)\Theta_{n-5} + \varrho\Omega'_{n-6}.$$

Hiernach ergibt sich, wenn wir q an die Stelle von $(q+\varkappa)$ schreiben, und die Accente unterdrücken:

$$p(p^2+\lambda q)\Theta_{n-3} + \mu(p^2+\gamma s)\Theta_{n-4} \ \sigma \ (p+\zeta)\Theta_{n-5} + \varrho\Omega_{n-6} = 0. \tag{6}$$

Diese letzte Gleichung enthält die nothwendige Anzahl von Constanten, nemlich $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 3\right)$.

136. Wir überzeugen uns ohne Mühe davon, dass, wenn wir die Formen der beiden Gleichungen (5) und (6) zu Grunde legen, die gerade Linie P eine Asymptote der bezüglichen Curven ist, und dass die Parabel, deren Gleichung:

$$p^2 + \lambda q = 0 \tag{7}$$

eine Asymptote dieser Curve ist, und zwar, in dem Falle der Gleichung (5), eine beliebige aus der Reihe der unendlich vielen vierpunctig osculirenden, und in dem Falle der Gleichung (6) die einzige fünfpunctig osculirende, welche in dieser Reihe sich befindet.

Auf der geraden Linie P liegen drei Durchschnittspuncte mit der Curve unendlich weit und doch ist diese gerade Linie nur eine gewöhnliche Asymptote. Die Parabel (7) ist in

dem Falle der Gleichung (5) nur eine vierpunctig osculirende Asymptote, und in dem Falle der Gleichung (6) nur eine fünfpunctig osculirende, obgleich einmal **fünf** und das andere Mal **sechs** Durchschnittspuncte mit der Curve unendlich weit liegen. Hieraus folgt, dass sowohl die geradlinige Asymptote als jede der parabolischen Asymptoten, welche an zwei unendlichen Zweigen der Curve sich hinziehen, ausser der Berührung mit dem einen dieser beiden Zweige, auch noch von dem andern derselben, in einem, dieser Berührung fremden, Puncte geschnitten werden. Curven mit zwei parallelen Asymptoten haben uns schon analoge Beziehungen dargeboten.

137. Es kann in untergeordneten Fällen der Contact der Curve mit der geradlinigen Asymptote von einem gewöhnlichen bis zu einem $(n-1)$punctigen ansteigen, und ebenso der Contact mit der parabolischen Asymptote bis zu einem $(2n-1)$punctigen. Alle zwischenliegenden Fälle sind möglich und die Ordnungen des Contacts mit der geradlinigen und parabolischen Asymptote beschränken sich gegenseitig auf keine Weise.

138. Um zu particularisiren, wollen wir zuerst den Fall der Curven 4. Ordnung betrachten. Diese Curven haben nothwendig noch eine zweite geradlinige Asymptote, und in der Aufzählung der einzelnen möglichen Fälle, wollen wir auch auf dieser zweiten Asymptote die Ordnung des Contactes berücksichtigen. Wenn wir, wie in der 82. Nummer:

$$p^2 + \lambda q \equiv \Pi$$

setzen und die Ordnung des Contactes der bezüglichen Parabel mit der Curve durch die Anzahl der unendlich weit liegenden Puncte, und diese Anzahl durch eine römische Ziffer ausdrücken, so stellt sich das folgende Schema heraus:

V	2. 2	$p\Pi r + \mu(p^2+\gamma s) = 0,$	[11]
»	» 3	» $+ \mu s = 0,$	[10]
»	» 4	» $+ \mu(r+\alpha) = 0,$	[9]
»	3. 2	$p\Pi r + \mu p^2 + \sigma p + \varrho = 0,$	[10]
VI	2. 2	$p\Pi r + \mu\Pi + \sigma p + \varrho = 0,$	[10]
»	3. 3	$p\Pi r + \sigma p + \varrho = 0,$	[9]
VII	2. 2	$p\Pi r + \mu\Pi + \varrho = 0,$	[9]
»	3. 4	$p\Pi r + \varrho = 0.$	[8]

139. Für die Curven der 5. Ordnung, welche im Allgemeinen ausserdem noch zwei geradlinige Asymptoten haben, ergibt sich das nachstehende Schema, wenn wir auf die mögliche Unterscheidung dieser weiter keine Rücksicht nehmen.

V	2. 22	$p\Pi rs + \mu(p^2+\gamma t)u + \sigma(p+\zeta) = 0,$	[17]
»	3. 22	» $+ \mu p(p+\alpha)u + \sigma w = 0,$	[16]
»	4. 22	» $+ \mu p(p+\alpha)u + \sigma(p+\zeta) = 0,$	[15]
VI	2. 22	$p\Pi rs + \mu(\Pi+\gamma p)u + \sigma w = 0,$	[16]
»	3. 22	$p\Pi(rs+x) + \mu(p+\alpha)u + \zeta = 0,$	[15]
»	4. 22	» $+ \mu pu + \zeta = 0,$	[14]
VII	2. 22	$p\Pi rs + \mu\Pi u + \sigma w = 0,$	[15]
»	3. 22	$p\Pi(rs+x) + \mu(p^2+\gamma t) = 0,$	[14]
»	4. 22	» $+ \mu p^2 + \sigma p + \varrho = 0;$	[13]
VIII	2. 22	$p\Pi rs + \mu\Pi u + \sigma(p+\zeta) = 0,$	[14]
»	3. 22	$p\Pi(rs+x) + \mu\Pi + \sigma(p+\zeta) = 0,$	[13]
»	4. 22	» $+ \sigma(p+\zeta) = 0,$	[12]
IX	2. 22	$p\Pi rs + \mu\Pi u + \zeta = 0,$	[13]
»	3. 22	$p\Pi(rs+x) + \mu\Pi + \zeta = 0,$	[12]
»	4. 22	» $+ \zeta = 0.$	[11]

140. Wir können auch Trident-Curven als Asymptoten der Curven der fraglichen Art in Evidenz bringen und zwar können wir in dem allgemeinen Falle jedesmal eine solche Trident-Curve bestimmen, welche mit der gegebenen Curve in unendlicher Entfernung noch einen Durchschnittspunct mehr hat, als das System der geradlinigen Asymptote und der fünfpunctig osculirenden Parabel, und hiernach also mit ihr in einem zehnpunctigen Contact steht. Der neue, zehnte Punct kann aber entweder auf der geradlinigen Asymptote oder der parabolischen unendlich weit liegen, wonach sich zwei verschiedene zehnpunctig osculirende Trident-Curven herausstellen: eine Relation, die in dem Vorhergehenden keine Analogie findet.

Zur Erläuterung wollen wir zunächst die Curven der 4. Ordnung betrachten. Indem wir, der Kürze wegen:

$$p\Pi + \varkappa \equiv T$$

setzen, können wir, bei gehöriger Bestimmung von $\varkappa$, der allgemeinen Gleichung der fraglichen Curven dieser Ordnung (der ersten Gleichung des Schema's der 138. Nummer) nach einander auch nachstehende beiden Formen geben:

$$Tr + \mu\Pi + \sigma p + \varrho = o,$$
$$Tr + \mu p^2 + \sigma p + \varrho = o.$$

Beidesmal hat die Trident-Curve T mit der Curve in unendlicher Entfernung einen zehnpunctigen Contact; in dem ersten Falle aber ist die Ordnung der Annäherung an die beiden parabolischen Zweige $\frac{3}{2}$ und an den hyperbolischen Zweig 1, während in dem zweiten Falle die Ordnung der Annäherung an die beiden parabolischen Zweige 1 und an den hyperbolischen Zweig 2 ist.

Bei Curven der 4. Ordnung von besonderer Art gibt es eine Trident-Curve, welche mit diesen Curven einen elfpunctigen Contact hat, und zwar gibt es hier zwei verschiedene Fälle, denen die folgenden beiden Gleichungen, mit 11 Constanten entsprechen:

$$Tr + \mu\Pi + \sigma = o,$$
$$Tr + \mu p + \sigma = o.$$

In dem ersten Falle ist die Ordnung der Annäherung an die beiden parabolischen Zweige 2 und an den hyperbolischen Zweig 1, in dem zweiten Falle an die beiden parabolischen Zweige $\frac{3}{2}$ und an den hyperbolischen 2. Endlich gibt es noch einen einzigen Fall, in welchem der Contact ein zwölfpunctiger und die Ordnung der Annäherung für die parabolischen Zweige wie für den hyperbolischen gleich 2 ist. Diesem Falle entspricht die folgende Gleichung mit 10 Constanten:

$$Tr + \sigma = o.$$

141. Für Curven der 5. Ordnung erhalten wir das nachstehende Schema, in welchem wir vor jeder Gleichung die Ordnung der Annäherung für die parabolischen Zweige in Klammern und daneben die Ordnung der Annäherung für den hyperbolischen Zweig bemerkt haben. Auf die übrigen an der Trident-Curve sich nicht hinziehenden Zweige haben wir keine Rücksicht genommen.

Zehnpunctig osculirende Trident-Curve. 17 Constanten.

($\frac{3}{2}$) 1 $\qquad Trs + \mu(\Pi + \gamma p)u + \sigma w = o,$

(1) 2 $\qquad Trs + \mu p(p + \alpha)u + \sigma w = o,$

Elfpunctig osculirende Trident-Curve. 16 Constanten.

(2) 1 $\qquad Trs + \mu\Pi u + \sigma w = o,$

($\frac{3}{2}$) 2 $\qquad T(rs + \varkappa) + \mu(p + \alpha)u + \zeta = o,$

(1) 3 $\qquad Trs + \mu p(p + \alpha)u + \sigma(p + \zeta) = o.$

Zwölfpunctig osculirende Trident-Curve. 15 Constanten.

$(\tfrac{5}{2})$ 1 $\qquad Trs + \mu\Pi u + \sigma(p+\zeta) = o,$

(2) 2 $\qquad T(rs+\varkappa) + \mu(p^2+\gamma t) = o,$

$(\tfrac{3}{2})$ 3 $\qquad T(rs+\varkappa) + \mu pu + \zeta = o.$

Dreizehnpunctig osculirende Trident-Curve. 14 Constanten.

(3) 1 $\qquad Trs + \mu\Pi u + \zeta = o,$

$(\tfrac{5}{2})$ 2 $\qquad T(rs+\varkappa) + \mu\Pi + \sigma(p+\zeta) = o,$

(2) 3 $\qquad T(rs+\varkappa) + \mu p^2 + \sigma p + \varrho = o.$

Vierzehnpunctig osculirende Trident-Curve. 13 Constanten.

(3) 2 $\qquad T(rs+\varkappa) + \mu\Pi + \zeta = o,$

$(\tfrac{5}{2})$ 3 $\qquad T(rs+\varkappa) + \sigma(p+\zeta) = o.$

Fünfzehnpunctig osculirende Trident-Curve. 12 Constanten.

(3) 3 $\qquad T(rs+\varkappa) + \zeta = o.$

Wir überzeugen uns leicht, dass überhaupt, bei Curven einer beliebigen *n*. Ordnung, die Ordnungen der Annäherung der parabolischen Zweige und des hyperbolischen unabhängig von einander, jene durch jede beliebige halbe, diese durch jede beliebige ganze Einheit hindurch, bis zu $(n-2)$ ansteigen können.

Dritter Fall.

Curven mit cubi-parabolischen Asymptoten.

142. Die allgemeine Gleichung solcher Curven irgend einer *n*. Ordnung ist, bei überzähligen Constanten, die folgende:

$$(p^3+\lambda' q')\Theta_{n-3} + \nu'\Omega'_{n-2} = o, \tag{1}$$

wobei die cubische Parabel:

$$p^3 + \lambda' q' = o, \tag{2}$$

eine Curve dritter Ordnung, die mit der gegebenen Curve drei gemeinschaftliche Asymptoten hat, vertritt. Die beiden Curven schneiden sich nur in $(3n-6)$ Puncten, weil sie in unendlicher Entfernung einen sechspunctigen Contact haben. Ohne weder die vorstehende Gleichung (1) noch ihre Form irgendwie zu ändern, können wir die lineare Function $\lambda' q'$ mit jeder andern linearen Function vertauschen und insbesondere auch gleich Null setzen, wobei alsdann drei zusammenfallende gerade Linien die cubische Parabel (2) vertreten. Diesem entspricht die folgende Gleichung:

$$p^3\Theta_{n-3} + \nu\Omega_{n-2} = o,$$

von der wir ausgehen wollen. Diese Gleichung können wir, nach Einführung einer willkührlichen Function λq mit drei unbestimmten Constanten, auf folgende Weise schreiben:

$$(p^3+\lambda q)\Theta_{n-3} + (\nu\Omega_{n-2} - \lambda q\Theta_{n-3}) = o,$$

und dann, **wenn wir den einzigen Fall ausnehmen, dass**

$$\nu\Omega_{n-2} \equiv \nu(p+\alpha)\Theta'_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4},$$

immer auf lineare Weise jene drei Constanten so bestimmen, dass aus dem umklammerten Ausdrucke in der Gleichung der Curve diejenigen Glieder, welche q^{n-2}, pq^{n-3} und q^{n-3} enthalten ausfallen, wonach:

$$\begin{aligned}\nu\Omega_{n-2} - \lambda q\Theta_{n-3} &\equiv \mu p^2\Omega'_{n-4} + \varrho p\Omega''_{n-4} + \sigma\Omega'''_{n-4},\\ &\equiv p[\mu p\Omega'_{n-4} + \varrho\Omega''_{n-4}] + \sigma\Omega'''_{n-4},\\ &\equiv p[\mu(p+\alpha)\Theta_{n-4} + \delta\Omega_{n-5}] + \sigma\Omega'''_{n-4},\\ &\equiv \mu p(p+\alpha)\Theta_{n-4} + \sigma\Omega_{n-4};\end{aligned}$$

und hiernach ergibt sich für die **allgemeine** Gleichung der fraglichen Curven:

$$(p^3+\lambda q)\Theta_{n-3} + \mu p(p+\alpha)\Theta_{n-4} + \sigma\Omega_{n-4} = 0. \tag{3}$$

Die Anzahl der Constanten in dieser Gleichung ist die nothwendige und hinreichende, sie beträgt:

$$\frac{n(n+3)}{2} - 4.$$

143. Die durch die Gleichung (3) dargestellte Curve wird von der in Evidenz tretenden cubischen Parabel:

$$p^3 + \lambda q = 0, \tag{4}$$

nur in $(3n-10)$ Puncten geschnitten, weil 10 Durchschnittspuncte unendlich weit liegen. Der Contact ist also, indem die Parabel (4) an die Stelle der Parabel (2) getreten ist, von einem **sechspunctigen** zu einem **zehnpunctigen** angestiegen. Dieses Ansteigen in der Ordnung des Contactes müssen wir noch näher ins Auge fassen. Zuvörderst ist klar, dass die neue Parabel (4) wirklich eine Asymptote der Curve ist, denn, um die Gleichung dieser Curve zu befriedigen, können wir p^3 und q als unendlich gross und von derselben Ordnung betrachten; alsdann kommt:

$$p^3 + \lambda q = -\frac{\mu p^2\Theta_{n-4}}{\Theta_{n-3}} = -\frac{\mu p^2}{q} = \lambda\mu p^{-1} = -\mu\lambda^{\frac{2}{3}}q^{-\frac{1}{3}}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Ordnung der Annäherung der Curve an die cubische Parabel (4), wenn wir diese Annäherung nach der Erstreckung der geraden Linie P nehmen, von der Ordnung $\frac{1}{3}$ ist.

Verschieben wir die cubische Parabel (4) parallel mit sich selbst und nach der Richtung von P so, dass für ihre Puncte der Werth von q um irgend eine Constante $\varkappa$ abnimmt, so hat sie in ihrer neuen Lage nachstehende Gleichung:

$$p^3 + \lambda(q+\varkappa) = 0, \tag{5}$$

und wenn wir die beiden für denselben Werth von q aus den Gleichungen (4) und (5) sich ergebenden Werthe von p bezüglich durch p und $(p+\beta)$ bezeichnen, so kommt:

$$(p+\beta)^3 - p^3 + \lambda\varkappa = 0,$$

und mithin, wenn diese Werthe immer mehr wachsen:

$$\beta = -\tfrac{1}{3}\lambda\varkappa\cdot p^{-2} = \tfrac{1}{3}\varkappa\lambda^{\frac{1}{3}}q^{-\frac{2}{3}}.$$

Dieselbe Parabel bleibt also nach einer Verschiebung der angezeigten Art, in allen ihren verschiedenen Lagen, ihre eigene Asymptote und zwar ist die Ordnung der Annäherung $\frac{2}{3}$. Wenn andrerseits der Abstand eines gegebenen Punctes von der Parabel (4), nach der Erstreckung von P genommen, ein unendlich Kleines der m. Ordnung ist, so steigt die Ordnung der absoluten Annäherung dieses Punctes an dieselbe Parabel um $\frac{2}{3}$, so dass die Annäherung der Curve (3) an die zehnpunctig osculirende cubische Parabel (4) von der 1. Ordnung ist. Ihre Annäherung an eine beliebige der Parabeln (5) ist also von der Ordnung $\frac{2}{3}$; und entspricht einem neunpunctigen Contacte. Wenn hiernach eine Curve von beliebiger Ordnung überhaupt cubische Parabeln zu Asymptoten hat, so gibt es unendlich viele solcher Parabeln (die man alle erhält, wenn man eine beliebige derselben parallel mit sich selbst und nach der Richtung von P verschiebt), welche unter sich und mit der Curve einen **neunpunctigen** Contact haben, während, für eine einzige derselben, der Contact höher ansteigt. Die cubische Parabel ist alsdann als eine Curve dritter Ordnung zu betrachten, auf deren jeder Asymptote drei Durchschnittspuncte mit der Curve unendlich weit liegen.

Fig. 9. Eine cubische Parabel bleibt auch dann noch ihre eigene Asymptote, wenn wir sie so umgestalten, dass ihre Gleichung (4) in die folgende übergeht:

$$p^3 + \lambda(q+\gamma p+\varkappa) \equiv p^3 + \lambda q' = 0, \tag{6}$$

in der γ und $\varkappa$ zwei willkührliche Constanten bezeichnen. Hiernach kann nicht nur der

Wendungspunct der Parabel jede beliebige Lage auf der geraden Linie P einnehmen, sondern auch die Tangente in diesem Wendungspuncte, welche ursprünglich mit der Linie Q zusammenfällt, um den Wendungspunct, beliebig sich drehen. Bei analoger Bezeichnung wie eben, finden wir:

$$\beta = -\tfrac{1}{3}\gamma\lambda \cdot p^{-1} = \tfrac{1}{3}\gamma\lambda^{\frac{2}{3}}q^{-\frac{1}{3}},$$

und also ist hier die Ordnung der Annäherung bloss $\frac{1}{3}$. Dasselbe ist die Ordnung der Annäherung der Curve (3) an jede der Parabeln, welche, bei einer willkührlichen Annahme von $\varkappa$ und γ, durch die Gleichung (6) dargestellt werden. Der Contact ist ein achtpunctiger, weil je zwei der Parabeln (6) in einem einzigen Puncte M sich schneiden. Zieht man die Gleichungen derselben von einander ab, so ergibt sich, dass dieser einzige Durchschnittspunct auf derjenigen geraden Linie liegt, welche durch den Durchschnitt G der beiden Tangenten in den Wendungspuncten der beiden Parabeln, parallel mit der geraden Linie P gelegt werden kann.

Wenn wir ferner die Parabel (6), parallel mit sich selbst und mit der Linie P, verschieben, wonach ihre Gleichung die folgende Form annimmt:

$$(p+\pi)^3 + \lambda(q+\gamma p+\varkappa) = o, \qquad (7)$$

so ist die Grösse dieser Verschiebung das Maass der Annäherung an die Parabel (4), so wie an die Curve (3). Die hiernach, bei beliebiger Annahme von π, p und $\varkappa$, durch die Gleichung (7) dargestellten Parabeln sind also keine Asymptoten der Curve mehr, doch bleibt die Annäherung auch in unendlicher Entfernung eine endliche. Der Contact aller solchen Parabeln unter sich und mit der Curve (3) ist als ein siebenpunctiger zu bezeichnen.

Wenn wir endlich in der letzten Gleichung dem constanten Coefficienten λ einen andern Werth beilegen, so stellt die resultirende Gleichung:

$$(p+\pi)^3 + \lambda' q' = o, \qquad (8)$$

eine solche cubische Parabel dar, welche in unendlicher Entfernung unendlich weit von der ursprünglichen Parabel (4) und der Curve (3) sich entfernt. Dann können wir den Contact als einen sechspunctigen bezeichnen. Auf den Werth von π kommt es hierbei gar nicht an. Wir können auch $\pi = o$ setzen; dann schneiden sich bloss irgend zwei der in Rede stehenden Parabeln, in solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen, während, im Allgemeinen, die drei Durchschnittspuncte jede beliebige Lage haben können. In diesem letztern Falle nur — und auch nicht in dem Falle der Gleichung (7) — ist die Parabel (8) als eine solche Curve dritter Ordnung anzusehen, welche mit der gegebenen bloss drei gemeinschaftliche Asymptoten hat.

144. Wir können, nach dem Vorhergehenden, der allgemeinen Gleichung der Curven der n. Ordnung mit cubi-parabolischen Asymptoten, nach einander die nachstehenden Formen geben:

$$(p^3+\lambda q)\Theta_{n-3} + \mu(p^2+\varrho r)\Theta'_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4} = o,$$
$$(p^3+\lambda q)\Theta_{n-3} + \mu p(p+\alpha)\Theta'_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4} = o,$$
$$(p^3+\lambda q)\Theta_{n-3} + \mu(p+\alpha)\Theta_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4} = o,$$
$$(p^3+\lambda q)\Theta_{n-3} + \mu(p^2+\varrho r)\Theta_{n-4} + \sigma\Omega_{n-4} = o,$$
$$(p^3+\lambda q)\Theta_{n-3} + \mu p(p+\alpha)\Theta_{n-4} + \sigma\Omega_{n-4} = o.$$

Hierbei steigt der Contact der Curve mit der in ihrer Gleichung in Evidenz gebrachten cubischen Parabel von einem sechspunctigen stufenweise zu einem zehnpunctigen an. Es muss dieser Contact mindestens ein siebenpunctiger sein, wenn die cubische Parabel eine Asymptote der Curve sein soll.

145. In untergeordneten Fällen kann die Curve unter den unendlich vielen neunpunctig osculirenden Parabeln, die man alle durch parallele Verschiebung einer unter ihnen erhält,

statt der zehnpunctig osculirenden eine mehrpunctig osculirende sich befinden, und für diese der Contact bis zu einem $3n$punctigen ansteigen. Für jeden neuen Durchschnitts-Punct der unendlich weit rückt, steigt die Ordnung des Contactes um $\frac{1}{3}$, indem die Gleichung der Curve eine ihrer Constanten verliert. Hat also die Curve eine $m$punctig osculirende cubiparabolische Asymptote — und m kann durch jede Einheit hindurch bis zu der eben angezeigten Gränze wachsen — so ist die Ordnung der Annäherung: $\left(\frac{m-7}{3}\right)$, und ihre Gleichung enthält nur $\left(\frac{n(n+3)}{2} - (m-6)\right)$ Constanten. Je nachdem m eine ganze Zahl von der Form $3g$, $(3g+1)$ oder $(3g+2)$ ist, ergeben sich für die Gleichung der Curven die nachstehenden Formen mit einer überzähligen Anzahl von Constanten:

$$(p^3+\lambda q)\Omega_{n-3} + \mu(p^2+\varrho r)\Theta_{n-g-1} + \sigma\Omega_{n-g-1} = 0,$$
$$(p^3+\lambda q)\Omega_{n-3} + \mu p(p+\alpha)\Theta_{n-g-1} + \sigma\Omega_{n-g-1} = 0,$$
$$(p^3+\lambda q)\Omega_{n-3} + \mu(p+\alpha)\Theta_{n-g-1} + \sigma\Omega_{n-g-2} = 0.$$

146. Wenn zwei cubische Parabeln unter einander einen $m$punctigen Contact haben, so schneiden sie sich, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet, in einer ungeraden oder geraden Anzahl von Puncten, und demzufolge liegen die beiden unendlichen Zweige einer auf der entgegengesetzten oder auf derselben Seite der andern. In der 9. Figur sind zwei einander achtpunctig osculirende cubische Parabeln zusammengestellt. Die beiden unendlichen Zweige der Curve der n. Ordnung liegen auf derselben Seite ihrer sie neunpunctig osculirenden cubischen Parabeln. Verrücken wir diese Parabel bis zu derjenigen Gränz-Lage, wo ihr Contact mit der Curve höher ansteigt, so liegen die beiden Zweige der Curve auf entgegengesetzter oder auf derselben Seite dieser Parabel, je nachdem eine gerade oder ungerade Anzahl von Durchschnittspuncten unendlich weit liegt.

147. Um zu particularisiren, wollen wir uns auf die Curven der 4. und 5. Ordnung beschränken. Die Curven der 4. Ordnung, welche cubische Parabeln zu Asymptoten haben, haben ausserdem noch eine geradlinige Asymptote. Indem wir die Ordnung des Contactes für die cubi-parabolische wie für die geradlinige Asymptote durch die Anzahl der unendlich weit liegenden Durchschnittspuncte bezeichnen, erhalten wir das nachstehende Schema der möglichen Fälle, in welchem nach jeder Gleichung die Anzahl der (nothwendigen) Constanten bemerkt ist.

10. 2.	$(p^3+\lambda q)r + \mu p^2 + \varrho p + \sigma = 0,$	[10]
11. 3.	$(p^3+\lambda q)r + \mu p + \varrho = 0,$	[9]
12. 4.	$(p^3+\lambda q)r + \mu = 0.$	[8]

148. Für Curven der 5. Ordnung, welche neben cubi-parabolischen Asymptoten im Allgemeinen zwei geradlinige haben, erhalten wir bei analoger Bezeichnung das folgende Schema von verschiedenen Fällen:

10. 22	$(p^3+\lambda q)rs + \mu p(p+\alpha)t + \sigma w = 0,$	[16]
» 32	» $+ \mu p(p+\alpha)(r+\beta) + \sigma w = 0,$	[15]
» 42	» $+ \mu p(p+\alpha)r + \sigma w = 0,$	[14]
» 52	» $+ \mu p(p+\alpha)r + \sigma(r+\gamma) = 0;$	[13]
11. 22	$(p^3+\lambda q)(rs+\varkappa) + \mu(p+\alpha)t + \sigma = 0,$	[15]
» 33	$(p^3+\lambda q)rs + \mu(p+\alpha)t + \sigma = 0,$	[14]
» 43	» $+ \mu(p+\alpha)(r+\beta) + \sigma = 0,$	[13]
» 53	» $+ \mu(p+\alpha)r + \sigma = 0;$	[12]
12. 22	$(p^3+\lambda q)(rs+\varkappa) + \mu(p^2+\sigma t) = 0,$	[14]
» 33	$(p^3+\lambda q)rs + \mu(p^2+\sigma t) = 0,$	[13]

12. 44	$(p^3+\lambda q)rs + \sigma t = o,$	[12]
» 54	» $+ \sigma(r+\alpha) = o;$	[11]
13. 22	$(p^3+\lambda q)(rs+\varkappa) + \mu p^2 + \varrho p + \sigma = o,$	[13]
» 33	$(p^3+\lambda q)rs + \mu p^2 + \varrho p + \sigma = o;$	[12]
14. 22	$(p^3+\lambda q)(rs+\varkappa) + \mu p + \sigma = o,$	[12]
» 44	$(p^3+\lambda q)rs + \mu p + \sigma = o;$	[11]
15. 22	$(p^3+\lambda q)(rs+\varkappa) + \mu = o,$	[11]
» 55	$(p^3+\lambda q)rs + \mu = o.$	[10]

Vierter Fall.

Curven mit drei parallelen Asymptoten.

149. Diesem Falle entspricht die folgende Gleichung:

$$(p^3+\alpha p+\beta)\Theta_{n-3} + \nu\Omega_{n-2} = o,$$

welche sich zunächst, wie in dem 3. Falle auf:

$$p^3 + \nu\Omega_{n-2} = o,$$

reducirt. Aber in dem eben genannten Falle blieb von der Discussion derjenige untergeordnete Fall ausgeschlossen, wo insbesondere

$$\nu\Omega_{n-2} \equiv \varrho(p+\alpha)\Theta'_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4},$$

und dieser untergeordnete Fall ist derjenige, mit dem wir uns jetzt zu beschäftigen haben. Er setzt also auch schon in der Function Ω'_{n-2}, damit wir nicht auf den 2. Fall zurückfallen, eine ähnliche Particularisation voraus, als in der Function Ω_{n-2}. Wir haben hiernach die folgende Gleichung näher zu betrachten:

$$p^3\Theta_{n-3} + \varrho(p+\alpha)\Theta'_{n-3} + \sigma\Omega_{n-4} = o. \tag{1}$$

Es springt aus dieser Gleichung in die Augen, dass jede gerade Linie, welche mit der geraden Linie P parallel ist, die bezügliche Curve nur in $(n-3)$ Puncten schneidet, weil drei Durchschnittspuncte unendlich weit liegen: e s hat, mit andern Worten, die Curve einen dreifachen Punct, der nach dieser Richtung unendlich weit liegt. Eine Asymptote entspricht einer Tangente in diesem Puncte, auf ihr muss ein vierter Durchschnittspunct unendlich weit liegen.

150. Wir können der letzten Gleichung, indem wir drei willkührliche Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$ und $\varkappa''$ einführen, die folgende Form geben:

$$(p+\varkappa)(p+\varkappa')(p+\varkappa'')\Theta_{n-3} - (\varkappa+\varkappa'+\varkappa'')p^2\Theta_{n-3} + p\{\varrho\Theta'_{n-3} - (\varkappa\varkappa'+\varkappa\varkappa''+\varkappa'\varkappa'')\Theta_{n-3}\}$$
$$+ \{\varrho\alpha\Theta'_{n-3} - \varkappa\varkappa'\varkappa''\Theta_{n-3}\} + \sigma\Omega_{n-4} = o. \tag{2}$$

Zuerst sehen wir, dass wir, bei jeder beliebigen Bestimmung von $\varkappa$, $\varkappa'$ und $\varkappa''$, auf die Form der Gleichung (1) zurückkommen, vorausgesetzt dass

$$\varkappa + \varkappa' + \varkappa'' = o. \tag{3}$$

Also erst nachdem wir zwei der drei mit P parallelen geraden Linien

$$p + \varkappa = o, \qquad p + \varkappa' = o, \qquad p + \varkappa'' = o,$$

willkührlich angenommen haben, ist dadurch die Form der Gleichung (1) und die dritte dieser geraden Linien bestimmt.

Wir können die Form der Gleichung (2) noch weiter particularisiren, und neben der Bedingungs-Gleichung (3) die folgenden beiden aufstellen:

$$\varkappa\varkappa' + \varkappa'\varkappa'' + \varkappa'\varkappa'' = \varrho,$$
$$\varkappa'\varkappa'\varkappa'' = \varrho\alpha, \tag{4}$$

alsdann nimmt, indem wir

$$\varrho\{\Theta'_{n-3} - \Theta_{n-3}\} \equiv \mu(p+\beta)\Theta_{n-4} + \lambda\Omega_{n-5},$$
$$\sigma\Omega_{n-4} + \lambda(p+\alpha)\Omega_{n-5} \equiv \sigma\Omega'_{n-4},$$

setzen, die Gleichung der Curve die nachstehende Form an:

$$(p+x)(p+x')(p+x'')\Theta_{n-3} + \mu(p+\alpha)(p+\beta)\Theta_{n-4} + \sigma\Omega'_{n-4} = 0. \qquad (5)$$

Diese Form enthält noch zwei überzählige Constanten. Einerseits können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, eine der drei Constanten x, x' und x'', etwa die letzte gleich Null setzen. Diess kommt darauf hinaus, die Function $(p+x'')$ mit p zu vertauschen, wodurch die Form der vorstehenden Gleichung sich durchaus nicht ändert. Andrerseits können wir, weil die Constanten der letzten beiden Glieder der vorstehenden Gleichung nicht von einander unabhängig sind,

$$\mu(p+\alpha)(p+\beta)\Theta_{n-4} + \sigma\Omega'_{n-4} \equiv \mu(p+\zeta)(p+\zeta')\Theta_{n-4} + \lambda(p+\xi)\Theta_{n-5} + \gamma\Omega_{n-6}$$

setzen, und erhalten alsdann die folgende Form:

$$p(p+x)(p+x')\Theta_{n-3} + \mu(p+\zeta)(p+\zeta')\Theta_{n-4} + \lambda(p+\xi)\Theta_{n-5} + \gamma\Omega_{n-6} = 0, \qquad (6)$$

welche die gerade nothwendige Anzahl von Constanten enthält, nemlich:

$$\left(\frac{n(n+3)}{2} - 5\right).$$

151. Die drei ursprünglichen Constanten x, x' und x'' sind nach den Bedingungs-Gleichungen (3) und (4) die drei Wurzeln der folgenden Gleichung des dritten Grades:

$$z^3 + \lambda z - \lambda\alpha = 0.$$

Eine dieser Wurzeln, etwa x'', ist immer reell, die beiden andern können sowohl imaginär als auch reell sein. In untergeordneten Fällen können zwei Wurzeln, und auch alle drei Wurzeln einander gleich sein. ζ und ζ' sind in dem Vorstehenden dadurch bestimmt, dass:

$$\zeta + \zeta' = \alpha + \beta,$$
$$\zeta\zeta' = -\sigma,$$

und also Wurzeln der folgenden Gleichung des zweiten Grades:

$$z^2 - (\alpha+\beta)z - \sigma = 0.$$

Sie können hiernach eben sowohl imaginär als reell sein.

Der Gleichung (6) entsprechen solche unendlich weit entfernte Puncte, für welche p, $(p+x)$ und $(p+x')$ verschwinden. Für diese Puncte ergibt sich, nach gehörigen Vernachlässigungen:

$$p = -\mu\frac{\zeta\zeta'}{xx'}\cdot\frac{\Theta_{n-4}}{\Theta_{n-3}} = -\mu\frac{\zeta\zeta'}{xx'}\cdot q^{-1}, \qquad p+x = -\mu\frac{\zeta\zeta'}{x(x-x')}\cdot q^{-1}, \qquad p+x' = -\mu\frac{\zeta\zeta'}{x'(x'-x)}\cdot q^{-1},$$

indem wir durch q irgend eine beliebige lineare Function bezeichnen, die hier einen unendlichen Werth erhält. Wir sehen hieraus, dass die drei geraden Linien:

$$p = 0, \qquad p + x = 0, \qquad p + x' = 0,$$

drei gewöhnliche Asymptoten der Curve sind, die an ihren beiden entgegengesetzten Seiten sich hinzieht. Bestimmen wir, wie in dem ersten Paragraphen, das reciproke Maass der Annäherung der Curve an ihre geradlinigen Asymptoten, und nennen dasselbe für die drei vorstehenden Parallel-Asymptoten Δ', Δ'' und Δ''', so kommt:

$$\Delta' : \Delta'' : \Delta''' = (x'-x) : -x' : x.$$

Diese Proportion zeigt, dass, wenn das Maass der Annäherung auf zwei der drei parallelen Asymptoten gegeben ist, dadurch das Maass der Annäherung auf der dritten bestimmt wird, und zwar erhalten wir hier folgende nähere Beziehung.

Das reciproke Maass der Annäherung irgend einer gegebenen Curve mit drei parallelen Asymptoten an jede derselben ist dem Abstande der beiden andern parallelen Asymptoten von einander proportional.

Aus der vorigen Nummer ist klar, dass wir hier vier verschiedene Fälle zu betrachten haben. Die drei parallelen Asymptoten sind:

1) alle drei reell,

2) zwei derselben sind imaginär,

3) zwei derselben fallen zusammen,

4) es fallen alle drei Asymptoten zusammen.

152. Wir wollen zuvörderst den Fall dreier reellen parallelen Asymptoten discutiren und uns, wodurch wir hinlänglichen Aufschluss über die Natur solcher Asymptoten überhaupt erhalten werden, auf die Curven der 4. und 5. Ordnung beschränken.

Die Curven der 4. Ordnung, welche neben drei parallelen Asymptoten immer noch eine vierte geradlinige Asymptote haben, werden durch folgende allgemeine Gleichung dargestellt:

$$p(p+\varkappa)(p+\varkappa')q + \lambda p^2 + \mu p + \sigma = 0.$$

Die Ordnung des Contactes auf einer der drei parallelen Asymptoten kann nicht höher ansteigen, weil sonst mehr als vier Durchschnittspuncte mit der Curve auf ihr liegen müssten. Die vierte Asymptote aber ist in den Fällen der folgenden beiden Gleichungen bezüglich eine drei- und vierpunctig osculirende:

$$p(p+\varkappa)(p+\varkappa')q + \mu p + \sigma = 0,$$
$$p(p+\varkappa)(p+\varkappa')q + \sigma = 0.$$

Für die Curven der 5. Ordnung ergibt sich das nachstehende Schema, in welchem, vor jeder Gleichung, die Anzahl der auf jeder der drei parallelen Asymptoten, die Ordnung des Contactes bestimmenden und dann der, auf den beiden übrigen Asymptoten unendlich weit liegenden Puncte, und, nach jeder Gleichung, die Anzahl der nothwendigen Constanten bemerkt ist.

222.22	$p(p+\varkappa)(p+\varkappa')qr$	$+ \mu(p+\zeta)(p+\zeta')s + \lambda p + \sigma = 0,$	[15]
.32	»	$+ \mu(p+\zeta)(p+\zeta')(q+\beta) + \lambda p + \sigma = 0,$	[14]
.42	»	$+ \mu(p+\zeta)(p+\zeta')q + \lambda p + \sigma = 0,$	[13]
.52	»	$+ \mu(p+\zeta)(p+\zeta')q + \sigma = 0,$	[12]
.33	»	$+ \mu(p+\zeta)s + \sigma = 0,$	[13]
.43	»	$+ \mu(p+\zeta)(q+\beta) + \sigma = 0,$	[12]
.53	»	$+ \mu(p+\zeta)q + \sigma = 0,$	[11]
.44	»	$+ \mu s = 0,$	[11]
.54	»	$+ \mu q + \sigma = 0;$	[10]
322.22	$p(p+\varkappa)(p+\varkappa')qr$	$+ \mu p(p+\zeta)s + \lambda p + \sigma = 0,$	[14]
.32	»	$+ \mu p(p+\zeta)(q+\beta) + \lambda p + \sigma = 0,$	[13]
.42	»	$+ \mu p(p+\zeta)q + \lambda p + \sigma = 0,$	[12]
.52	»	$+ \mu p(p+\zeta)q + \sigma = 0,$	[11]
.33	»	$+ \mu ps + \sigma = 0,$	[12]
.43	»	$+ \mu p(q+\beta) + \sigma = 0,$	[11]
.53	»	$+ \mu pq + \sigma = 0;$	[10]
332.22	$p(p+\varkappa)(p+\varkappa')qr$	$+ \mu p(p+\varkappa)s + \lambda p + \sigma = 0,$	[13]
.32	»	$+ \mu p(p+\varkappa)(q+\beta) + \lambda p + \sigma = 0,$	[12]
.42	»	$+ \mu p(p+\varkappa)q + \lambda p + \sigma = 0,$	[11]
.52	»	$+ \mu p(p+\varkappa)q + \sigma = 0;$	[10]
333.22	$p(p+\varkappa)(p+\varkappa')qr$	$+ \mu p^3 + \lambda p^2 + \varrho p + \sigma = 0,$	[12]
.33	»	$+ \lambda p^2 + \varrho p + \sigma = 0,$	[11]
.44	»	$+ \varrho p + \sigma = 0,$	[10]
.55	»	$+ \sigma = 0.$	[9]

Es kann der Contact auf jeder der drei parallelen Asymptoten einer Curve einer beliebigen n. Ordnung, unabhängig von dem Contacte auf den beiden andern, von einem gewöhnlichen bis zu einem $(n-2)$punctigen ansteigen. Bei Curven dieser Ordnung können

hiernach $\frac{(n-2)(n-1)n}{1.\ 2.\ 3}$

verschiedene Fälle vorkommen.

153. Wenn zwei der drei parallelen Asymptoten imaginär werden, so kann die dritte, durch alle Ordnungen des Contactes hindurch, bis zu einer $(n-2)$punctigen ansteigen. Die beiden imaginären Asymptoten können ebenfalls osculirende Asymptoten sein, osculiren dann aber beide nach derselben Ordnung. Diese Fälle bedürfen keiner weitern Erörterung mehr.

154. Wenn zwei der drei parallelen Asymptoten zusammenfallen, so nimmt die allgemeine Gleichung (6) die nachstehende Form an und hängt dann nur von $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 6\right)$ Constanten ab:

$$p^2(p+\varkappa)\Theta_{n-3} + \mu(p+\zeta)(p+\zeta')\Theta_{n-4} + \lambda(p+\xi)\Theta_{n-5} + \sigma\Omega_{n-6} = o.$$

Für solche Puncte, welche nach der Richtung der Doppel-Asymptote P unendlich weit liegen, gibt diese Gleichung:

$$p^2 = -\mu\cdot\frac{\zeta\zeta'}{\varkappa}\cdot\frac{\Theta_{n-4}}{\Theta_{n-3}} = -\mu\frac{\zeta\zeta'}{\varkappa}\cdot q^{-1};$$

mithin ist die Ordnung der Annäherung an diese Doppel-Asymptote im Allgemeinen gleich $\frac{1}{2}$. Diese Ordnung steigt schrittweise für jeden neuen Durchschnittspunct mit der Curve, der unendlich weit rückt, um eine halbe Einheit, und zwar möglicherweise bis $\frac{n-2}{2}$. Alle Formen der Curve, zu denen wir in dem 5. Paragraphen gekommen sind, finden sich hier wieder, die parallele dritte Asymptote stört hierbei durchaus nicht.

155. Wenn alle drei parallelen Asymptoten zusammenfallen, so erhält die allgemeine Gleichung (6) die nachstehende Form und hängt alsdann nur von $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 7\right)$ Constanten ab:

$$p^3\Theta_{n-3} + \mu(p+\zeta)(p+\zeta')\Theta_{n-4} + \lambda(p+\xi)\Theta_{n-5} + \sigma\Omega_{n-6} = o. \tag{1}$$

Im Allgemeinen erhält man für unendlich weit entfernte Puncte:

$$p^3 = -\mu\zeta\zeta'\cdot\frac{\Theta_{n-4}}{\Theta_{n-3}} = -\mu\zeta\zeta'.q^{-1},$$

woraus ersichtlich ist, dass die Ordnung der Annäherung an die dreifache Asymptote bloss $\frac{1}{3}$ beträgt und dass die Curve gegen diese Asymptote dieselbe Lage hat, als gegen eine gewöhnliche Asymptote. Drei unendliche Zweige der Curve reduciren sich auf einen einzigen, und dieser fällt in unendlicher Entfernung mit demjenigen, der durch die Gleichung:

$$p^3q + \mu\zeta\zeta' = o$$

dargestellten Hyperbel höherer Ordnung zusammen, welcher an derselben Asymptote P sich hinzieht.

156. Wenn insbesondere ζ' verschwindet und dadurch die Anzahl der Constanten um eine neue Einheit sich reducirt, so stellt die resultirende Gleichung:

$$p^3\Theta_{n-3} + \mu p(p+\zeta)\Theta_{n-4} + \lambda(p+\xi)\Theta_{n-5} + \sigma\Omega_{n-6} = o$$

eine solche Curve dar, deren drei an P sich hinziehende unendliche Zweige annäherungsweise durch die an derselben Asymptote sich hinziehenden Zweige einer Curve der 5. Ordnung, deren Gleichung die folgende ist:

$$p^3q^2 + \mu\zeta pq + \lambda\xi = o,$$

dargestellt werden. Die vorstehende Gleichung können wir unter der nachstehenden Form schreiben:

$$(p^2q + \mu\zeta)(pq+\frac{\lambda\xi}{\mu\zeta}) - \frac{\lambda\xi}{\mu\zeta}\cdot p^2q = o.$$

aus welcher ersichtlich ist, dass sie für unendlich weit entfernte Puncte auf zwiefache Weise befriedigt werden kann, sei es, dass wir

$$p^2q + \mu\zeta = o$$

setzen, wonach $pq = \infty$ wird, oder dass wir

$$\mu\zeta pq + \lambda\xi = o$$

setzen, wonach p^2q verschwindet. Hiernach hat die gegebene Curve nach der Richtung von P eine Spitze erster Art, und für die beiden unendlichen Zweige, welche diese Spitze bilden ist die Ordnung der Annäherung $\frac{3}{2}$. An derselben Asymptote zieht sich zugleich ein hyperbolischer Zweig hin, der von der, durch die letzte Gleichung dargestellten, Hyperbel dreipunctig osculirt wird. Das Maass der Annäherung ist hiernach unmittelbar gegeben. Der somit bestimmte Fall hängt von $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 8\right)$ Constanten ab.

157. Wenn in der letzten Gleichung auch ζ verschwindet und die Anzahl der Constanten sich hiernach auf $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 9\right)$ reducirt, so ergibt sich:

$$p^3\Theta_{n-3} + \mu p^2\Theta_{n-4} + \lambda(p+\xi)\Theta_{n-5} + \sigma\Omega_{n-6} = o,$$

und die drei unendlichen Zweige werden durch einen einzigen vertreten, welcher annäherungsweise mit dem an der Asymptote P sich hinziehenden Zweige der Hyperbel höherer Ordnung, deren Gleichung die folgende ist:

$$p^3q^2 + \lambda\xi = o,$$

zusammenfällt. Dieser Zweig liegt ganz auf derselben Seite der genannten Asymptote und die Ordnung der Annäherung beträgt $\frac{5}{3}$. In diesem Falle, wie in dem vorhergehenden liegen fünf Durchschnitte der Linie P mit der Curve unendlich weit, wonach diese mindestens von der 5. Ordnung sein muss.

158. Wenn endlich auch ξ verschwindet, so kommt:

$$p^3\Theta_{n-3} + \mu p^2\Theta_{n-4} + \lambda p\Theta_{n-5} + \sigma\Omega_{n-6} = o.$$

Dann erst hat die Curve drei unendliche Zweige, welche die Linie P zur gemeinschaftlichen Asymptote haben. Es hängt dieser Fall von $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 10\right)$ Constanten ab, und es kann derselbe, weil die Asymptote P mit jedem der drei Zweige zwei unendlich weit entfernte Puncte gemein hat, erst bei Curven der 6. Ordnung Statt finden. Zur Bestimmung des Maasses der Annäherung der drei Hyperbel-Zweige an ihre gemeinschaftliche Asymptote erhalten wir die folgenden drei Hyperbeln:

$$pq + x' = o, \qquad pq + x'' = o, \qquad pq + x''' = o,$$

indem wir die Wurzeln der nachstehenden cubischen Gleichung:

$$x^3 + \mu x^2 + \lambda x + \sigma = o,$$

durch x', x'' und x''' bezeichnen. Ist eine dieser drei Wurzeln gleich Null, so wird der bezügliche Zweig von der gemeinsamen Asymptote P osculirt: und in untergeordneten Fällen können auf jedem der drei Zweige bis $(n-3)$ Durchschnittspuncte unendlich weit rücken. Wenn zwei der drei Wurzeln x', x'', x''' einander gleich sind, so bilden im Allgemeinen zwei der drei Zweige in unendlicher Entfernung eine Spitze zweiter Art; daneben behält die Curve einen gewöhnlichen hyperbolischen Zweig, welcher die Asymptote der Spitze auch zu der seinigen hat. Ueberhaupt kann, neben allen den, im vorigen Paragraphen discutirten Fällen, die Curve überdiess noch einen hyperbolischen Zweig mit derselben Asymptote haben. Endlich können auch die Werthe von x alle drei einander gleich sein. Dann hat die Curve, im Allgemeinen, noch keine drei sich osculirende unendliche Zweigen-Paare, so wenig, als sie in dem Falle der 155. Nummer drei sich einfach berührende unendliche Zweigen-Paare hat,

und es ergeben sich neue untergeordnete Fälle, denjenigen der 156. und der folgenden Nummern analog, wobei eine Hyperbel an die Stelle der geradlinigen Asymptote tritt und der Contact um eine Ordnung ansteigt.

159. Wir wollen zur Erläuterung und als Beispiel für die Erörterungen der vorigen Nummer die Curven der 6. Ordnung nehmen. Wenn Curven dieser Ordnung drei Paare hyperbolischer Zweige haben, welche an derselben Asymptote P, ohne sie zu osculiren, sich hinziehen, so ist die allgemeine Gleichung derselben, mit den nothwendigen $\left(\frac{6\,.\,9}{1\,.\,2}-10\right)\equiv 17$ Constanten, die folgende:

$$\Omega \equiv \mathrm{p}^3\mathrm{rst} + \mu\mathrm{p}^2\mathrm{uv} + \lambda\mathrm{pw} + \sigma = 0. \tag{1}$$

Für die beiden linearen Functionen, von welchen alle übrigen abhängen, wollen wir p und eine willkührliche zweite Function q nehmen. Die Form der vorstehenden Gleichung zeigt, dass wir alsdann Ω auch als eine ganze Function von pq und p betrachten und demzufolge diese Gleichung auch in die folgende auflösen können:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{pq})^3 + \mu(\mathrm{pq})^2 + \lambda(\mathrm{pq} + \sigma\\ &+ \mathrm{p}\{\alpha(\mathrm{pq})^2 + \beta(\mathrm{pq}) + \gamma\} + \mathrm{p}^2\{\delta(\mathrm{pq})^2 + \varepsilon(\mathrm{pq}) + \zeta\}\\ &+ \mathrm{p}^3\{\eta(\mathrm{pq}) + \vartheta\} + \mathrm{p}^4\{\varkappa(\mathrm{pq}+\xi)\} + \nu\mathrm{p}^5 + \varrho\mathrm{p}^6 = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Diese Gleichung enthält zwei überzählige Constanten, welche auf die willkührliche Annahme der linearen Function, oder, was dasselbe heisst, der entsprechenden geraden Linie Q, kommen.

Wenn wir die Wurzeln der folgenden Gleichung dritten Grades

$$\omega^3 + \mu\omega^2 + \lambda\omega + \sigma = 0, \tag{3}$$

durch ω', ω'' und ω''' bezeichnen, so können wir die erste Zeile der Gleichung (2) auf folgende Weise in Factoren zerlegen:

$$(\mathrm{pq} + \omega')(\mathrm{pq}+\omega'')(\mathrm{pq}+\omega'''),$$

und demnach, indem wir

$$\mathrm{pq} + \omega' \equiv Y, \qquad \mathrm{pq} + \omega'' \equiv Y + \pi, \qquad \mathrm{pq} + \omega''' \equiv Y + \pi',$$

setzen, die Gleichung (2) folgendergestalt schreiben:

$$\begin{aligned}&Y(Y+\pi)(Y+\pi') + \alpha\mathrm{p}(Y+\tau)(Y+\tau') + \delta\mathrm{p}^2(Y+\chi)(Y+\chi')\\ &+ \eta\mathrm{p}^3(Y+\upsilon) + \varkappa\mathrm{p}^4(Y+\psi) + \nu\mathrm{p}^5 + \varrho\mathrm{p}^6 = 0,\end{aligned} \tag{4}$$

oder, indem wir die in der 122. Nummer gebrauchte Bezeichnung beibehalten auch folgendergestalt:

$$Y(Y+\pi)(Y+\pi') + \alpha\mathrm{p}\varphi_1 Y^2 + \gamma\mathrm{p}\varphi_3 Y + \zeta\mathrm{p}\varphi_5 = 0. \tag{5}$$

Im Allgemeinen sind diejenigen drei Hyperbeln, welche durch die folgenden drei Gleichungen:

$$Y = 0, \qquad Y + \pi = 0, \qquad Y + \pi' = 0,$$

dargestellt werden, von der Art, dass sie die drei Paare an P sich hinziehender unendlichen Zweige der Curve dreipunctig osculiren. Um die richtige Anzahl der nothwendigen Constanten zu erhalten, müssen wir, weil eine solche Hyperbel zwei willkührliche Constanten, welche auf die willkührliche Lage der zweiten Asymptote Q kommen, mit sich bringt, auf die Function Y nur drei Constanten zählen, unter welchen diejenigen beiden, von welchen p abhängt, einbegriffen sind. Aus den Gleichungen (4) und (5) können wir immer, indem wir Y mit $(Y+\varepsilon\mathrm{p}+\xi\mathrm{p}^2)$ vertauschen und dann die beiden Constanten ε und ξ gehörig bestimmen, die zweite Potenz von Y fortschaffen, wonach die folgende Form mit den 17 nothwendigen Constanten hervorgeht:

$$Y(Y+\pi)(Y+\pi') + \gamma\mathrm{p}\varphi_3 Y + \zeta\mathrm{p}\varphi_5 = 0. \quad [17] \tag{6}$$

Wir können endlich auch die beiden überzähligen Constanten aus der Gleichung (5)

dadurch fortschaffen, dass wir, statt Y, die fünfpunctig osculirende Hyperbel Y_1 in Evidenz treten lassen. Es ergibt sich hier unmittelbar folgende Form:

$$Y_1(Y_1+\pi)(Y_1+\pi') + \alpha p\varphi_1 Y_1^2 + \gamma p\varphi_3 Y_1 + \zeta p^3\varphi_3 = o. \quad [17] \qquad (7)$$

Diess setzt aber natürlich voraus, dass die Curve wenigstens ein Paar hyperbolischer Zweige hat, was indess in dem Falle dreier gleichen Wurzeln der Gleichung (3) im Allgemeinen nicht Statt findet.

160. So lange die Wurzeln der Gleichung (3) alle drei reell und von einander verschieden sind, hat die Curve drei Paare unendlicher Zweige mit drei verschiedenen fünfpunctig osculirenden Hyperbeln, welche unter einander auf der gemeinschaftlichen Asymptote P eine blosse Berührung haben. Diese Hyperbeln treten in der nachstehenden Gleichung durch die Functionen Y_1, Y_2 und Y_3 unmittelbar in Evidenz:

$$555 \qquad Y_1Y_2Y_3 + \varrho p^3\varphi_1 Y_1 + \sigma p^3\varphi_3 = o, \quad [17] \qquad (8)$$

welche, da auf das erste Glied 11 Constanten kommen, die gerade nothwendige Constanten-Anzahl enthält. Jede der drei Hyperbeln schneidet die Curve nur in drei Puncten, weil 9, nach der Richtung von P hin, unendlich weit liegen. Von diesen 9 Puncten kommen zwei, auf jedes derjenigen beiden Zweigenpaare, welche von der fraglichen Hyperbel nicht osculirt, sondern bloss berührt werden.

Bei Curven von besonderer Art kann die Ordnung des Contactes mit den drei osculirenden Hyperbeln ansteigen. Den verschiedenen möglichen Fällen entsprechen die folgenden Gleichungen. Vor jeder Gleichung ist die Anzahl der zusammenfallenden Durchschnittspuncte, welche auf jeder der drei Hyperbeln Y_1, Y_2, Y_3 den Osculationspunct bestimmen, nach jeder Gleichung die Anzahl der nothwendigen Constanten bemerkt.

$$655 \qquad Y_1Y_2Y_3 + \varrho p^3\varphi_1 Y_1 + \sigma p^4\varphi_2 = o, \quad [16]$$
$$755 \qquad \text{»} \quad + \varrho p^3\varphi_1 Y_1 + \sigma p^5\varphi'_1 = o, \quad [15]$$
$$855 \qquad \text{»} \quad + \varrho p^3\varphi_1 Y_1 + \sigma p^6 = o, \quad [14]$$
$$666 \qquad Y_1Y_2Y_3 + \varrho p^4 Y_1 + \sigma p^4\varphi_2 = o, \quad [15]$$
$$766 \qquad \text{»} \quad + \varrho p^4 Y_1 + \sigma p^5\varphi_1 = o, \quad [14]$$
$$866 \qquad \text{»} \quad + \varrho p^4 Y_1 + \sigma p^6 = o, \quad [13]$$
$$777 \qquad Y_1Y_2Y_3 + \sigma p^5\varphi_1 = o, \quad [13]$$
$$888 \qquad \text{»} \quad + \sigma p^6 = o. \quad [12]$$

Es können zwei Wurzeln der Gleichung (3) imaginär sein, alsdann sind es auch zwei Paare unendlicher Zweige der Curve.

161. Wenn zwei Wurzeln, etwa ω' und ω'', einander gleich sind, so geht die Gleichung (6), weil alsdann auch $\pi=\pi'$, nachdem sie eine Constante verloren, in die folgende über:

$$Y(Y+\pi)^2 + \mu p\varphi_3 Y + \lambda p\varphi_5 = o. \quad [16] \qquad (9)$$

Die Curve hat in diesem Falle immer ein Paar unendlicher Zweige mit seiner fünfpunctig osculirenden Hyperbel. Diese tritt in folgender Gleichung in Evidenz:

$$Y_1(Y_1+\pi)^2 + \alpha p\varphi_1 Y_1^2 + \gamma p\varphi_3 Y_1 + \zeta p^3\varphi_3 = o. \quad [16] \qquad (10)$$

Alle untergeordneten Fälle können auf gleiche Weise durch die beiden letzten unter einander identischen Gleichungen ausgedrückt werden. Um diese untergeordneten Fälle zu unterscheiden, wollen wir uns zur ersten dieser Gleichungen wenden. Wenn wir in derselben zuvörderst Y mit $(Y+\pi)$ gegenseitig vertauschen, so kommt:

$$(Y+\pi)Y^2 + \mu p\varphi_3 Y + \varkappa p\varphi_5 = o, \quad [16] \qquad (11)$$

und diese Form particularisirt sich in die folgenden:

$$(Y+\pi)Y^2 + \mu p\varphi_3 Y + \varkappa p^2\varphi_4 = o, \quad [15] \qquad (12)$$
$$(Y+\pi+\xi p)Y^2 + \mu p^2\varphi_2 Y + \varkappa p^3\varphi_3 = o, \quad [14] \qquad (13)$$
$$(Y+\pi+\xi p)Y^2 + \mu p^2\varphi_2 Y + \varkappa p^4\varphi_2 = o, \quad [13] \qquad (14)$$

$$(Y+\pi+\xi p+\vartheta p^2)Y^2 + \mu p^3\varphi_1 Y + \varkappa p^5\varphi_1 = 0, \qquad [12] \qquad (15)$$
$$(Y+\pi+\xi p+\vartheta p^2)Y^2 + \mu p^3\varphi_1 Y + \varkappa p^6 \quad = 0. \qquad [11] \qquad (16)$$

Wir wollen uns zuerst mit den Gleichungen (11), (13) und (15) beschäftigen. Für die an der hyperbolischen Doppel-Asymptote Y sich mehr als bloss berührend hinziehenden unendlichen Zweige erhalten wir, bei gehörigen Vernachlässigungen, bezüglich die folgenden drei Gleichungen:

$$\pi Y^2 + \varkappa p = 0, \qquad \pi Y^2 + \varkappa p^3 = 0, \qquad \pi Y^2 + \varkappa p^5 = 0, \qquad (17)$$

woraus wir ersehen, dass den beiden gleichen Wurzeln der Gleichung (3) eine Spitze zweiter Art entspricht, dass aber die beiden unendlichen Zweige, welche diese Spitze bilden unter einander einen solchen Contact haben, dessen Ordnung von $\frac{3}{2}$ zu $\frac{5}{2}$ und $\frac{7}{2}$ ansteigt. In den folgenden drei Gleichungen, die mit den eben genannten identisch sind, tritt die fünfpunctig osculirende Hyperbel Y_1 in Evidenz:

$$Y_1 Y_0^2 + \nu p\varphi_1 Y_1 Y_0 + \varrho p\varphi_3 Y_1 + \sigma p^3\varphi'_3 = 0, \qquad [16]$$
$$\text{»} \quad + \nu p^2 Y_1 Y_0 + \varrho p^3\varphi_1 Y_0 + \sigma p^3\varphi_3 = 0, \qquad [14] \qquad (18)$$
$$\text{»} \quad + \varrho p^3\varphi_1 Y_0 + \sigma p^5\varphi_1 = 0. \qquad [12]$$

In der ersten dieser Gleichungen ist $Y_0 \equiv (Y_1+\alpha)$, in der zweiten $\equiv (Y_1+\alpha+\beta p)$, in der dritten $\equiv (Y_1+\alpha+\beta p+\gamma p^2)$; wonach nur in dem Falle der letzten Gleichung, durch die Form dieser Gleichung, die Hyperbel Y_0 vollkommen bestimmt ist.

Wenn $\varkappa$ in den Gleichungen (17) verschwindet, das heisst, wenn die Gleichungen (11) (13) und (15) bezüglich in (12), (14) und (16) übergehen, so ändert sich die Natur der unendlichen Zweige. Dann ergeben sich zur Bestimmung derselben, statt der drei Gleichungen (17) die folgenden drei:

$$\pi Y^2 + \mu p Y + \varkappa p^2 = 0,$$
$$\pi Y^2 + \mu p^2 Y + \varkappa p^4 = 0,$$
$$\pi Y^2 + \mu p^3 Y + \varkappa p^6 = 0.$$

Den beiden gleichen Wurzeln der Gleichung (3) entsprechen also wiederum zwei Paare unendlicher Zweige. Diese beiden Zweigenpaare osculiren sich in den drei fraglichen Fällen bezüglich drei-, vier- und fünfpunctig. Sie sind hierbei reell oder imaginär, je nachdem der Ausdruck $(\mu^2 - 4\pi\varkappa)$ positiv oder negativ ist.

Wir können hier wieder die drei fünfpunctig osculirenden Hyperbeln zugleich in Evidenz bringen. Der Gleichung (12) entspricht folgende Form mit der nöthigen Constanten-Anzahl:

5.55	$Y_1 Y_2 Y_3 + \varrho p^3\varphi_1 Y_2 + \sigma p^4\varphi_2 = 0,$	[15]

welche sich, für untergeordnete Fälle mehrpunctiger Osculationen, die wir wie bisher bezeichnen wollen, in die folgenden Formen particularisirt:

5.65	$Y_1 Y_2 Y_3 + \varrho p^3\varphi_1 Y_2 + \sigma p^5\varphi'_1 = 0,$	[14]
5.75	» $+ \varrho p^3\varphi_1 Y_2 + \sigma p^6 = 0,$	[13]
6.55	$Y_1 Y_2 Y_3 + \varrho p^4 Y_2 + \sigma p^4\varphi_2 = 0,$	[14]
6.66	» $+ \varrho p^4 Y_2 + \sigma p^5\varphi_1 = 0,$	[13]
6.76	» $+ \varrho p^4 Y_2 + \sigma p^6 = 0,$	[12]
7.55	$Y_1 Y_2 Y_3 + \varrho p^4 Y_1 + \sigma p^5\varphi_1 = 0,$	[13]
7.66	» $+ \sigma p^6\varphi_1 = 0,$	[12]
8.55	$Y_1 Y_2 Y_3 + \varrho p^4 Y_1 + \sigma p^6 = 0,$	[12]
8.77	» $+ \sigma p^6 = 0.$	[11]

Es kommen auf das erste Glied in diesen verschiedenen Gleichungen nur 10 Constante, weil hier folgende Functionen-Bestimmung Statt findet:

$$Y_2 \equiv Y_1 + \alpha + \beta p + \gamma p^2, \qquad Y_3 \equiv Y_2 + \delta p + \varepsilon p^2.$$

Es müssen überhaupt, je nachdem Y_1 oder eine der beiden Hyperbeln Y_2 und Y_3 eine $m$punctig

osculirende sein soll, bezüglich $(m+4)$ und $(m+5)$ Durchschnittspuncte mit der Curve nach der Richtung von P unendlich weit liegen.

Der Gleichung (14) entspricht folgende Form:

5.55 $$Y_1 Y_2 Y_3 + \varrho p^3 \varphi_1 Y_2 + \sigma p^5 \varphi_1 = o, \qquad [13]$$

welche sich, für untergeordnete Fälle mehrpunctiger Osculationen, in die folgenden Formen particularisirt:

5.65 $$Y_1 Y_2 Y_3 + \varrho p^3 \varphi_1 Y_2 + \sigma p^6 = o, \qquad [12]$$

6.55 $$Y_1 Y_2 Y_3 + \varrho p^4 Y_2 + \sigma p^5 \varphi_1 = o, \qquad [12]$$

6.66 $$\text{»} \quad + \varrho p^4 Y_2 + \sigma p^6 = o, \qquad [11]$$

7.55 $$Y_1 Y_2 Y_3 + \sigma p^5 \varphi_1 = o, \qquad [11]$$

8.66 $$Y_1 Y_2 Y_3 + \sigma p^6 = o. \qquad [10]$$

Es kommen auf das erste Glied in diesen verschiedenen Gleichungen nur 9 Constante, in Uebereinstimmung mit folgender Functionen-Bestimmung:

$$Y_2 \equiv Y_1 + \alpha + \beta p + \gamma p^2, \qquad Y_3 \equiv Y_2 + \varepsilon p^2.$$

Erst, wenn von den 12 Durchschnittspuncten einer der beiden Hyperbeln Y_3 und Y_2 mit der Curve $(m+6)$ nach der Richtung von P unendlich weit liegen, ist diese Hyperbel eine $m$punctig osculirende.

Der Gleichung (16) entsprechen die folgenden Formen:

5.55 $$Y_1 Y_2^2 + \varrho p^3 \varphi_1 Y_2 + \sigma p^6 = o, \qquad [11]$$

6.55 $$Y_1 Y_2^2 + \varrho p^4 Y_2 + \sigma p^6 = o, \qquad [10]$$

8.55 $$Y_1 Y_2^2 + \sigma p^6 = o. \qquad [9]$$

Es kommen auf das erste Glied in diesen Gleichungen nur 8 Constante, die Hyperbel Y_2 kann nur fünfpunctig osculiren, sie osculirt aber zwei Zweige zugleich fünfpunctig und berührt den dritten Zweig auf der Asymptote P.

162. Es bleiben uns jetzt nur noch diejenigen Fälle zu discutiren übrig, wo alle Wurzeln der Gleichung (3) einander gleich sind. Dem allgemeinsten Falle entspricht hier, indem aus der Gleichung (6) π und π' verschwinden, folgende Gleichung:

$$Y^3 + \mu p \varphi_3 Y + \lambda p \varphi_5 = o. \qquad [15] \qquad (19)$$

Es ergibt sich für die unendlichen Zweige der Curve:

$$Y^3 + \lambda p = o.$$

Dieser gibt es nur zwei, sie liegen gegen die Asymptote P wie die beiden Zweige der Hyperbel Y, einer ihr näher, der andere weiter von ihr entfernt; die Annäherung an diese Hyperbel ist von der Ordnung $\frac{4}{3}$.

Eine Particularisation der Gleichung (19) ist die folgende:

$$Y^3 + \mu p \varphi_3 Y + \lambda p^2 \varphi_4 = o, \qquad [14] \qquad (20)$$

Hier werden die unendlichen Zweige der Curve annäherungsweise durch folgende Gleichung dargestellt:

$$Y(Y^2 + \mu p) + \lambda p^2 = o,$$

woraus man ersieht, dass Y eine dreipunctig osculirende Asymptote der Curve ist, an der zwei hyperbolische Zweige der Curve sich hinziehen, und dass die Curve ausserdem auf derselben Asymptote (und also auch auf einem ihrer eigenen hyperbolischen Zweige) eine Spitze zweiter Art mit der Annäherungs-Ordnung $\frac{3}{2}$ hat. Es wird diese Spitze annäherungsweise durch die Gleichung:

$$Y^2 + \mu p = o,$$

dargestellt. In der nachstehenden Gleichung tritt Y_1 als fünfpunctig osculirende Hyperbel in Evidenz:

$$Y_1{}^3 + \nu p\varphi_1 Y_1{}^2 + \varrho p\varphi_3 Y_1 + \sigma p^4\varphi_2 = 0. \text{*)} \qquad [14]$$

In untergeordneten Fällen kann das hyperbolische Zweigen-Paar der Curve eine sechs- und siebenpunctig osculirende Hyperbel haben, welche, wie in dem allgemeinen Falle, die Spitze in fünf unendlich weit entfernten Puncten schneidet. Diesen entspricht, dass das letzte Glied der vorstehenden Gleichung sich bezüglich in $\sigma p^5\varphi_1$ und σp^6 particularisirt.

Eine neue Particularisation bietet die folgende Form dar:

$$Y^3 + \mu p^2\varphi_2 Y + \lambda p^2\varphi_4 = 0, \qquad [13]$$

welche für die unendlichen Zweige:

$$Y^3 + \lambda p^2 = 0$$

gibt. Die Curve hat also solcher Zweige nur zwei. Sie liegen gegen die Asymptote P, wie die Hyperbel Y, und zwar beide zugleich der Asymptote näher, oder beide zugleich weiter von ihr entfernt. Die Ordnung der Annäherung der Curve an diese Hyperbel Y beträgt $\frac{5}{3}$.

Endlich gelangen wir durch eine neue Particularisation zu folgender Form:

$$Y^3 + \mu p^2\varphi_2 Y + \lambda p^3\varphi_3 = 0, \qquad [12]$$

die wir, wenn wir die Wurzeln der folgenden Gleichung:

$$x^3 + \mu x + \lambda = 0, \qquad (21)$$

durch x_1, x_2 und x_3 bezeichnen, auf folgende Weise schreiben können:

$$(Y+x_1 p)(Y+x_2 p)(Y+x_3 p) + \mu' p^3\varphi_1 Y + \lambda' p^4\varphi_2 = 0. \qquad (22)$$

Dann hat die Curve im Allgemeinen wiederum drei Paare unendlicher Zweige. Diese haben unter einander einen dreipunctigen Contact. Den drei Factoren des ersten Gliedes der vorstehenden Gleichung entsprechen drei vierpunctig osculirende Hyperbeln. In der nachstehenden Form treten die drei fünfpunctig osculirende Hyperbeln Y_1, Y_2 und Y_3 in Evidenz:

$$555 \qquad Y_1 Y_2 Y_3 + \varrho p^4 Y_1 + \sigma p^5\varphi_1 = 0. \qquad [12]$$

Jede der fünfpunctig osculirenden Hyperbeln schneidet die Curve nur noch in einem einzigen Puncte, weil 11 Puncte, von denen drei auf jeden derjenigen beiden Zweige kommen, die von der fraglichen Hyperbel nicht fünfpunctig osculirt werden, unendlich weit liegen. In

---

*) Diese Gleichung ist keine andere, als die erste der drei Gleichungen (18), aus welcher α verschwunden ist und welche hiernach noch eine überzählige Constante einschliesst. Diese ist aus vorstehender Form ausgefallen.

Um diese Form direct zu erhalten, wollen wir die Gleichung (20) auf folgende Weise schreiben:

$$Y^3 + \{\mu p + \mu' p^2 + \mu'' p^3\varphi_1\} Y + \{\lambda p^2 + \lambda' p^3 + \lambda'' p^4\varphi_2\} = 0,$$

und dann Y_1 durch folgende Gleichung einführen:

$$Y \equiv Y_1 + \xi p + \zeta p^2,$$

indem wir die beiden unbestimmten Coefficienten durch folgende zwei Gleichungen:

$$\mu\xi + \lambda = 0,$$
$$\mu\zeta + (\xi^3 + \mu'\xi + \lambda') = 0$$

bestimmen. Diese Bestimmung ist immer und zwar auf linearem Wege möglich, und gibt

$$\nu p\varphi_1 \equiv 3(\xi p + \zeta p^2).$$

Mit λ verschwindet ξ; mit λ und λ' zugleich auch ζ. Hieraus ersehen wir, dass, wenn die Gleichung (20) in folgende beiden schrittweise sich particularisirt:

$$Y^3 + \mu p\varphi_3 Y + \lambda p^3\varphi'_3 = 0, \qquad [13]$$
$$Y^3 + \mu p\varphi_3 Y + \lambda p^4\varphi_2 = 0, \qquad [12]$$

dadurch die Natur der fraglichen unendlichen Zweige sich nicht ändert. Diesen Particularisationen entspricht bloss, dass die Function $\nu p\varphi_1$ einmal auf $\nu' p^2$ sich reducirt und das andere Mal ganz ausfällt.

Uebereinstimmung mit den beiden identischen Gleichungen:

$$Y_2 \equiv Y_1 + \alpha p + \beta p^2, \qquad Y_3 \equiv Y_1 + \alpha' p + \beta' p^2,$$

sind auf das Glied $Y_1 Y_2 Y_3$ nur 9 Constanten zu rechnen.

Es gibt hier noch die folgenden beiden untergeordneten Fälle mehrpunctiger Osculationen:

$$655 \qquad Y_1 Y_2 Y_3 + \varrho p^4 Y_1 + \sigma p^6 = 0, \qquad [11]$$

$$666 \qquad Y_1 Y_2 Y_3 + \sigma p^6 = 0. \qquad [10]$$

Wir können die Gleichung (22), indem wir $(Y - x_1 p)$ mit Y vertauschen, auch auf folgende Form bringen:

$$Y(Y+\psi p)(Y+\psi' p) + \varrho p^3 \varphi_1 Y + \lambda p^4 \varphi_2 = 0,$$

welche, wenn zwei Wurzeln der Gleichung (21), etwa x_2 und x_3, einander gleich sind, in folgende übergeht:

$$Y(Y+\psi p)^2 + \varrho p^3 \varphi_1 Y + \lambda p^4 \varphi_2 = 0. \qquad [11] \qquad (23)$$

Die bezügliche Curve hat im Allgemeinen eine Spitze zweiter Art, welche von zwei solchen unendlichen Zweigen gebildet wird, die unter einander und mit der Hyperbel $(Y+\psi p)$ einen Contact von der Ordnung $2\frac{1}{2}$ haben. Ueberdiess hat die Curve ein hyperbolisches Zweigen-Paar, welches die Hyperbel Y und folglich auch die Hyperbel $(Y+\psi p)$ dreipunctig osculirt, und also mit der Spitze sechs unendlich weit entfernte Durchschnittspuncte hat. Da der Contact der beiden Zweige, welche die Spitze bilden, unter einander ein innigerer ist, als der Contact mit den beiden hyperbolischen Zweigen der Curve, so liegt die Spitze ganz auf derselben Seite eines dieser beiden Zweige. In der nachstehenden Gleichung tritt Y_1 als die fünfpunctig osculirende Hyperbel in Evidenz:

$$Y_1 Y_0^2 + \nu p^2 Y_1 Y_0 + \varrho p^3 \varphi_1 Y_1 + \sigma p^5 \varphi'_1 = 0, \qquad [11]$$

wobei $Y_0 \equiv Y_1 + \alpha p$. Es tritt, indem das letzte Glied dieser Gleichung sich auf σp^6 reducirt, an die Stelle der fünfpunctig osculirenden Hyperbel eine sechspunctig osculirende.

Wir können die Gleichung (23) auch unter folgender Form schreiben:

$$Y(Y+\psi p)^2 + \varrho p^3 \varphi_1 (Y+\psi p) + \lambda p^4 \varphi_2 = 0,$$

und dann folgendergestalt particularisiren:

$$Y(Y+\psi p)^2 + \varrho p^3 \varphi_1 (Y+\psi p) + \lambda p^5 \varphi_1 = 0. \qquad [10]$$

Dann hat die bezügliche Curve ihre drei Paare unendlicher Zweige wiedererhalten. Von diesen hat einer mit den beiden andern einen dreipunctigen, diese beiden aber haben unter einander einen vierpunctigen Contact. In der nachstehenden Gleichung treten die drei fünfpunctig osculirenden Hyperbeln in Evidenz:

$$Y_1 Y_2 Y_3 + \varrho p^4 Y_1 + \sigma p^6 = 0, \qquad [10]$$

wobei $Y_2 \equiv Y_1 + \alpha p + \beta p^2$ und $Y_3 \equiv Y_2 + \beta' p^2$. Hier kann, in untergeordnetem Falle, nur das erste Paar hyperbolischer Zweige der Curve von einer Hyperbel, statt fünfpunctig, sechspunctig osculirt werden. Dem entspricht die folgende Gleichung:

$$Y_1 Y_2 Y_3 + \sigma p^6 = 0. \qquad [9]$$

Weitere Fälle sind, so lange die Gleichung (21) nur zwei gleiche Wurzeln hat, nicht möglich.

Wenn die Wurzeln der eben genannten Gleichung alle drei einander gleich sind, so geht die Gleichung (23), indem ψ verschwindet, in die folgende über:

$$Y^3 + \varrho p^3 \varphi_1 Y + \lambda p^4 \varphi_2 = 0. \qquad [10]$$

Für die unendlichen Zweige kommt alsdann:

$$Y^3 + \lambda p^4 = 0,$$

woraus man ersieht, dass die Curve bloss zwei solcher Zweige hat, die die Hyperbel Y nach der Ordnung $\frac{4}{3}$ osculiren.

Die folgende, von Neuem particularisirte Form:

$$Y^3 + \varrho p^3 \varphi_1 Y + \lambda p^5 \varphi_1 = o, \qquad [9]$$

gibt für die unendlichen Zweige:

$$Y(Y^2 + \varrho p^3) + \lambda p^5 = o.$$

Es ist also Y eine Hyperbel, an welcher zwei Zweige der Curve vierpunctig osculirend sich hinziehen. Auf einem dieser Zweige hat die Curve ausserdem noch eine Spitze zweiter Art, deren beide Zweige sich unter einander, so wie auch jenen Zweig nach der Ordnung $2\frac{1}{2}$ osculiren. Statt der vierpunctig osculirenden Hyperbel tritt, in der nachstehenden Gleichung, die fünfpunctig osculirende, welche die Spitze der Curve in sieben unendlich weit entfernten Puncten schneidet, und demnach nicht mehr in eine sechspunctig osculirende übergehen kann, in Evidenz:

$$Y_1{}^3 + \nu p^2 Y_1{}^2 + \varrho p^3 \varphi_1 Y_1 + \sigma p^6 = o. \qquad [9]$$

Eine neue Particularisation liefert die folgende Gleichung:

$$Y^3 + \varrho p^4 Y + \lambda p^5 \varphi_1 = o. \qquad [8]$$

die bezügliche Curve hat alsdann nur zwei unendliche Zweige, welche die Hyperbel Y nach der Ordnung $\frac{5}{3}$ osculiren.

Hiermit sind alle möglichen Fälle erschöpft; denn das Verschwinden des zweiten Gliedes in der letzten Gleichung hat keinen Einfluss auf die Natur der unendlichen Zweige. Wenn aber das letzte Glied auf λp^6 sich reducirt, so löset diese Gleichung sich in die Gleichung dreier solcher Hyperbeln auf, die unter einander zu je zwei einen vierpunctigen Contact haben. —

§. 7.

Aufzählung der verschiedenen Arten von Curven der vierten Ordnung, in Beziehung auf die Natur ihrer unendlichen Zweige.

163. Euler hat bereits eine solche im 11. Capitel des 2. Bandes seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen gegeben; doch trägt diese Aufzählung den Character der Unsicherheit an sich, weil er nur vermuthen kann, dass die meisten der von ihm namhaft gemachten Arten wirklich existiren. Wir können hier mit vollkommener Sicherheit auftreten und sogleich für jede besondere Curven-Art die allgemeine Gleichung hinschreiben und zwar in solcher Weise, dass das Characteristische der jedesmaligen Curven-Art, unabhängig von ihrer Lage, unmittelbar aus ihrer Gleichung in die Augen springt; dass wir unmittelbar erkennen, in welcher Beziehung jedes Glied der Gleichung zur dargestellten Curve steht und wie mit einer Form-Aenderung jedes Gliedes auch die Natur der Curve sich ändert. Und endlich gibt es eine abstracte Zahl (eine Zahl, die wir für jede Gleichung durch unmittelbares Zählen erhalten) welche unserer Eintheilung und überhaupt allen unsern Entwicklungen zur Controlle dient, ich meine die Anzahl der nothwendigen Constanten, die jede Curvenart fordert.

Es bringt Euler alle verschiedenen Arten unter acht Hauptfälle; wir wollen ihm hierin folgen.

Erster Fall.

Es gibt keine reelle Richtung nach welcher die Curve in weniger als vier Puncten geschnitten wird. Die vier geradlinigen Asymptoten sind imaginär, schneiden sich aber paarweise in zwei reellen Puncten, welche die Mittelpuncte zweier Gruppen ähnlicher and ähnlich liegender Ellipsen sind, von welchen jede, weil sie mit der Curve in unendlicher Entfernung einen imaginären Doppel-Contact hat, nur in vier Puncten schneidet. Verrücken wir eine solche Ellipse, parallel mit sich selbst, so schneidet sie die Curve in sechs Puncten.

Wir nehmen, um uns **Euler** mehr anzunähern, auf Unterscheidungen im Imaginären keine Rücksicht, und zählen mit ihm hier nur eine einzige Art, deren allgemeine Gleichung:

1. $(p^2+\lambda^2 q^2)(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu tu + \mu = o.$ *) [14]

Zweiter Fall.

Es gibt zwei bestimmte Richtungen, nach welchen die Curve von einer beliebigen geraden Linie nur in drei Puncten geschnitten wird. Nach diesen beiden Richtungen schneiden insbesondere zwei gerade Linien, die beiden Asymptoten, die Curve im Allgemeinen und höchstens in zwei Puncten. An die Stelle einer Ellipsen-Gruppe des ersten Falles ist hier eine Gruppe von Hyperbeln getreten, welche die beiden reellen Asymptoten der Curve auch zu den ihrigen haben. In dieser Hyperbel-Gruppe befinden sich insbesondere zwei Hyperbeln, von denen jede, weil sie einen Curven-Zweig dreipunctig in unendlicher Entfernung osculirt, die Curve nicht in vier sondern im Allgemeinen in drei Puncten schneidet. Es kann, in untergeordneten Fällen, jeder der beiden Durchschnittspuncte der Curve mit jeder der beiden Asymptoten unendlich weit rücken, wonach wir, mit **Euler**, die folgenden 6 Arten erhalten:

2. $pq(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu tu + \mu = o,$ [14]
3. $pq(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu(p+\pi)t + \mu = o,$ [13]
4. $pq(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu pt + \mu = o,$ [12]
5. $pq(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu(p+\pi)(q+\varkappa) + \mu = o,$ [12]
6. $pq(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu p(q+\varkappa) + \mu = o,$ [11]
7. $pq(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu pq + \mu = o.$ [10]

Dritter Fall. **)

Die Curven haben vier reelle Asymptoten, welche die Curve im Allgemeinen und höchstens in zwei Puncten schneiden. Jede gerade Linie, welche ihnen parallel ist, schneidet die Curve immer in drei Puncten. In untergeordneten Fällen können die Durchschnitte der Curve mit ihren Asymptoten unendlich weit rücken. Hiernach erhalten wir 9 verschiedene Arten.

8. $pqrs + \nu tu + \mu = o,$ [14]
9. $pqrs + \nu(p+\pi)t + \mu = o,$ [13]
10. $pqrs + \nu pt + \mu = o,$ [12]
11. $pqrs + \nu(p+\pi)(q+\varkappa) + \mu = o,$ [12]
12. $pqrs + \nu p(q+\varkappa) + \mu = o,$ [11]
13. $pqrs + \nu pq + \mu = o,$ [10]
14. $pqrs + \nu t = o,$ [11]
15. $pqrs + \nu p + \mu = o,$ [10]
16. $pqrs + \mu = o.$ ***) [9]

---

*) Vor jeder Gleichung wollen wir in fortlaufender Nummer die einzelnen Arten von Curven vierter Ordnung bezeichnen, nach jeder Gleichung, wie bisher, die Anzahl der nothwendigen Constanten. Auf jeden Factor von der Form $(p^2+\lambda q^2)$ sind überall nur 4 Constante zu rechnen. Vergl. §. 2.

) In **Euler's Aufzählung der 4. Fall.

***) Die 23. Art nach **Euler**, welche hierher gehören würde, existirt nicht. Sie entspricht, nach der von uns früher gebrauchten Bezeichnungsweise, dem Symbole 4433 und würde sich also, wenn sie möglich wäre, zwischen unsere 15. und 16. Art, welche bezüglich den Symbolen 4333 und 4444 entsprechen, stellen. Da aber die der 15. Art entsprechende Gleichung nur eine Constante verlieren muss, um in die Gleichung des 16. Falles, überzugehen, so kann keine intermediäre Art vorhanden sein. Die Unmöglichkeit der fraglichen Art ist in dem Satze der 28. Nummer begründet.

Vierter Fall. *)

Wir müssen hier eine doppelte Unterscheidung machen.

A. Es gibt eine einzige Richtung, nach welcher die Curve von einer geraden Linie nur in drei Puncten geschnitten wird. Keine nach dieser Richtung gezogene gerade Linie schneidet die Curve nur in zwei Puncten. Eine beliebige Parabel, deren Durchmesser diese Richtung haben, schneidet die Curve im Allgemeinen und höchstens in sechs Puncten, wenn ihr Parameter gehörig bestimmt wird, nur in fünf Puncten. Verschieben wir eine solche Parabel, parallel mit sich selbst und mit ihrer Durchmesser-Richtung, so schneidet sie in einer bestimmten Lage die Curve nur in vier Puncten und wird dann Asymptote der Curve. Verschieben wir endlich eine so bestimmte Parabel, ohne sie zu drehen, nach der Richtung ihrer Durchmesser, so bleibt sie, in allen ihren Lagen, eine Asymptote, in einer vollkommen bestimmten Lage aber, in welcher sie mit der Curve einen innigern Contact hat, schneidet sie diese nur noch in drei Puncten. Ausserdem hat die Curve zwei imaginäre geradlinigen Asymptoten.

17. $(p^2+\lambda p)(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu(p+\pi)t + \mu = o.$ **) [13]

B. Es gibt eine bestimmte Richtung, nach welcher die Curve von einer sonst beliebigen geraden Linie nur in zwei Puncten geschnitten wird. Im Allgemeinen befinden sich unter diesen Linien zwei, welche die Curve nur in einem einzigen Puncte schneiden: die beiden parallelen Asymptoten. Diese bilden in unendlicher Entfernung einen Doppelpunct. Ausserdem hat die Curve zwei imaginäre geradlinigen Asymptoten.

α. Es sind die beiden parallelen Asymptoten imaginär, so dass der unendlich weit entfernte Doppelpunct ein isolirter ist:

18. $(p^2+\xi^2)(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu(p+\pi)t + \mu = o.$ [12]

β. Es sind die beiden parallelen Asymptoten reell; dann kann auch jede derselben eine dreipunctig osculirende sein und schneidet dann die Curve nicht mehr. Hier finden also die folgenden 3 Arten Statt:

19. $(p^2-\xi^2)(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu(p+\pi)t + \mu = o,$ [12]

20. $(p^2-\xi^2)(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu(p\pm\xi)t + \mu = o,$ [11]

21. $(p^2-\xi^2)(r^2+\gamma^2 s^2+\varkappa) + \nu p + \mu = o.$ ***) [10]

γ. Es fallen die beiden parallelen Asymptoten zusammen. Der unendlich weit liegende Doppelpunct hat also zwei zusammenfallende Tangenten, und ist, im Allgemeinen, eine Spitze erster Art:

22. $p^2(r^2+\gamma^2 s^2) + \nu(p+\pi)t + \mu = o.$ [11]

Es können auch zwei reelle oder imaginäre Curven-Zweige sich berühren:

23. 24. $p^2(r^2+\gamma^2 s^2) + 2\nu pt + \mu = o.$ [10]

Die berührenden Zweige sind reell, wenn $\nu^2 > \mu$, und imaginär, wenn $\nu^2 < \mu$. Wenn

$$\nu^2 = \mu,$$

so hat die Curve im Allgemeinen in unendlicher Entfernung eine Spitze zweiter Art:

---

*) In Euler's Aufzählung der 3. Fall.

**) Wir nehmen hier auf die verschiedenen Ordnungen, nach welchen die parabolische Asymptote die Curve in unendlicher Entfernung osculiren kann, keine Rücksicht, und zählen deshalb hier nur einen Fall. Wir verfahren hierbei consequent, weil wir sonst auch, um consequent zu sein, bei nicht osculirenden geradlinigen Asymptoten besondere Fälle in Beziehung auf osculirende hyperbolische Doppel-Asymptoten hätten unterscheiden müssen.

***) Euler hat die 20. Art, wo der Contact auf den beiden parallelen Asymptoten von verschiedener Ordnung ist, nicht erkannt. Diese Art ist zwischen seine 10 und 11. Art einzuschalten.

25. $p^2(r^2+\gamma^2 s^2) + 2\nu pt + \nu^2 = o.$ [9]

Wir können die vorstehende Gleichung, indem wir einen Ausdruck von der Form $(pq+\nu)$ kurz durch Y bezeichnen, auch auf die folgende Form bringen:

$$Y^2 + \alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3 + \varrho^2 p^4 = o,$$

wobei durch den positiven Werth des Coefficienten von p^4 die beiden Asymptoten der Curve als imaginäre in Evidenz treten. Wenn α verschwindet, so hat die Curve zwei vollständige hyperbolischen Zweigen-Paare, welche sich in unendlicher Entfernung dreipunctig osculiren. Diese Zweigenpaare können reell oder imaginär sein:

26. 27. $Y^2 \mp \varkappa^2 p^2 + \gamma p^3 \varrho^2 p^4 = o.$ [8]

Wenn $\varkappa$ verschwindet, erhält die Curve wiederum eine Spitze, die aber von zwei solchen Zweigen gebildet wird, die unter sich einen Contact von der Ordnung $\frac{3}{2}$ haben:

28. $Y^2 + \gamma p^3 + \varrho^2 p^4 = o.$ *) [7]

Fünfter Fall.

An die Stelle der beiden imaginären Asymptoten des 4. Falles treten hier zwei reelle Asymptoten. Wenn die verschiedenen unendlichen Zweige ein und derselben Curve in keiner gegenseitigen Beziehung ständen, so würden sich die 12 Arten, welche wir in dem vorigen Falle aus der Verschiedenheit der unendlichen Zweige abgeleitet haben, mit jeder der 6 Arten, die zwei gewöhnliche Asymptoten nach dem 2. Falle darbieten, zu neuen Arten combiniren. Somit erhielten wir hier 72 Arten. Diese Anzahl reducirt sich aber, weil 25 Arten unmöglich sind, auf 47.

A. Parabolische Asymptoten:

29. $(p^2+\lambda q)rs + \nu(p+\pi)t + \mu = o,$ [13]
30. $(p^2+\lambda q)rs + \nu(p+\pi)(r+\varrho) + \mu = o,$ [12]
31. $(p^2+\lambda q)rs + \nu(p+\pi)r + \mu = o,$ [11]
32. $(p^2+\lambda q)rs + \nu t = o,$ [11]
33. $(p^2+\lambda q)rs + \nu r + \mu = o,$ [10]
34. $(p^2+\lambda q)rs + \mu = o.$ [9]

B. Zwei imaginäre parallelen Asymptoten:

35. $(p^2+\xi^2)rs + \nu(p+\pi)t + \mu = o,$ [12]
36. $(p^2+\xi^2)rs + \nu(p+\pi)(r+\varrho) + \mu = o,$ [11]
37. $(p^2+\xi^2)rs + \nu(p+\pi)r + \mu = o,$ [10]
38. $(p^2+\xi^2)rs + \nu t = o,$ [10]
39. $(p^2+\xi^2)rs + \nu r + \mu = o,$ [9]
40. $(p^2+\xi^2)rs + \mu = o.$ [8]

C. Zwei reelle nicht osculirenden parallelen Asymptoten:

41. $(p^2-\xi^2)rs + \nu(p+\pi)t + \mu = o,$ [12]
42. $(p^2-\xi^2)rs + \nu(p+\pi)(r+\varrho) + \mu = o,$ [11]
43. $(p^2-\xi^2)rs + \nu(p+\pi)r + \mu = o,$ [10]
44. $(p^2-\xi^2)rs + \nu t = o,$ [10]
45. $(p^2-\xi^2)rs + \nu r + \mu = o.$ [9]

*) Euler hat in seiner »Einleitung« die Existenz von Spitzen zweiter Art überhaupt und insbesondere in unendlicher Entfernung nicht erkannt. Darum fehlen die Arten 25. und 28. Ich habe hier auch, was er nicht thut, die Arten 26. und 27. von den Arten 23. und 24. getrennt. Unser vierter Fall enthält somit 12 Arten, während Euler deren nur 7 aufzählt.

D. Zwei reelle parallelen Asymptoten, von welchen eine die Curve in unendlicher Entfernung osculirt:

46.	$(p^2-\xi^2)rs + \nu(p\pm\xi)t + \mu = o$,	[11]
47.	$(p^2-\xi^2)rs + \nu(\pm\xi)(r+\varrho) + \mu = o$,	[10]
48.	$(p^2-\xi^2)rs + \nu(p\pm\xi)r + \mu = o$.	[9]

E. Zwei reelle und osculirende parallelen Asymptoten:

49.	$(p^2-\xi^2)(rs+\varkappa) + \nu p + \mu = o$,	[10]
50.	$(p^2-\xi^2)rs + \nu p + \mu = o$,	[9]
51.	$(p^2-\xi^2)rs + \mu = o$.	[8]

F. Eine Spitze erster Art in unendlicher Entfernung:

52.	$p^2rs + \nu(p+\pi)t + \mu = o$,	[11]
53.	$p^2rs + \nu(p+\pi)(r+\varrho) + \mu = o$,	[10]
54.	$p^2rs + \nu(p+\pi)r + \mu = o$,	[9]
55.	$p^2rs + \nu t = o$,	[9]
56.	$p^2rs + \nu r + \mu = o$.	[8]

G. H. Zwei vollständige Zweige der Curve, die reell oder imaginär sind, haben in unendlicher Entfernung einen gewöhnlichen Contact:

57. 61.	$p^2rs + 2\nu pt + \mu = o$,	[10]
58. 62.	$p^2rs + 2\nu p(r+\varrho) + \mu = o$,	[9]
59. 63.	$p^2rs + 2\nu pr + \mu = o$,	[8]
60. 64.	$p^2rs + \mu = o$.	[7]

I. Eine gewöhnliche Spitze zweiter Art in unendlicher Entfernung:

65.	$p^2rs + 2\nu pt + \nu^2 = o$,	[9]
66.	$p^2rs + 2\nu p(r+\varrho) + \nu^2 = o$,	[8]
67.	$p^2rs + 2\nu pr + \nu^2 = o$.	[7]

Wir sehen hieraus, wie die eine Asymptote S immer eine gewöhnliche bleibt, während die andere in eine drei- und vierpunctig osculirende übergehen kann.

K. L. Zwei vollständige, reelle oder imaginäre Curven-Zweige, welche, nach der Richtung der Asymptote P, sich dreipunctig osculiren:

68. 69.	$Y^2 \mp \varkappa^2p^2 + \gamma p^3 - \varrho^2p^4 = o$.	[8]

Um neue untergeordnete Fälle zu unterscheiden, wollen wir in dieser Gleichung für Y wiederum den Ausdruck $(pq+\nu)$ restituiren. Alsdann kommt:

$$(pq+\nu)^2 \mp \varkappa^2p^2 + \gamma p^3 - \varrho^2p^4 = o, \qquad (a)$$

wobei zu bemerken ist, dass weder die Constante ϱ noch die Constante ν verschwinden darf, weil in dem einen Falle die Curve eine parabolische Asymptote erhält, und in dem andern alle Glieder ihrer Glieder durch p^2 theilbar werden. Wir können die vorstehende Gleichung auf folgende Form bringen:

$$p^2(q-\varrho p+\frac{\gamma}{2\varrho})(q+\varrho p-\frac{\gamma}{2\varrho}) + 2\nu pq - (\frac{\gamma^2}{4\varrho^2}\pm\varkappa^2)p^2 + \nu^2 = o,$$

oder auch, indem wir

$$q - \varrho p + \frac{\gamma}{2\varrho} \equiv r$$

setzen, auf die folgende:

$$p^2r(r+2\varrho p-\frac{\gamma}{\varrho}) + 2\nu p(r+(\varrho-\frac{\gamma^2}{8\nu\varrho^2}\mp\frac{\varkappa^2}{2\nu})p - \frac{\gamma}{2\varrho}) + \nu^2 = o. \qquad (b)$$

Diese Gleichung, welche vollständig die Gleichung (a) vertritt, entspricht einer Particularisation der linearen Function t in der allgemeinen Gleichung der 65. Art, wodurch diese

Gleichung eine Constante verliert. Man überzeugt sich nemlich leicht, dass, indem σ eine neue Constante bedeutet,

$$2t \equiv s + r + \sigma p,$$

oder, wenn wir geometrisch deuten, dass das, von den beiden Asymptoten R und S auf der Doppel-Asymptote P interceptirte, Segment von der Linie T halbirt wird.

Wenn die Asymptote R eine dreipunctig osculirende werden soll, so kommt die folgende Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten der Gleichung (a) hinzu:

$$\pm \varkappa^2 = 2\nu\varrho - \frac{\gamma^2}{4\varrho^2} \equiv \frac{8\nu\varrho^3 - \gamma^2}{4\varrho^2}. \qquad (c)$$

Wenn wir, der Kürze halber,

$$2\varrho \equiv \delta, \qquad -\frac{\gamma}{\varrho} \equiv \varepsilon,$$

setzen, so dass

$$\pm \varkappa^2 = \nu\delta - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2,$$

so nimmt die Gleichung (b) hiernach die nachstehende Form an:

70. 71. $\quad p^2r(r+\delta p+\varepsilon) + 2\nu p(r+\tfrac{1}{2}\varepsilon) + \nu^2 = o. \quad [7]$

Die sich in unendlicher Entfernung osculirenden Zweige sind reell oder imaginär, je nachdem

$$4\nu\delta - \varepsilon^2 > o \quad \text{oder} \quad 4\nu\delta - \varepsilon^2 < o.$$

Die Osculation der Asymptote R steigt zu einer vierpunctigen an, wenn ε und folglich auch γ verschwindet, dann reducirt sich die Bedingungs-Gleichung (c) auf:

$$\pm \varkappa^2 = 2\nu\varrho = \nu\delta, \qquad \gamma = o,$$

und die Gleichung (7) verwandelt sich in die folgende:

72. 73. $\quad p^2r(r+\delta p) + 2\nu pq + \nu^2 = o, \quad [6]$

und je nachdem die Coefficienten ν und δ im Zeichen übereinstimmen oder nicht, sind die beiden sich in unendlicher Entfernung osculirenden Curven-Zweige reell oder imaginär. Die beiden Asymptoten schneiden die Doppel-Asymptote P nothwendig in demselben Puncte.

M. Eine Spitze zweiter Art, von zwei solchen Zweigen gebildet, die unter einander einen Contact von der Ordnung $\frac{3}{2}$ haben:

74. $\quad Y^2 + \gamma p^3 + \varrho^2 p^4 = o. \quad [7]$

Wir können die bisherige Bezeichnung hier beibehalten, indem wir bloss $\varkappa$ gleich Null setzen, dann kommt, wenn eine Asymptote die Curve dreipunctig osculiren soll, aus (c):

$$8\nu\varrho^3 = \gamma^2,$$

oder auch

$$4\nu\delta = \varepsilon^2.$$

Die Gleichung der 69. und 70. Art geht hiernach, indem sie eine Constante verliert, in die folgende über:

75. $\quad p^2r(r+\frac{\varepsilon^2}{4\nu}\cdot p+\varepsilon) + 2\nu p(r+\tfrac{1}{2}\varepsilon) + \nu^2 = o. \quad [6]$

Zu einer vierpunctigen kann die Osculation nicht ansteigen, weil ε hier nicht mehr verschwinden darf. *)

---

*) Da Euler von den 12 Arten des 4. Falles nur 7 erkannte, so erhält er auch nur $7 \cdot 6 \equiv 42$ Arten des vorliegenden Falles, von denen er zwei als unmöglich ausscheidet, so dass sich nach ihm 40 Arten ergeben. Aber ausser den von ihm ausgeschiedenen, sind noch 7 Arten unmöglich, wonach die Anzahl derselben sich auf 33 reduciren würde. Zu diesen kommen aber noch die folgenden von Euler übersehenen 14 Arten hinzu: 46 bis 48 und 65—75, so dass wir zu den 47 im Texte aufgezählten verschiedenen Arten gelangen.

Sechster Fall.

Die in dem 4. Falle aufgezählten besondern zwölf Fälle combiniren sich paarweise, indem die Curve hier, statt der beiden imaginären Asymptoten, noch eine zweite Gruppe parabolischer Asymptoten oder in unendlicher Entfernung einen Doppelpunct hat.

A. Zwei Gruppen parabolischer Asymptoten:

76. $(p^2+\lambda q)(r^2+\gamma s) + \nu(p+\pi)(r+\varrho) + \mu = 0.$ [12]

B. Eine Gruppe parabolischer Asymptoten und 1) zwei imaginäre Asymptoten, 2) zwei nicht osculirende parallelen Asymptoten, 3) zwei Asymptoten, von welchen eine dreipunctig osculirt, 4) zwei dreipunctig osculirende Asymptoten, 5) eine Spitze erster Art, 6) und 7) zwei reelle oder imaginäre vollständigen Zweige, welche in unendlicher Entfernung einen gewöhnlichen Contact haben, 8) eine gewöhnliche Spitze zweiter Art, 9) und 10) zwei reelle oder imaginäre vollständigen Zweige, welche sich in unendlicher Entfernung dreipunctig osculiren, 11) eine Spitze zweiter Art, welche von zwei solchen Zweigen gebildet werden, die unter einander einen Contact von der Ordnung $\frac{5}{2}$ haben.

77. $(p^2+\xi^2)(q^2+\gamma r) + \nu(p+\pi)(q+\varkappa) + \mu = 0,$ [11]
78. $(p^2-\xi^2)(q^2+\gamma r) + \nu(p+\pi)(q+\varkappa) + \mu = 0,$ [11]
79. $(p^2-\xi^2)(q^2+\gamma r) + \nu(p\pm\xi)(q+\varkappa) + \mu = 0,$ [10]
80. $(p^2-\xi^2)(q^2+\gamma r) + \nu p + \mu = 0,$ [9]
81. $p^2(q^2+\gamma r) + \nu(p+\pi)(q+\varkappa) + \mu = 0,$ [10]
82. 83. $p^2(q^2+\gamma r) + 2\nu p(q+\varkappa) + \mu = 0,$ *) [9]
84. $p^2(q^2+\gamma r) + 2\nu p(q+\varkappa) + \nu^2 = 0,$ [8]
85. 86. $p^2(q^2+\gamma p\mp\varkappa^2) + 2\nu pq + \nu^2 = 0,$ **) [7]
87. $p^2(q^2+\gamma p) + 2\nu pq + \nu^2 = 0.$ [6]

Die vier letzten Gleichungen können auch, mit Beibehaltung der frühern Bezeichnung, unter folgender Form geschrieben werden:

$$Y^2 + \alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3 = 0,$$
$$Y^2 \pm \varkappa^2 p^2 + \gamma p^3 = 0,$$
$$Y^2 + \gamma p^3 = 0.$$

C. Zwei Paare paralleler Asymptoten. Hierher gehören die folgenden Arten. Es hat die Curve, neben einem Paare imaginärer Asymptoten,

1) ein zweites Paar solcher Asymptoten:

88. $(p^2+\xi^2)(q^2+\gamma^2) + \nu(p+\pi)(q+\varkappa) + \mu = 0;$ [10]

2) zwei reelle parallelen Asymptoten, die beide nicht osculiren, von denen eine osculirt, oder die beide osculiren:

89. $(p^2-\xi^2)(q^2+\gamma^2) + \nu(p+\pi)(q+\varkappa) + \mu = 0,$ [10]
90. $(p^2-\xi^2)(q^2+\gamma^2) + \nu(p\pm\xi)(q+\varkappa) + \mu = 0,$ [9]
91. $(p^2-\xi^2)(q^2+\gamma^2) + \nu p + \mu = 0;$ [8]

3) eine Spitze erster Art:

92. $p^2(q^2+\gamma^2) + \nu(p+\pi)(q+\varkappa) + \mu = 0;$ [9]

4) zwei in unendlicher Entfernung sich einfach berührende, reelle oder imaginäre

---

*) Je nachdem der Ausdruck $(\nu^2-\mu)$ positiv oder negativ ist, sind die sich berührenden Curven-Zweige reell oder imaginär.

**) Auf den Ausdruck $(q^2+\gamma r)$ sind überall nur vier Constante zu rechnen; er kann, nachdem die Function p vorher bestimmt ist, überall auch durch den Ausdruck $(q^2+\gamma p+\delta)$ ersetzt werden (82.), wonach die Gleichung der 83. Art, indem sie in die Gleichung der folgenden beiden Arten übergeht, nur die einzige Constante ϱ verliert.

Zweigen-Paare:

93. 94. $p^2(q^2+\gamma^2) + 2\nu p(q+\varkappa) + \mu = o;$ *) [8]

5) eine gewöhnliche Spitze zweiter Art:

95. $p^2(q^2+\gamma^2) + 2\nu p(q+\varkappa) + \nu^2 = o.$ [7]

Die letzte Gleichung können wir auch folgendergestalt schreiben:

$$Y^2 + \alpha p + \gamma^2 p^2 = o.$$

Andere Arten von Curven mit imaginären Parallel-Asymptoten gibt es nicht.

Es hat die Curve neben zwei gewöhnlichen parallelen Asymptoten,

1) noch ein zweites Paar paralleler Asymptoten, die beide nicht osculiren, von welchen eine osculirt, oder die beide osculiren:

96. $(p^2-\xi^2)(q^2-\gamma^2) + \nu(p+\pi)(q+\varkappa) + \mu = o,$ [10]

97. $(p^2-\xi^2)(q^2-\gamma^2) + \nu(p\pm\xi)(q+\varkappa) + \mu = o,$ [9]

98. $(p^2-\xi^2)(q^2-\gamma^2) + \nu p + \mu = o;$ [8]

2) eine Spitze erster Art:

99. $p^2(q^2-\gamma^2) + \nu(p+\pi)(q+\varkappa) + \mu = o;$ [9]

3) zwei reelle oder imaginäre, in unendlicher Entfernung sich berührende Zweigen-Paare:

100. 101. $p^2(q^2-\gamma^2) + 2\nu p(q+\varkappa) + \mu = o;$ [8]

4) eine Spitze zweiter Art:

102. $p^2(q^2-\gamma^2) + 2\nu p(q+\varkappa) + \mu = o.$ [7]

Diese letzte Gleichung kann auch die folgende Form annehmen:

$$Y^2 + \alpha p - \gamma^2 p^2 = o.$$

Es hat die Curve neben zwei parallelen Asymptoten, unter welchen sich eine osculirende befindet,

1) noch zwei solche Asymptoten:

103. $(p^2-\xi^2)(q^2-\gamma^2) + \nu(p\pm\xi)(q\pm\gamma) + \mu = o,$ [8]

2) eine Spitze erster Art:

104. $p^2(q^2-\gamma^2) + \nu(p+\pi)(q\pm\gamma) + \mu = o;$ [8]

3) zwei in unendlicher Entfernung sich berührende, reelle oder imaginäre Zweigen-Paare:

105. 106. $p^2(q^2-\gamma^2) + 2\nu p(q\pm\gamma) + \mu = o;$ [7]

4) eine Spitze zweiter Art:

107. $p^2(q^2-\gamma^2) + 2\nu p(q\pm\gamma) + \nu^2 = o.$ [6]

Diese letzte Gleichung kann auch die folgende Form annehmen:

$$Y^2 - \gamma p(p+2\nu) = o.$$

Es hat die Curve neben einem Paare osculirender parallelen Asymptoten,

1) ein zweites solches Paar:

108. $(p^2-\xi^2)(q^2-\gamma^2) + \mu = o;$ [7]

2) eine Spitze erster Art:

109. $p^2(q^2-\gamma^2) + \mu = o.$ [6]

Es hat die Curve neben einer Spitze erster Art,

1) eine zweite solche Spitze:

110. $p^2q^2 + \nu(p+\pi)(q+\varkappa p + \mu = o;$ [8]

2) zwei in unendlicher Entfernung sich berührende, reelle oder imaginäre Zweigen-Paare:

*) Das Zeichen des Ausdrucks $(\nu^2-\mu)$, entscheidet über die Realität oder Imaginarität der Zweige, wie bei den Arten 81. und 82.

111. 112. $p^2q^2 + 2\nu p(q+\varkappa) + \mu = o;$ [7]

3) eine Spitze zweiter Art:

113. $p^2q^2 + 2\nu p(q+\varkappa) + \nu^2 = o.$ [6]

Dieser letzten Gleichung können wir auch die folgende Form geben:

$$Y^2 + \alpha p = o.$$

Hiermit sind alle möglichen Arten des 6. Falles erschöpft. Wenn die beiden Zweigen-Paare dieses Falles nicht in gegenseitiger Abhängigkeit ständen, so würden wir $\frac{12.13}{1.2} = 76$ verschiedene Arten erhalten; aber, dieser Abhängigkeit wegen, reducirt sich die Anzahl derselben auf die Hälfte. *)

Siebenter Fall.

Die Curve hat eine geradlinige Asymptote und wird demnach von jeder derselben parallel gezogenen geraden Linie nur in drei Puncten geschnitten. Was die andern an dieser Asymptote sich nicht hinziehenden unendlichen Zweige betrifft, so tritt uns hier eine vierfache Unterscheidung entgegen.

A. Es gibt eine zweite Richtung, nach welcher die Curve von einer beliebigen geraden Linie nur in drei Puncten geschnitten wird. Eine beliebige Parabel, deren Durchmesser diese Richtung haben, schneidet die Curve nur in sechs Puncten. Aber dennoch gibt es weder eine zweite geradlinige noch eine parabolische Asymptote, statt dessen gibt es aber unendlich viele semicubi-parabolischen Asymptoten:

114. $(p^3+\lambda q^2)r + \nu(p+\pi)t + \mu = o.$ [12]

In untergeordneten Fällen ist die geradlinige Asymptote R eine drei- und vierpunctig osculirende:

115. $(p^3+\lambda q^2)r + \nu(p+\pi)(r+\varrho) + \mu = o,$ [11]

116. $(p^3+\lambda q^2)r + \nu(p+\pi)r + \mu = o.$ [10]

B. Es gibt eine zweite Richtung, nach welcher jede gerade Linie die Curve nur in zwei Puncten schneidet, ohne darum Asymptote zu sein. Alle Parabeln von bestimmtem Parameter, deren Durchmesser eben diese Richtung haben, schneiden die Curve nur in 4 Puncten ohne jedoch ihre Asymptoten zu sein. Aber unter jenen geraden Linien gibt es eine, P, welche die Curve nur in einem Puncte schneidet, und dadurch zur Asymptote wird, und, unter jenen Parabeln gibt es unendlich viele mit einer gemeinsamen Axe, welche die Curve nur in 3 Puncten schneiden und dadurch zu Asymptoten werden und endlich unter diesen eine fünfpunctig osculirende, welche die Curve nur in 2 Puncten schneidet. Es stellen sich hier sechs Arten heraus, weil auf der Asymptote R der Contact bis zu einem vierpunctigen, auf der Asymptote P aber nur bis zu einem dreipunctigen ansteigen kann.

1) Die Asymptote P ist eine gewöhnliche:

---

*) Euler zählt 47 Arten. Hierbei ist zuvörderst ein Rechnungsfehler zu berichtigen. Denn, in der Voraussetzung, dass ein Zweig auf die Natur der andern keinen Einfluss hat, bestimmt er die Anzahl der möglichen Arten auf $49 = 7^2$, nemlich gleich dem Quadrate der von ihm angenommenen Anzahl verschiedener Arten des 4. Falles. Statt dessen hätte er $\frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 28$ nehmen müssen. Endlich erkennt Euler 2 Fälle als unmöglich an, so dass er eigentlich 26 Arten bezeichnet. Diese Anzahl vermindert sich noch auf 23, weil drei von diesen Arten nicht existiren; dagegen hat Euler die 15 Arten: 79, 84—87, 90, 95, 97, 102, 107 und 113 übersehn. Somit erhalten wir die im Texte aufgezählten 38 Arten.

117. $p(p^2+\lambda q)r + \nu(p^2+\gamma s) = o$, [11]

118. $p(p^2+\lambda q)r + \nu s = o$, [10]

119. $p(p^2+\lambda q)r + \nu r + \mu = o$; [9]

2) die Asymptote P ist eine osculirende:

120. $p(p^2+\lambda q)r + \sigma p^2 + \nu p + \mu = o$, [10]

121. $p(p^2+\lambda q)r + \nu p + \mu = o$, [9]

122. $p(p^2+\lambda q)r + \mu = o$. [8]

C. Es gibt eine zweite Richtung, nach welcher die Curve von einer beliebigen geraden Linie nur in zwei Puncten geschnitten wird, aber diese gerade Linie wird niemals Asymptote. Jede Parabel, deren Durchmesser diese Richtung haben, schneidet die Curve nur in 5 Puncten, aber keine Umgestaltung und kein Verschieben dieser Parabel machen dieselbe zur Asymptote. Es hat die Curve unendlich viele parabolischen Asymptoten. Mit Rücksicht darauf, dass die Asymptote R auch drei- und vierpunctig osculiren kann, ergeben sich hier 3 Arten:

123. $(p^3+\lambda q)r + \sigma p^2 + \nu p + \mu = o$, [10]

124. $(p^3+\lambda q)r + \nu p + \mu = o$, [9]

125. $(p^3+\lambda q)r + \mu = o$. [8]

Wir können die unter C. und D. unterschiedenen Fälle dadurch characteristisch bezeichnen, dass wir sagen, die Curve habe in unendlicher Entfernung nach der Richtung von P einen Doppelpunct. Bei den Fällen unter D. liegen die Tangenten dieses Doppelpunctes beide unendlich weit, während bei den Fällen unter C. eine dieser beiden Tangenten die Asymptote P ist und nur die andere unendlich weit liegt.

D. Es gibt eine zweite Richtung, nach welcher die Curve von einer beliebigen geraden Linie nur in einem einzigen Puncte geschnitten wird, ohne dass diese deshalb Asymptote ist. Es hat die Curve neben ihrer Asymptote Q, die eine gewöhnliche, eine drei- und eine vierpunctig osculirende sein kann, drei parallele Asymptoten, welche der Curve gar nicht begegnen und deshalb auch nicht in osculirende übergehen können. Diese drei Asymptoten sind als die drei Tangenten eines nach der Richtung von P in unendlicher Entfernung liegenden dreifachen Punctes der Curve anzusehen.

1) Es sind zwei der drei parallelen Asymptoten imaginär:

126. $(p^2+\xi^2)(p+\pi)q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = o$, [9]

127. $(p^2+\xi^2)(p+\pi)q + \nu p + \mu = o$, [8]

128. $(p^2+\xi^2)(p+\pi)q + \mu = o$. [7]

2) die parallelen Asymptoten sind alle drei parallel:

129. $p(p+\pi)(p+\pi')q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = o$, [9]

130. $p(p+\pi)(p+\pi')q + \nu p + \mu = o$, [8]

131. $p(p+\pi)(p+\pi')q + \mu = o$. [7]

3) es fallen zwei der drei parallelen Asymptoten zusammen. Die Curve hat eine Spitze zweiter Art, zwischen deren Schenkel ein hyperbolischer Zweig sich hindurchzieht:

132. $p^2(p+\pi)q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = o$, [8]

133. $p^2(p+\pi)q + \nu p + \mu = o$. [7]

134. $p^2(p+\pi)q + \mu = o$. [6]

4) die parallelen Asymptoten fallen alle drei zusammen, wonach drei unendliche Zweige der Curve sich auf einen einzigen zusammenziehen:

135. $p^3q + \sigma p^2 + \nu p + \mu = o$. [7]

136. $p^3q + \nu p + \mu = o$, [6]

137. $p^3q + \mu = o$. [5]

Achter Fall.

A. Es gibt eine einzige Richtung, nach welcher die Curve von einer beliebigen geraden Linie in 3 Puncten geschnitten wird; aber unter diesen geraden Linien ist keine Asymptote. Jede Parabel, deren Durchmesser diese Richtung haben, schneidet die Curve nur in sechs Puncten. Aber es gibt keine parabolischen Asymptote. Es gibt auch keine Asymptote der dritten Ordnung. Nur einfachere Curven, die ebenfalls von der vierten Ordnung sind, stellen annäherungsweise den Lauf der unendlichen Zweige dar.

138. $p^4 + q(\varkappa p^2+\lambda q^2) + \nu(p+\pi)r + \mu = o.$ *) [11]

Nur in untergeordneten Fällen gibt es unendlich viele Parabeln von der Ordnung $\frac{4}{3}$, welche Asymptoten der Curve sind und, bei willkührlicher Bestimmung der Constanten $\varkappa$, durch die folgende Gleichung dargestellt werden:

$$p^4 + \lambda(q+\varkappa)^3 = o.$$

Für diese parabolischen Asymptoten ist die Ordnung des Contactes überhaupt $\frac{1}{4}$, steigt aber für eine derselben im Allgemeinen zu $\frac{1}{2}$ und in besondern Fällen zu $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$ und $\frac{9}{4}$ an.

139. $(p^4+\lambda q^3) + \nu(p+\varkappa)r + \mu = o.$ [10]

B. Es gibt eine einzige Richtung, nach welcher die Curve von einer beliebigen geraden Linie nur in zwei Puncten geschnitten wird. Unter diesen geraden Linien schneidet eine die Curve nur in einem einzigen Puncte, und ist Asymptote. Jede Parabel, deren Durchmesser diese Richtung haben, schneidet die Curve immer in 5 Puncten. Es gibt aber keine parabolischen Asymptoten. Aber es gibt semicubiparabolische Asymptoten, deren Durchmesser (gerade Linien, welche die Curve nur in zwei Puncten schneiden,) die eben bezeichnete Richtung haben. Wir erhalten hier zwei Arten, die geradlinige Asymptote kann eine gewöhnliche und eine osculirende sein.

140. $(p+\pi)(p^3+\lambda q^2) + \sigma p^2 + \nu r = o,$ [10]

141. $(p+\pi)(p^3+\lambda q^2) + \sigma p^2 + \nu p + \mu = o.$ [9]

C. Es gibt eine einzige Richtung, nach welcher die Curve von einer geraden Linie nur in 2 Puncten geschnitten wird. Keine solche Linie ist Asymptote. Alle Parabeln, deren Durchmesser diese Richtung haben, schneiden die Curve nur in 4 Puncten. Jede solche Parabel hängt noch von 3 willkührlichen Constanten ab; durch gehörige Bestimmung zweier derselben, ergeben sich zwei Gruppen parabolischer Asymptoten, deren jede die Curve nur in 2 Puncten schneidet. In jeder dieser beiden Gruppen befindet sich eine osculirende, welche die Curve, im Allgemeinen, in einem einzigen Puncte schneidet. Diese beiden osculirenden Asymptoten treten in folgender Form in Evidenz:

$$(p^2+\lambda q)(p^2+\gamma r) + \nu p + \mu = o.$$

Da aber die beiden Gruppen parabolischer Asymptoten sowohl imaginär als reell sein können, müssen wir zwei Arten unterscheiden, welche durch das doppelte Zeichen in der folgenden Form, die mit der vorhergehenden identisch ist, angezeigt werden:

142. 143. $[(p^2+\lambda q)^2 \pm \delta^2 r^2] + \nu p + \mu = o.$ [9]

Um den Uebergang zwischen diesen beiden Arten zu bestimmen, wollen wir untersuchen, was in dem Falle gleicher Parameter der beiden Gruppen parabolischer Asymptoten

*) Die 138. Art, die allgemeine des achten Falles, ist Euler entgangen, der anzunehmen scheint, dass eine Curve von beliebiger Ordnung nothwendig eine solche Asymptote hat, welche durch eine zweigliedrige Gleichung:

$$p^m + \lambda q^n = o,$$

dargestellt wird. Diess findet indess nicht mehr Statt, wenn wir über den 3. Grad hinausgehen.

Statt findet. Dann reducirt sich die Function r in der letzten Gleichung auf $(p+\pi)$ und in Folge hiervon verliert diese Gleichung nicht bloss eine, sondern 2 Constanten. Es gibt also noch einen allgemeinern Fall, bevor wir zu diesem Falle gelangen. In demselben sind die beiden Gruppen parabolischer Asymptoten unendlich weit gerückt, so dass es eigentlich keine parabolischen Asymptoten mehr gibt. Und ebenso wie zwei geradlinige und unendlich weit entfernt liegende Asymptoten durch Parabeln vertreten werden, und diese Parabeln den Uebergang zwischen zwei gewöhnlichen und zwei parallelen Asymptoten bezeichnen, so werden auch zwei unendlich weit gerückte Gruppen parabolischer Asymptoten mit gemeinsamer Durchmesser-Richtung durch Asymptoten der 4. Ordnung vertreten, und diese bezeichnen den Uebergang zwischen solchen Gruppen parabolischer Asymptoten mit verschiedenem und mit gleichem Parameter. Die fragliche Art von Curven hat eine Gleichung von folgender Form:

144. $$(p^2+\lambda q)^2 + \nu(p+\pi)r + \mu = o. \qquad [8]$$

Jede Parabel, welche durch die Gleichung von der Form:

$$p^2 + \lambda s = o,$$

und also mit der, in der Gleichung der Curve in Evidenz tretenden, gleiche Axenrichtung und gleichen Parameter hat, schneidet die Curve in 3 aber keine Parabel schneidet sie in weniger Puncten.

Wenn die Gleichung der 144. Curven-Art sich in folgende particularisirt:

145. 146. $$(p^2+\lambda q)^2 \pm \varkappa^2 p^2 + \nu p + \mu = o, \qquad [7]$$

so hat die Curve zwei Gruppen imaginärer oder reeller parabolischen Asymptoten mit gleicher Durchmesser-Richtung und gleichem Parameter. Die beiden osculirenden parabolischen Asymptoten treten in der folgenden Form in Evidenz:

$$(p^2+\lambda q)(p^2+\lambda r) + \mu = o. \qquad (\alpha)$$

Sie schneiden die Curve in keinem Puncte mehr. Zwei Parabeln von gleicher Durchmesser-Richtung und gleichem Parameter osculiren sich in unendlicher Entfernung dreipunctig; dasselbe thun also auch die beiden parabolischen Zweige der Curve und eine parabolische Asymptote, welche einen dieser Zweige fünfpunctig osculirt, osculirt nothwendig den andern dreipunctig, wonach alle Durchschnittspuncte einer solchen Asymptote mit der Curve erschöpft sind.

Wenn in der Gleichung der beiden letzten Curven-Arten $\varkappa$ verschwindet, so kommt:

147. $$(p^2+\lambda q)^2 + \nu p + \mu = o. \qquad [6]$$

Dann bildet die Curve in unendlicher Entfernung auf der Parabel:

$$p^2 + \lambda q = o,$$

eine Spitze zweiter Art, die von zwei solchen Schenkeln gebildet wird, die unter einander einen Contact von der Ordnung $\frac{1}{2}$ haben.

Hiermit sind alle Arten erschöpft. Es kann die Curve nicht zwei vollständige parabolischen Zweige haben, die sich vierpunctig osculiren; denn dann würde die, einen Zweig fünfpunctig osculirende, Parabel die Curve in 9 unendlich weit entfernten Puncten schneiden. Diess stimmt damit überein, dass, wenn wir in der Gleichung (α) $r = q + \alpha$ setzen, diese Gleichung in zwei Gleichungen des 2. Grades sich auflöset. *)

---

*) Als hierher gehörig führt Euler seine 139., 140. und 141. Art auf. Doch seine Betrachtungsweisen sind in mehrerer Hinsicht irrthümlich. Indem er von der folgenden Gleichung in gewöhnlichen Parallel-Coordinaten ausgeht:

$$(y^4+ay^2x+ex^2) + cy^2 + dyx + fy + gx + h = o,$$

In den Arten unter B. und C. hat die Curve in unendlicher Entfernung einen Doppelpunct; einmal liegt eine Tangente desselben, das andere Mal liegen beide Tangenten unendlich weit.

D. Es gibt eine einzige Richtung, nach welcher die Curve von einer beliebigen geraden Linie nur in einem einzigen Puncte geschnitten wird. Zwei solche geraden Linien schneiden die Curve gar nicht, und sind ihre Asymptoten. Eine Parabel, deren Durchmesser diese Richtung haben, schneidet die Curve im Allgemeinen in vier Puncten. Sie kann so bestimmt werden, dass von diesen noch zwei und auch drei unendlich weit rücken, und wird dann einmal eine gewöhnliche, das andere Mal eine osculirende parabolische Asymptote. Da die beiden parallelen geradlinigen Asymptoten imaginär und reell sein, und auch eine Spitze erster Art bilden können, ergeben sich drei Arten von Curven:

148. 149. $(p^2 \pm \xi^2)(p^2+\lambda q) + \nu p + \mu = 0,$ [8]

150. $p^2(p^2+\lambda q) + \nu p + \mu = 0.$ [7]

E. Es gibt eine Richtung, nach welcher die Curve von einer beliebigen geraden Linie nur in einem Puncte geschnitten wird; eine solche gerade Linie, welche die Curve gar nicht schneidet, ist Asymptote. Jede Parabel, deren Durchmesser diese Richtung haben, schneidet die Curve nur in 4 Puncten, keine in weniger: es gibt keine parabolischen Asymptoten. Die Curve hat, neben der gradlinigen Asymptote, nur cubi-parabolische.

151. $(p+\pi)(p^3+\lambda q) + \mu = 0.$ [7]

F. Es gibt eine Richtung, nach welcher die Curve von einer beliebigen geraden

---

zerlegt er das erste Glied derselben folgendergestalt in Factoren zweiten Grades:

$$(y^2+px)(y^2+p'x),$$

welchen zwei Parabeln mit derselben Axe (mit demselben Durchmesser und derselben Tangente im Scheitel desselben) entsprechen. Diese beiden Parabeln sind nach ihm die beiden Asymptoten der Curve. Wie überall, so sieht er auch hier nur zwei solcher Asymptoten, wo es deren unendlich viele gibt. Dann aber hängen diese beiden Parabeln auch von der zum Theil willkührlichen Annahme der Coordinaten-Axe ab und man würde andere parabolischen Asymptoten erhalten, wenn man beide Axen beliebig verschöbe, aber so dass sie mit sich selbst parallel blieben. Die beiden Euler'schen Parabeln sind ferner nicht einmal Asymptoten. Um diess zu zeigen, wollen wir, indem wir der Abscisse x einen unendlichen Werth geben, den Werth der entsprechenden Ordinate eines Punctes der einen jener beiden Parabeln durch y bezeichnen, so dass

$$y^2 + px = 0,$$

und den entsprechenden Werth der Ordinate eines Punctes der Curve durch $(y+\beta)$; dann ist:

$$(y+\beta)^2 + px = -\frac{c(y+\beta)^2 + d(y+\beta)x + f(y+\beta) + gx + h}{(y+\beta)^2 + p'x},$$

und hieraus erhält man, indem man auf die vorhergehende Gleichung Rücksicht nimmt und y gegen x und Constante gegen y vernachlässigt,

$$\beta = \frac{d}{2(p-p')} = \frac{d}{\sqrt{(a^2-4e)}}.$$

Damit also die fragliche Parabel eine Asymptote der Curve werde, müssen wir dieselbe, parallel mit sich selbst und mit ihren Durchmessern (der Axe der x), um eine Strecke, die gleich β ist, verschieben.

Für den Fall, dass

$$a^2 - 4e = 0,$$

schliesst Euler, dass die beiden osculirenden Asymptoten zusammenfallen, was niemals Statt finden kann. Im vorliegenden Falle müsste man die Parabel unendlich weit verschieben, damit sie Asymptote würde; das heisst es existiren in diesem Falle überhaupt keine parabolischen Asymptoten. Vergl. Euler's „Einleitung" II. §. 269.

Linie immer in einem einzigen Puncte geschnitten wird. Jede Parabel, deren Durchmesser diese Richtung haben, schneidet die Curve immer in 4, niemals in weniger Puncten. Es gibt weder geradlinige noch parabolische Asymptoten. Auch keine Parabel der dritten Ordnung ist Asymptote der Curve, es hat dieselbe nur Parabeln der 4. Ordnung zu ihren Asymptoten.

152. $$(p^4+\lambda q) + \nu p^2 = o. \qquad [6]$$

Die Ordnung der Annäherung an diese Asymptoten, beträgt $\frac{1}{4}$, und bleibt auch dieselbe, wenn wir in der Gleichung:

$$p^4 + \lambda q = o,$$

welche eine solche Asymptote darstellt, die lineare Function q mit irgend einer andern vertauschen, und nur den Werth von λ unverändert lassen.

Die Curven-Arten unter D., E. und F. haben in unendlicher Entfernung einen dreifachen Punct, und die dreifache Unterscheidung bezieht sich darauf, dass 1) von den drei Tangenten dieses Punctes eine unendlich weit liegt, 2) dass zwei dieser Tangenten, 3) dass alle drei unendlich weit liegen. —

Wir haben also im Ganzen 152 verschiedene Arten von Curven der 4. Ordnung aufgezählt. Dieser Zahl selbst dürfen wir jedoch keine besondere Bedeutsamkeit beilegen, weil es sich hier von der Aufzählung von solchen Fällen handelt, die einander mehrfach untergeordnet sind. *)

§. 8.

Asymptoten der vierten Ordnung.

164. Eine Asymptote der 4. Ordnung, welche vier lineare Asymptoten ersetzt, tritt in der folgenden allgemeinen Gleichung der Curven-*n*. Ordnung in Evidenz:

$$\Omega_4\Theta_{n-4} + \mu\Omega_{n-2} = o.$$

Die Form dieser Gleichung schliesst die verschiedenen in den sechs ersten Paragraphen discutirten Formen in sich ein. Als neue Fälle haben wir nur diejenigen zu betrachten, in welchen diese Formen:

$$p\Theta_{n-1} + \mu\Omega_{n-2} = o,$$
$$\Omega_2\Theta_{n-2} + \mu\Omega_{n-2} = o,$$
$$\Omega_3\Theta_{n-3} + \mu\Omega_{n-2} = o,$$

überhaupt nicht existiren oder unbestimmt werden, was dann geschieht, wenn die Gleichung (1) die folgende Form mit überzähligen Constanten annehmen kann:

$$p^4\Omega_{n-4} + \mu\Omega_{n-3} = o.$$

Wir wollen uns hier auf der Aufzählung der sieben möglichen Fälle beschränken, und, bloss der Kürze wegen, annehmen, dass $n=5$.

---

*) Eine Abhandlung unter dem Titel „Énumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies" ist von mir im Juli-Hefte 1836 des 1. Bandes des „Journal de mathématiques par Liouville" erschienen und bei der Ausarbeitung des vorstehenden 7. Paragraphen benutzt worden. Wenn in dieser Abhandlung nur 135 Curven-Arten hervorgehoben worden sind, so ist diess nur wenig erheblich. Zu bemerken ist aber, dass hier die Gleichung der 21. Art eine Constante zu wenig hat, wodurch denn auch eine Curven-Art (nach der Aufzählung des Textes die 49), welche der 46. Art vorhergehen muss, übersehen worden ist. Da indess andrerseits die durch 64. angezeigte Art wegfallen muss, so bleibt die angeführte Anzahl verschiedener Arten unverändert.

Erster Fall.

Die Asymptoten sind **Curven vierter Ordnung der 139. Art.** Die allgemeine Gleichung ist:

$$\{p^4 + q(\lambda q^2+\varkappa p^2)\}s + \nu(p+\pi)tu + \mu w = o. \qquad [17]$$

Erst wenn $\varkappa$ verschwindet, werden diese Curven durch Parabeln von der Ordnung $\frac{4}{3}$ vertreten:

$$(p^4+\lambda q^3)s + \nu(p+\pi)tu + \mu w = o. \qquad [16]$$

Zweiter Fall.

Die Curve hat **semicubi-parabolische Asymptoten und eine geradlinige Asymptote, von derjenigen Richtung, nach welcher jene in zwei Puncten geschnitten wird.**

$$(p+\pi)(p^3+\lambda q^2)s + \varrho(p^2+\lambda v)t + \nu p + \mu = o. \qquad [16]$$

Dritter Fall.

Die Curve hat **zwei Gruppen parabolischer Asymptoten von gemeinsamer Durchmesser-Richtung.**

Die beiden parabolischen Asymptoten können sowohl imaginär als reell sein. Diesen beiden Fällen entspricht das doppelte Zeichen in der nachstehenden allgemeinen Gleichung:

$$\{(p^2+\lambda q)^2 \pm \varkappa^2 r^2\}s + \nu(p+\pi)(p^2+\varkappa t) + \mu = o. \qquad [15] \qquad (1)$$

In dem Falle, dass die parabolischen Asymptoten reell sind, können wir die vorstehende Gleichung auch auf folgende Form bringen, in welcher die beiden fünfpunctig osculirenden Hyperbeln unmittelbar in Evidenz treten:

$$(p^2+\lambda' q)(p^2+\lambda'' r)s + \nu(p+\pi)(p^2+\varkappa t) + \mu = o. \qquad [15] \qquad (2)$$

Diese Form, welche die nothwendigen 15 Constanten enthält, ist durch sich selbst gerechtfertigt. Denn jede der beiden Parabeln:

$$p^2 + \lambda' q = o, \qquad p^2 + \lambda'' r = o,$$

schneidet die Curve nur in 3 Puncten, weil 7 unendlich weit liegen. Von diesen kommen zwei auf denjenigen Zweig, den sie nicht osculirt, weil zwei Curven-Zweige, welche von zwei Parabeln mit derselben Durchmesser-Richtung fünfpunctig osculirt werden, wie diese beiden Parabeln selbst, in unendlicher Entfernung sich berühren. In den folgenden Fällen steigt die Ordnung der Osculation; wir haben dieselbe wie früher (90) bezeichnet.

VI V	$(p^2+\lambda' q)(p^2+\lambda'' r)s + \nu(p+\pi)(p^2+\lambda' t) + \mu = o,$	[14]
VII V	» $+ \nu(p+\pi)(p^2+\lambda' q+\varkappa) + \mu = o,$	[13]
VIII V	» $+ \nu(p+\pi)(p^2+\lambda' q) + \mu = o,$	[12]
VI VI	$(p^2+\lambda' q)(p^2+\lambda'' r)s + \nu(p^2+\varkappa t) = o,$	[13]
VII VI	» $+ \nu(p^2+\lambda' t) = o,$	[12]
VIII VI	» $+ \nu(p^2+\lambda' q+\varkappa) = o,$	[11]
VII VII	$(p^2+\lambda' q)(p^2+\lambda'' r)s + \nu p + \mu = o,$	[11]
VIII VIII	$(p^2+\lambda' q)(p^2+\lambda'' r)s + \mu = o.$	[10]

Bevor die parabolischen Asymptoten der beiden Gruppen sich dreipunctig osculiren, rücken sie unendlich weit und die Curve hat nur Curven vierter Ordnung der 144. Art zu Asymptoten:

$$\{(p^2+\lambda q)^2 + \varrho(p+\pi)q\}s + \nu(p+\pi)(p^2+\varkappa t) + \mu = o. \qquad [14] \qquad (3)$$

In dem Falle zweier sich dreipunctig osculirenden parabolischen Curven-Zweige können diese sowohl imaginär, als auch reell sein. Diesem entspricht das doppelte Zeichen in der folgenden allgemeinen Gleichung dieses Falles:

$$\{(p^2+\lambda q)^2 \pm \varkappa^2(p+\pi)^2\}s + \nu(p+\pi)(p^2+\lambda t) + \mu = o. \qquad [13] \qquad (4)$$

In der folgenden Form treten, für den Fall, dass die unendlichen Zweige reell sind, die beiden fünfpunctig osculirenden Parabeln, deren jede die Curve nur in zwei Puncten schneidet, unmittelbar in Evidenz:

V V $(p^2+\lambda q)(p^2+\lambda r)s + \nu(p+\pi)(p^2+\lambda t) + \mu = o.$ [13]

Die Osculation dieser Parabeln steigt in den nachstehenden Fällen zu einer höhern Ordnung an:

VI V $(p^2+\lambda q)(p^2+\lambda r)s + \nu(p+\pi)(p^2+\lambda(q+\varkappa)) + \mu = o,$ [12]

VII V » » $+ \nu(p+\pi)(p^2+\lambda q) + \mu = o,$ [11]

VI VI $(p^2+\lambda q)(p^2+\lambda r)s + \nu(p^2+\lambda t) = o,$ [11]

VII VI » » $+ \nu(p^2+\lambda(q+\varkappa)) = o,$ [10]

VII VII $(p^2+\lambda q)(p^2+\lambda r)s + \mu = o.$ [9]

Bei dem Uebergangs-Falle zwischen zwei Gruppen sich gegenseitig osculirender, reellen und imaginären parabolischen Asymptoten, nimmt die Gleichung (4), indem sie eine Constante verliert, die folgende Form an:

$$\{(p^2+\lambda q)^2 + \varrho p\}s + \nu(p+\pi)(p^2+\lambda t) + \mu = o. \qquad [12]$$

Dann hat die Curve in unendlicher Entfernung eine Spitze zweiter Art, die von zwei parabolischen Schenkeln gebildet wird. Die Ordnung der gegenseitigen Annäherung dieser beiden Schenkel beträgt $\frac{1}{4}$, sie ist zugleich die Ordnung der Annäherung an die Parabel:

$$p^2 + \lambda q = o,$$

und bleibt es immer, wie wir auch diese Parabel, parallel mit sich selbst, nach der Richtung ihrer Durchmesser verschieben.

In dem Falle zweier sich vierpunctig osculirenden parabolischen Curven-Zweige können diese wiederum sowohl imaginär als reell sein. Diesem entspricht das doppelte Zeichen, in der nachstehenden allgemeinen Gleichung dieses Falles:

$$\{(p^2+\lambda q)^2 \pm \sigma^2\}s + \nu(p+\pi)(p^2+\lambda(q+\varkappa)) + \mu = o. \qquad [11]$$

In der folgenden Form treten, für den Fall, dass die unendlichen Zweige reell sind, die beiden fünfpunctig osculirenden Parabeln, deren jede die Curve nur in einem einzigen Puncte schneidet, unmittelbar in Evidenz:

V V $(p^2+\lambda q)(p^2+\lambda(q+\varkappa))s + \nu(p+\pi)(p^2+\lambda(q+\varkappa')) + \mu = o.$ [11]

Die Ordnung der Osculation ist in den nachstehenden Fällen gestiegen:

VI V $(p^2+\lambda q)(q^2+\lambda(q+\varkappa))s + \nu(p+\pi)(p^2+\lambda q) + \mu = o,$ [10]

VI VI $(p^2+\lambda q)(p^2+\lambda(q+\varkappa))s + \nu(p^2+\lambda(q+\varkappa')) = o.$ [9]

Bei dem Uebergang von reellen zu imaginären, vollständigen parabolischen Zweigen des vorigen Falles, ergibt sich die folgende Form:

$$(p^2+\lambda q)^2 s + \nu(p+\pi)(p^2+\lambda(q+\varkappa)) + \mu = o. \qquad [10]$$

Dann bildet die Curve in unendlicher Entfernung auf der Parabel:

$$p^2 + \lambda q = o, \qquad (5)$$

eine Spitze zweiter Art. Die Ordnung der gegenseitigen Annäherung der beiden Schenkel, welche diese Spitze bilden, beträgt $\frac{3}{4}$; dasselbe ist die Ordnung der Annäherung an die fragliche Parabel; verschieben wir diese nach der Richtung ihrer Durchmesser, parallel mit sich selbst, so sinkt jene Ordnung auf $\frac{1}{2}$.

In einem neuen Falle hat die Curve zwei vollständige parabolischen Zweige, welche unter sich und mit der Parabel (5) einen fünfpunctigen Contact (einen Contact der ersten Ordnung) haben:

$$(p^2+\lambda q)^2 s + \nu(p+\pi)(p^2+\lambda q) + \mu = o. \qquad [9]$$

Diese Parabel schneidet die Curve in keinem Puncte mehr und somit ist die höchste Ordnung der gegenseitigen Annäherung beider erreicht. Um zu erkennen, ob diese Zweige reell oder

imaginär sind, können wir, für unendlich weit entfernte Puncte, $s = q = -\frac{p^2}{\lambda}$ setzen. Dann kommt für solche Puncte:

$$(p^2+\lambda q)^2 p^2 - \nu\lambda(p^2+\lambda q)p - \mu\lambda = o,$$

wonach wir für $(p^2+\lambda q)p$ reelle oder imaginäre Werthe erhalten, je nachdem:

$$(\nu^2\lambda+4\mu)\lambda > o, \quad \text{oder} \quad (\nu^2\lambda+4\mu)\lambda < o.$$

Hierin liegt denn auch die Unterscheidung, ob die unendlichen Zweige der Curve reell oder imaginär sind. Wenn insbesondere

$$\nu^2\lambda + 4\mu = o,$$

so können wir, indem wir zugleich die Function s in $(q+\alpha p+\beta)$ auflösen und, der Kürze halber,

$$p^2 + \lambda q \equiv \Pi$$

setzen, die Gleichung der Curve folgendergestalt schreiben:

$$\Pi^2(q+\alpha p+\beta) + \nu(p+\pi)\Pi - \tfrac{1}{4}\nu^2\lambda = o, \qquad [8] \qquad (5)$$

und dann auch auf die folgende Form bringen:

$$\{\Pi p - \tfrac{1}{2}\lambda\nu\}^2 - \lambda\Pi(\alpha p\Pi+\nu\pi) - \lambda\beta\Pi^2 - \Pi^3 = o.$$

Die Glieder dieser letzten Gleichung sind nach der Ordnung ihrer Grösse für unendlich weit entfernte Puncte geordnet. Bei gehörigen Vernachlässigungen kommt für solche Puncte:

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\lambda\nu p^{-1} \pm \sqrt{\{\lambda\Pi(\alpha p\Pi+\nu\pi)\}}\cdot p^{-1}$$
$$= \tfrac{1}{2}\lambda\nu[p^{-1} \pm \sqrt{(\alpha\lambda+2\pi)}.p^{-2}].$$

Wir sehen also, dass die Curve in dem vorliegenden Falle eine solche Spitze zweiter Art hat, deren beiden Schenkel mit der Parabel Π einen Contact der ersten Ordnung, unter sich aber einen Contact von der Ordnung $\frac{5}{4}$ haben. Es liegen hiernach die beiden Schenkel auf derselben Seite dieser Parabel. *)

Wenn, indem wir fortfahren die Curve zu particularisiren:

$$\alpha\lambda + 2\pi = o,$$

so erhält dieselbe ihre beiden vollständigen parabolischen Zweige wieder. Die Gleichung (5) geht alsdann in die folgende über:

$$\Pi^2(q-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot p+\beta) + \nu(p+\pi)\Pi - \tfrac{1}{4}\nu^2\lambda = o, \qquad [7]$$

und kann folgendergestalt geordnet werden:

$$\{\Pi p - \tfrac{1}{2}\lambda\nu + \pi\Pi\}^2 - \{\lambda\beta+\pi^2\}\Pi^2 - \Pi^3 = o.$$

Für die unendlichen Zweige ergibt sich hiernach:

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\lambda\nu p^{-1} - \{\pi \pm \sqrt{(\lambda\beta+\pi^2)}\}\Pi p^{-1},$$
$$= \tfrac{1}{2}\lambda\nu[p^{-1} - \{\pi \pm \sqrt{(\lambda\beta+\pi^2)}\}p^{-2}].$$

Die beiden unendlichen Zweige der Curve haben also unter einander einen Contact von der

---

*) Dieser Fall und die folgenden sind demjenigen analog, dass zum Beispiel, bei Curven vierter Ordnung, zwei unendliche Zweige unter einander einen Contact von den Ordnungen $\frac{3}{2}$, 2 und $\frac{5}{2}$, mit ihrer gemeinschaftlichen Asymptote aber nur einen Contact von der 1. Ordnung haben können. Hier berühren sich zwar die beiden unendlichen Zweige in mehr als zwei Puncten, aber nur durch zwei derselben lässt sich eine gerade Linie legen, so dass diese die Curve nur in vier Puncten schneidet. In den Fällen des Textes berühren sich zwei parabolische Zweige zwar in mehr als fünf Puncten, aber nur fünf sind als auf derselben Parabel liegend zu betrachten, so dass die osculirende Parabel, indem sie nur zehn Puncte mit der Curve in unendlicher Entfernung gemein hat, auch in Beziehung auf die Ordnung des Contactes einen Curven-Zweig nicht vollständig vertreten kann.

Ordnung $\frac{3}{2}$, während ihr Contact mit der Parabel Π von der ersten Ordnung geblieben ist. Sie liegen beide auf derselben Seite dieser Parabel und sind reell oder imaginär, je nachdem

$$\lambda\beta + \pi^2 > 0, \qquad \text{oder} \qquad \lambda\beta + \pi^2 < 0.$$

Wenn insbesondere endlich:

$$\lambda\beta + \pi^2 = 0,$$

so wird die Gleichung (5) die folgende:

$$\Pi^2(q - \frac{2\pi}{\lambda}p - \frac{\pi^2}{\lambda}) + \nu(p+\pi)\Pi - \tfrac{1}{4}\nu^2\lambda = 0, \qquad [6]$$

und kann auch folgendergestalt geschrieben werden:

$$\{\Pi p - \tfrac{1}{2}\lambda\nu + \pi\Pi\}^2 - \Pi^3 = 0 = 0.$$

Dann kommt für unendlich weit entfernte Puncte der Curve:

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\lambda\nu p^{-1} - \lambda\pi\Pi p^{-1} \pm \Pi^{\frac{3}{2}}p^{-1}$$
$$= \tfrac{1}{2}\lambda\nu\{p^{-1} - \lambda\pi p^{-2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}\lambda\nu)}\cdot p^{-\frac{5}{2}}\},$$

woraus ersichtlich ist, dass zwei unendliche Zweige der Curve eine solche Spitze zweiter Art auf der Parabel Π bilden, deren Schenkel unter sich einen Contact von der Ordnung $\frac{3}{2}$ haben.

Hiermit sind alle untergeordneten Fälle des dritten Falles erschöpft. Wir mussten demselben eine besondere Aufmerksamkeit schenken, weil hier neue Beziehungen zur Sprache gekommen sind. Die folgenden Fälle können wir kurz behandeln.

Vierter Fall.

Die Curve hat eine Gruppe parabolischer Asymptoten und zwei geradlinige Asymptoten, welche mit zwei Durchmessern jener zusammenfallen:

$$(p^2 \pm \xi^2)(p^2 + \lambda q)s + \nu(p+\pi)(p^2 + \varkappa t) + \mu = 0. \qquad [14]$$

Fünfter Fall.

Die Curve hat eine cubiparabolische Asymptote, und überdiess eine geradlinige Asymptote, welche ein Durchmesser derselben ist:

$$(p+\pi)(p^3 + \lambda q)s + \nu(p+\alpha)^3 + \mu t = 0. \qquad [13]$$

Sechster Fall.

Die Curve hat Parabeln der vierten Ordnung zu Asymptoten:

$$(p^4 + \lambda q)s + \nu p^2 t + \mu(p+\pi) = 0. \qquad [12]$$

Siebenter Fall.

Die Curve hat vier parallele geradlinigen Asymptoten, oder, mit andern Worten, in unendlicher Entfernung einen vierfachen Punct:

$$p(p+\pi)(p+\pi')(p+\pi'')s + \lambda(p+\alpha)(p+\alpha')(p+\alpha'') = 0. \qquad [11]$$

Es versteht sich, dass die vier parallelen Asymptoten auch paarweise imaginär sein können. Es können auch zwei, drei, auch zwei und zwei, und endlich auch alle vier zusammenfallen. Es können sich aber nicht zwei vollständige Curven-Zweige an einer Doppel-Asymptote berührend hinziehen, weil dann eine gerade Linie, welche in diese Asymptote fällt, die Curve in 6 Puncten schneiden müsste, von welchen vier auf die fraglichen Curven-Zweige und zwei (dem Contacte fremde) auf diejenige kommen, welche zu den beiden übrigen

Parallel-Asymptoten gehören. Einer Doppel-Asymptote entspricht hier immer eine Spitze erster Art. In dem Falle der folgenden Gleichung bildet die Curve zwei solche Spitzen auf zwei parallelen Doppel-Asymptoten:

$$p^2(p+\pi)^2 s + \lambda(p+\alpha)(p+\alpha')(p+\alpha'') = o. \qquad [9]$$

Wenn drei Asymptoten zusammenfallen, so kommt:

$$p^3(p+\pi)s + \lambda(p+\alpha)(p+\alpha')(p+\alpha'') = o, \qquad [9]$$

und die Ordnung der Annäherung an diese beträgt immer nur $\frac{1}{3}$. Wenn alle vier Asymptoten zusammenfallen, wo alsdann

$$p^4 s + \lambda(p+\alpha)(p+\alpha')(p+\alpha'') = o, \qquad [8]$$

so beträgt diese Ordnung immer $\frac{1}{4}$.

Wenn unter den vier parallelen Asymptoten sich eine befindet, welche mit keiner der übrigen zusammenfällt, so gibt es nothwendig eine Hyperbel, welche den an dieser Asymptote sich hinziehenden unendlichen Zweig fünfpunctig osculirt. Diese tritt für die Asymptote P in der nachstehenden Gleichung in Evidenz:

$$(p+\pi)(p+\pi')(p+\pi'')[pt+\mu] + \delta p^3(p+\beta)(p+\beta') = o. \qquad [11]$$

Wir sehen zugleich, dass die Osculation, durch das Verschwinden von β und β' noch um zwei Ordnungen, nemlich bis zu einer siebenpunctigen, ansteigen kann; und diess ist damit im Einklange, dass, wenn wir zu den entsprechenden 7, unendlich weit entfernten, Durchschnittspuncten die 3, der Osculation fremden, hinzuzählen, dadurch die 10 Durchschnittspuncte der Curve und einer Hyperbel erschöpft sind.

165. Ohne die allgemeinen Gleichungen für Curven einer beliebigen n. Ordnung, welche die sieben verschiedenen, in diesem Paragraphen aufgezählten, Arten von Asymptoten der vierten Ordnung haben, hinzuzuschreiben, berühre ich nur den wichtigsten Punct, in allen unseren Discussionen: die Anzahl der Constanten. Diese vermindert sich bei jeder folgenden Art von Asymptoten um eine Einheit, und sinkt somit von $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 3\right)$ bis zu $\left(\frac{n(n+3)}{2} - 9\right)$. Diese letzte Anzahl bezieht sich nemlich auf den Fall von vier parallelen Asymptoten, dem die folgende Gleichung entspricht:

$$p(p+\pi)(p+\pi')(p+\pi'')\Theta_{n-4} + \lambda(p+\alpha)(p+\alpha')(p+\alpha'')\Theta_{n-5} + \mu(p+\beta)(p+\beta')\Theta_{n-6}$$
$$+ \nu(p+\gamma)\Theta_{n-7} + \varrho\Omega_{n-9} = o. —$$

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Singularitäten in dem Laufe der Curven.

---

§. 1.

Discussion der verschiedenen möglichen Fälle singulärer Puncte und singulärer Tangenten der Curven.

1. Es seien q und p beliebige lineare Punct-Coordinaten. *) Alsdann stellt die Gleichung:

$$F(q,p) \equiv \Omega = o, \tag{1}$$

irgend eine Curve dar, die wir uns durch die Bewegung eines Punctes beschrieben denken und die Gleichung:

$$q = \varkappa p + \gamma, \tag{2}$$

ist die Gleichung irgend einer geraden Linie. Die Durchschnitte dieser geraden Linie mit der Curve sind durch die Wurzeln der nachstehenden Gleichung gegeben:

$$F((\varkappa p + \gamma), p) \equiv \Xi = o. \tag{3}$$

Sollen zwei Durchschnitte zusammenfallen und demnach die letzte Gleichung **z w e i g l e i c h e** Wurzeln haben, so muss, für diese Wurzelwerthe, neben der letzten Gleichung, auch noch die folgende befriedigt werden:

$$\frac{d\Xi}{dp} = o. \tag{4}$$

Wenn ein Durchschnittspunkt der Curve (1) und der geraden Linie (2) und also die entsprechenden Werthe von q und p gegeben sind, so können wir, im Allgemeinen, durch die letze Gleichung $\varkappa$ und dann durch die Gleichung (2) γ auf lineare Weise bestimmen. Diese Constanten-Bestimmung macht, im **A l l g e m e i n e n**, die gerade Linie (2) zur Tangente der Curve in dem gegebenen Puncte. Immer aber fallen, wenn die Gleichungen (3)

---

*) In der allgemeinsten Annahme ist:

$$q = \mu \cdot \frac{u}{w}, \qquad p = \nu \cdot \frac{v}{w},$$

indem wir durch u, v und w drei ganze linearen Functionen bezeichnen. Für die Entwicklungen des gegenwärtigen Paragraphen können wir, ohne der Allgemeinheit irgend Abbruch zu thun, an die Stelle der linearen Function w eine blosse Constante setzen, und demnach q und p selbst als ganze lineare Functionen und, wenn wir wollen, insbesondere auch als gewöhnliche Parallel-Coordinaten betrachten.

und (4) beide befriedigt werden, zwei Durchschnitte der Curve und der geraden Linie in einen einzigen Punct zusammen.

Wenn nur die Curve (1) und nicht zugleich auf ihrem Umfange ein Punct gegeben ist, so können wir noch eine neue Bedingung hinzufügen und dann zwischen den Gleichungen (2), (3), (4) und der neu hinzukommenden Bedingungs-Gleichung, nachdem q und p eliminirt worden sind, x und y bestimmen. Eine solche neue Bedingung ist zum Beispiel diejenige, dass die Gleichung (3) nicht bloss ein einziges Paar, sondern zwei Paare gleicher Wurzeln habe. Diese Constanten-Bestimmung würde die gerade Linie (2), im Allgemeinen, zu einer solchen, welche zwei reelle oder imaginaire Zweige der Curve (1) zugleich berührt: zu einer Doppel-Tangente, machen. Solche Doppel-Tangenten sind also für Curven, welche durch die Bewegung eines Punctes beschrieben werden, im Allgemeinen in gewisser Anzahl vorhanden.

Eine solche neue Bedingung ist ebenfalls, dass die Gleichung (3) drei gleiche Wurzeln habe, und dass also, neben dieser Gleichung, und der Gleichung (4) auch noch die folgende bestehe:

$$\frac{d^2\Xi}{dp^2} = 0. \tag{5}$$

Nach dieser Bestimmung erhalten wir immer diejenigen geraden Linien, auf welchen drei Durchschnittspuncte mit der Curve in einen einzigen Punct zusammenfallen; also, im Allgemeinen, die, in gewisser Anzahl vorhandenen, Tangenten in den Wendungspuncten der Curve.

Bei Curven von besonderer Art können auf einer geraden Linie mehr als drei Durchschnittspuncte in einen einzigen Punct zusammenfallen. Es fallen vier Durchschnitte in einen Punct zusammen, wenn auch noch die Gleichung:

$$\frac{d^3\Xi}{dp^3} = 0, \tag{6}$$

neben der frühern besteht; besteht zugleich auch noch die folgende Gleichung:

$$\frac{d^4\Xi}{dp^4} = 0, \tag{7}$$

so fallen fünf Durchschnittspuncte zusammen. Wenn überhaupt m Durchschnittspuncte zusammenfallen sollen, so müssen alle partiellen Differential-Coefficienten von Ξ in Beziehung auf p, bis zur $(m-1)$. Ordnung einschliesslich, für die bezüglichen Coordinaten-Werthe verschwinden.

2. Wir wollen hier eine Bezeichnung einführen, welche uns in den nächsten Untersuchungen den Vortheil einer grossen Kürze gewähren wird. Es sei nemlich:

$$\Omega \equiv \Phi_0,$$

$$\frac{1}{1}\left\{\frac{d\Omega}{dq}\cdot x + \frac{d\Omega}{dp}\right\} \equiv \Phi_1,$$

$$\frac{1}{1\,.\,2}\left\{\frac{d^2\Omega}{dq^2}\cdot x^2 + 2\,\frac{d^2\Omega}{dq\,dp}\cdot x + \frac{d^2\Omega}{dp^2}\right\} \equiv \Phi_2,$$

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\left\{\frac{d^3\Omega}{dq^3}\cdot x^3 + 3\,\frac{d^3\Omega}{dq^2\,dp}\cdot x^2 + 3\,\frac{d^3\Omega}{dq\,dp^2}\cdot x + \frac{d^3\Omega}{dp^3}\right\} \equiv \Phi_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1\,.\,2\,..\,m}\left\{\frac{d^m\Omega}{dq^m}\cdot x^m + m\,\frac{d^m\Omega}{dq^{m-1}dp}\cdot x^{m-1} + \cdots + \frac{m(m-1)\,..\,(m-s+1)}{1\,.\,2\,..\,s}\,\frac{d^m\Omega}{dq^{m-s}dp^s}\cdot x^{m-s} + \cdots \right.$$

$$\left. + m\,\frac{d^m\Omega}{dq\,dp^{m-1}}\cdot x + \frac{d^m\Omega}{dp^m}\right\} \equiv \Phi_m.$$

Wenn wir berücksichtigen, dass in Folge der Gleichung (2):

$$\frac{dq}{dp} = x,$$

so überzeugen wir uns sogleich, dass nach unserer Bezeichnung:

$$\frac{\frac{d\Phi_m}{dq}\cdot dq + \frac{d\Phi_m}{dp}\cdot dp}{dp} = (m+1)\Phi_{m+1};$$

also, in Worten ausgedrückt, dass der Differential-Quotient, den man erhält, wenn man die Function Φ_m (wo m irgend eine beliebige ganze Zahl anzeigt) in Beziehung auf p differentiirt, indem man q, nicht aber x, zugleich mit p sich ändern lässt, gleich ist dem $(m+1)$-fachen der Function Φ_{m+1}. Insbesondere also hat man:

$$\frac{d\Phi_0}{dq}\cdot x + \frac{d\Phi_0}{dp} = 1.\Phi_1,$$

$$\frac{d\Phi_1}{dq}\cdot x + \frac{d\Phi_1}{dp} = 2.\Phi_2,$$

$$\frac{d\Phi_2}{dq}\cdot x + \frac{d\Phi_2}{dp} = 3.\Phi_3, \text{ u. s. w.}$$

Man hat ferner, wovon man sich ebenfalls leicht überzeugt:

$$\frac{\frac{d\cdot\frac{d^g\Phi_m}{d^g x}}{dq}\cdot dq + \frac{d\cdot\frac{d^g\Phi_m}{dx^g}}{dp}\cdot dp}{dp} = \frac{d\cdot\frac{d^g\Phi_m}{dx^g}}{dq}\cdot x + \frac{d\cdot\frac{d^g\Phi_m}{dx^g}}{dp} = (m-g+1)\,\frac{d^g\Phi_{m+1}}{dx^g}.$$

Indem wir ferner für m und g besondere Werthe nehmen, ergeben sich hiernach die folgenden Gleichungen:

$$\frac{d\cdot\frac{d\Phi_1}{dx}}{dq}\cdot x + \frac{d\cdot\frac{d\Phi_1}{dx}}{dp} = 1\cdot\frac{d\Phi_2}{dx},$$

$$\frac{d\cdot\frac{d\Phi_2}{dx}}{dq}\cdot x + \frac{d\cdot\frac{d\Phi_2}{dx}}{dp} = 2\cdot\frac{d\Phi_3}{dx},$$

$$\frac{d\cdot\frac{d\Phi_3}{dx}}{dq}\cdot x + \frac{d\cdot\frac{d\Phi_3}{dx}}{dp} = 3\cdot\frac{d\Phi_4}{dx}, \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{d\cdot\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}}{dq}\cdot x + \frac{d\cdot\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}}{dp} = 1\cdot\frac{d^2\Phi_3}{dx^2},$$

$$\frac{d\cdot\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}}{dq}\cdot x + \frac{d\cdot\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}}{dp} = 2\cdot\frac{d^2\Phi_4}{dx^2}, \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{d\cdot\frac{d^3\Phi_3}{dx^4}}{dq}\cdot x + \frac{d\cdot\frac{d^3\Phi_3}{dx^3}}{dp} = 1\cdot\frac{d^3\Phi_4}{dx^3}, \text{ u. s. w.}$$

3. Wenn wir die Gleichungen:

$$\frac{d\Xi}{dp} = 0, \quad \frac{d^2\Xi}{dp^2} = 0, \quad \frac{d^3\Xi}{dp^3} = 0, \ldots \quad \frac{d^m\Xi}{dp^m} = 0,$$

zu denen wir in der 1. Nummer gekommen sind, entwickeln und zugleich berücksichtigen,

dass $\frac{dq}{dp} = x$, so erhalten wir nach der in der vorigen Nummer eingeführten Bezeichnung:

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \Phi_3 = 0, \ldots \quad \Phi_m = 0.$$

Also auch, wenn, für bestimmte Coordinaten Werthe, die vorstehenden m Gleichungen, zugleich mit der Gleichung der Curve (1) und der geraden Linie (2), befriedigt werden, schneidet nach der 1. Nummer diese gerade Linie die Curve immer so, dass $(m+1)$ Durchschnittspuncte in einen einzigen Punct, der jenen Coordinaten-Werthen entspricht, zusammenfallen.

4. Wenn wir ferner die Gleichung der Curve:

$$\Omega = 0 \tag{1}$$

wiederhohlt vollständig differentiiren und dabei auf die analytischen Erörterungen der 2. Nummer Rücksicht nehmen, so ergibt sich unmittelbar:

$$\Phi_1 = 0, \tag{2}$$

$$2\Phi_2 + \frac{d\Phi_1}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} = 0, \tag{3}$$

$$3\left\{2\Phi_3 + \frac{d\Phi_2}{dx} \cdot \frac{dx}{dp}\right\} + \frac{d\Phi_1}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dp^2} = 0, \tag{4}$$

$$3\left\{8\Phi_4 + 4\frac{d\Phi_3}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} + \frac{d^2\Phi_2}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2\right\} + 4\frac{d\Phi_2}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dp^2} + \frac{d\Phi_1}{dx} \cdot \frac{d^3x}{dp^3} = 0, \tag{5}$$

$$15\left\{8\Phi_5 + 4\frac{d\Phi_4}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} + \frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2\right\} + 10\left\{2\frac{d\Phi_3}{dx} + \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dp}\right\}\frac{d^2x}{dp^2}$$
$$+ 5\frac{d\Phi_2}{dx} \cdot \frac{d^3x}{dp^3} + \frac{d\Phi_1}{dx} \cdot \frac{d^4x}{dp^4} = 0, \tag{6}$$

$$15\left\{6\left[8\Phi_6 + 4\frac{d\Phi_5}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} + \frac{d^2\Phi_4}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2\right] + \frac{d^3\Phi_3}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right)^3\right\}$$
$$+ 10\left\{6\left[2\frac{d\Phi_4}{dx} + \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dp}\right]\frac{d^2x}{dp^2} + \frac{d^2\Phi_2}{dx^2}\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right)^2\right\} + 15\left\{2\frac{d\Phi_3}{dx} + \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dp}\right\}\frac{d^3x}{dp^3}$$
$$+ 6\frac{d\Phi_2}{dx} \cdot \frac{d^4x}{dp^4} + \frac{d\Phi_1}{dx} \cdot \frac{d^5x}{dp^5} = 0, \tag{7}$$

$$105\left\{6\left[8\Phi_7 + 4\frac{d\Phi_6}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} + \frac{d^2\Phi_5}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2\right] + \frac{d^3\Phi_4}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right)^3\right\}$$
$$+ 35\left\{3\left[8\frac{d\Phi_5}{dx} + 4\frac{d^2\Phi_4}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dp} + \frac{d^3\Phi_3}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2\right]\frac{d^2x}{dp^2} + 2\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right)^2\right\}$$
$$+ 35\left\{3\left[2\frac{d\Phi_4}{dx} + \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dp}\right] + \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \cdot \frac{d^2x}{dp^2}\right\}\frac{d^3x}{dp^3} + 21\left\{2\frac{d\Phi_3}{dx} + \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dp}\right\}\frac{d^4x}{dp^4}$$
$$+ 7\frac{d\Phi_2}{dx} \cdot \frac{d^5x}{dp^5} + \frac{d\Phi_1}{dx} \cdot \frac{d^6x}{dp^6} = 0. \tag{8}$$

In diesen Entwicklungen, die wir ohne Schwierigkeit weiter fortführen können, kann jeder Differential-Quotient der m. Ordnung von x durch den Differential-Quotienten der $(m+1)$. Ordnung von q ersetzt werden. Es ist:

$$\frac{d^m x}{dp^m} = \frac{d^{m+1}q}{dp^{m+1}}.$$

Einfache Puncte.

5. Wenn wir auf dem Umfange der Curve Ω einen Punct annehmen und dann für die Coordinaten-Werthe dieses Punctes nicht zugleich:

$$\frac{d\Omega}{dq} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dp} = 0.$$

so wird die Gleichung:

$$\Phi_1 = 0$$

keine identische und gibt immer für x einen einzigen, vollkommen bestimmten Werth und der auf der Curve angenommene Punct ist ein einfacher Punct. Es vereinigen sich in demselben nicht zwei verschiedene Zweige der Curve. Die Tangente in dem einfachen Puncte ist ihrerseits auch eine einfache und gewöhnliche, wenn auf ihr nur zwei Durchschnitte mit der Curve in einen Punct zusammenfallen und also nach der 3. Nummer für die Coordinaten-Werthe dieses Punctes nur die Gleichung (8), nicht aber die folgende Gleichung:

$$\Phi_2 = 0, \tag{9}$$

befriedigt wird. Besteht aber die vorstehende Gleichung (9) für dieselben Coordinaten-Werthe und den durch die Gleichung (8) bestimmten Werth von x, so fallen auf der Tangente drei Durchschnitte mit der Curve in den Berührungspunct zusammen und es ist daher diese Tangente eine dreipunctig osculirende. Sie ist eine vierpunctig osculirende, wenn zugleich mit (8) und (9) die Gleichung:

$$\Phi_3 = 0, \tag{10}$$

eine fünfpunctig osculirende, wenn, neben den bisherigen, auch noch die folgende Gleichung:

$$\Phi_4 = 0$$

befriedigt wird, und so weiter.

6. Für eine gewöhnliche Tangente gibt die Gleichung (3):

$$\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{dx}{dp} = -2\,\frac{\Phi_2}{\frac{d\Phi_1}{dp}}$$

also immer einen vollkommen bestimmten Werth, der nie verschwindet und nur mit x zugleich unendlich wird. Da aber x, wenn es unendlich ist, durch irgend eine Drehung der Curve gegen das Coordinaten-System, endlich wird, so können wir immer, unbeschadet der Allgemeinheit, von Vorne herein annehmen, es habe x einen endlichen Werth. Die vorstehenden Differential-Quotienten verschwinden aber, wenn die Tangente eine drei- oder mehrpunctig osculirende ist, weil alsdann Φ_2 verschwindet, aber, nach den Voraussetzungen zu Anfang dieser Nummer, nicht $\frac{d\Phi_1}{dx}$ und nicht, was dasselbe ist, $\frac{d\Omega}{dq}$.

Für eine dreipunctig osculirende Tangente gibt die Gleichung (4):

$$\frac{d^3q}{dp^3} = \frac{d^2x}{dp^2} = -2.3.\frac{\Phi_3}{\frac{d\Phi_1}{dx}},$$

und dieser neue Ausdruck ist ein vollkommen bestimmter und endlicher. Er verschwindet aber für eine vier- oder mehrpunctig osculirende Tangente.

Für eine vierpunctig osculirende Tangente gibt die Gleichung (5):

$$\frac{d^4q}{dq^4} = \frac{d^3x}{dp^3} = -2.3.4.\frac{\Phi_4}{\frac{d\Phi_1}{dx}},$$

und dieser Ausdruck ist endlich und bestimmt; er verschwindet nur für eine fünf- oder mehrpunctig osculirende Tangente.

Ueberhaupt ist für eine $m$punctig osculirende Tangente $\frac{d^mq}{dp^m}$ der erste Differential-Quotient von q in Beziehung auf p, welcher (wir sehen hier von $\frac{dq}{dp} \equiv x$ ganz ab) nicht verschwindet. Er ist von der m. Ordnung. Kein Differential-Quotient einer höhern Ordnung

wird alsdann unendlich. Ferner ist $\frac{d^{m-1}x}{dp^{m-1}}$ der erste Differential-Quotient von x in Beziehung auf p, welcher nicht verschwindet, und kein Differential-Quotient einer höhern Ordnung wird unendlich. Wenn m eine gerade Zahl bedeutet, so wird, wenn wir die Curve in eine solche Lage bringen, dass auch x verschwindet *), die Function q ein maximum oder minimum und die Curve liegt also ganz auf derselben Seite der Tangente. Alsdann ist x kein maximum oder minimum. Wenn hingegen m eine ungerade Zahl bedeutet, so ist, unter der obigen Bedingung, q kein maximum oder minimum: die Curve liegt zu beiden Seiten des Berührungspunctes auf entgegengesetzter Seite der Tangente, sie wird von dieser zugleich geschnitten und berührt. In diesem Falle ist x ein maximum oder minimum, das heisst, wenn wir uns die Curve durch eine sich bewegende gerade Linie umhüllt denken, so erreicht diese gerade Linie, wenn sie in die fragliche Tangente fällt, eine Gränzlage, und fängt an, wenn der Berührungspunct weiter fortrückt, in entgegengesetzten Sinne sich zu drehen.

Bedeutet also g irgend eine ganze Zahl, so ist, wenn eine Curve in einem ihrer Puncte von einer Tangente $(2g+1)$punctig osculirt wird, dieser Punct ein Wendungspunct, (Fig. 10.) was nicht der Fall ist, bei einer $2g$punctigen Osculation. (Fig. 11.)

Fig. (10. 11.)

7. Wenn wir, der Kürze halber,

$$q - xp - \gamma \equiv r$$

setzen, so ist allgemein:

$$dr = dq - xdp, \qquad d^2r = d^2q, \qquad d^3r = d^3q, \ldots \qquad d^mr = d^mq, \ldots$$

Es ist also, wenn wir vom Berührungspuncte einer $m$punctig osculirenden Tangente aus auf der Curve weiter gehen, $\frac{d^mr}{dp^m}$ der erste, nicht verschwindende Differential-Quotient von r, in Beziehung auf p. Entwickeln wir nach der Taylorschen Reihe, so kommt:

$$\Delta r = \frac{d^mr}{dp^m} \cdot \frac{(\Delta p)^m}{1.2..m} + \frac{d^{m+1}r}{dp^{m+1}} \cdot \frac{(\Delta p)^{m+1}}{1.2..(m+1)} + \cdots$$

und diese Entwicklung zeigt, dass die Ordnung der Annäherung der Curve an ihre Tangente, mit jedem neuen Durchschnittspuncte, der mit dem Berührungspuncte sich vereinigt, um eine neue Einheit steigt. Schon für den Fall einer dreipunctigen Berührung wird der Krümmungshalbmesser unendlich gross.

Doppelpuncte.

8. Wenn zugleich:

$$\frac{d\Omega}{dq} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dp} = 0, \tag{1}$$

nicht aber überdiess auch noch:

$$\frac{d^2\Omega}{dq^2} = 0, \qquad \frac{d^2\Omega}{dpdq} = 0, \qquad \frac{d^2\Omega}{dp^2} = 0,$$

so besteht die Gleichung:

$$\Phi_1 = 0$$

für jeden beliebigen Werth von x. Es fallen also, nach der 3. Nummer, auf jeder beliebigen geraden Linie, welche durch denjenigen Punct geht, dessen Coordinaten zugleich die

*) Dann ist, in dem Falle dass q und p ganze lineare Functionen bedeuten, die fragliche Tangente der geraden Linie Q parallel. In der allgemeinen Functions-Bestimmung der Note zur 1. Nummer geht diese Tangente durch den Durchschnitt der beiden geraden Linien U und W.

Gleichung der Curve und die Gleichung (1) befriedigen, in diesem Puncte zwei Durchschnitte zusammen. Ein solcher Punct heisst ein Doppelpunct.

Es gibt ferner immer zwei Werthe für x, die wir durch x_1 und x_2 unterscheiden wollen, welche die Gleichung:

$$\Phi_2 = o, \qquad (2)$$

befriedigen, so dass also auf jeder der beiden entsprechenden geraden Linien drei Durchschnittspuncte mit der Curve zusammenfallen. Diese beiden geraden Linien sind die beiden Tangenten an die beiden Zweige der Curve, welche in dem Doppelpuncte sich vereinigen. x_1 und x_2 sind reell, imaginär oder einander gleich je nachdem:

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dpdq}\right)^2 - \frac{d^2\Omega}{dq^2}\cdot\frac{d^2\Omega}{dp^2} > o, \qquad (3)$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dpdp}\right)^2 - \frac{d^2\Omega}{dq^2}\cdot\frac{d^2\Omega}{dp^2} < o, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dpdq}\right)^2 - \frac{d^2\Omega}{dq^2}\cdot\frac{d^2\Omega}{dp^2} = o. \qquad (5)$$

Dem entsprechend sind die beiden Zweige der Curve reell, imaginär, oder sie haben eine gemeinschaftliche Tangente. Den ersten dieser drei Fälle wollen wir zunächst betrachten.

9. Die Gleichung (3) der 4. Nummer, welche sich auf die vorstehende Gleichung (2) reducirt, gibt nicht mehr, wie in dem Falle eines einfachen Punctes, den Werth von $\frac{dx}{dp}$ oder $\frac{d^2q}{dp^2}$. Aber aus der Gleichung (4) der eben angezogenen Nummer ergibt sich: Fig. 12.

$$\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{dx}{dp} = -\frac{2\Phi_3}{\frac{d\Phi_2}{dx}}. \qquad (6)$$

Dieser Werth ist ein doppelter, je nachdem wir x_1 oder x_2 für x einsetzen. Er kann nicht unendlich werden, als nur zugleich mit x_1 und x_2, die wir immer, unbeschadet der Allgemeinheit, als endliche Grössen betrachten können. Denn die Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{d\Phi_2}{dx} = o,$$

bezieht sich auf den, einstweilen hier ausgeschlossenen Fall, dass die Gleichung (2) gleiche Wurzeln hat. Nachdem die beiden Werthe von x und die beiden bezüglichen Werthe von $\frac{dx}{dp}$ bestimmt worden sind, gibt die Gleichung (5) der 4. Nummer die beiden bezüglichen Werthe von $\frac{d^2x}{dp^2}$, die nie unendlich werden; und so weiter. Hiernach können wir das Fortschreiten jedes der beiden sich schneidenden Zweige, vom Doppelpuncte aus, vollständig bestimmen. (Fig. 12.)

Wenn für einen der beiden Werthe x_1 und x_2, neben der Gleichung (2), auch die folgende Gleichung: Fig. 13.

$$\Phi_3 = o, \qquad (7)$$

befriedigt wird, so verschwindet der entsprechende Werth von $\frac{dx}{dp}$ und der bezügliche Punct ist alsdann ein Wendungspunct des entsprechenden Zweiges der Curve. (Fig. 13.)

Wenn die beiden Wurzeln der Gleichung (2) zugleich Wurzeln der Gleichung (7) sind, so schneiden sich zwei solche Zweige, welche beide in ihrem Durchschnittspuncte einen Wendungspunct haben. In diesem letztern Falle gibt die Gleichung (5) der 4. Nummer: Fig. 13—14.

$$\frac{d^3q}{dp^3} = \frac{d^2x}{dp^2} = -\frac{2.3\ \Phi_3}{\frac{d\Phi_2}{dx}}.$$

Der vorstehende Ausdruck kann nie unendlich oder Null werden. Da, wie man leicht sieht, die 3. identische Gleichung der 2. Nummer zu folgender Gleichung führt:

$$\tfrac{1}{2}\ \frac{d^2\Omega}{dq^2}(x-x_1)(x-x_2) = \Phi_2,$$

so ist:

$$\frac{d\Phi_2}{dx} = \frac{d^2\Omega}{dq^2}\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

und somit erhält der Nenner des vorstehenden Ausdrucks für $\frac{d^2x}{dp^2}$, den beiden Werthen x_1 und x_2 entsprechend, die beiden gleichen und entgegengesetzten Werthe:

$$\pm\ \frac{d^2\Omega}{dq^2}\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right).$$

Je nachdem also der Werth der Function Φ_3 sein Zeichen ändert oder nicht, wenn wir nach einander x_1 und x_2 für x substituiren, haben die beiden Werthe für $\frac{d^2x}{dp^2}$ gleiches Zeichen oder nicht. In dem Falle eines gleichen Zeichens stimmen, in der Nähe des Doppelpunctes, die Zeichen der Ausdrücke:

$$\Delta x_1 = \frac{d^2x_1}{dp^2}\cdot\frac{(\Delta p)^2}{1.2} + \ldots$$
$$\Delta x_2 = \frac{d^2x_2}{dp^2}\cdot\frac{(\Delta p)^2}{1.2} + \ldots$$

überein, so dass, für die benachbarten Puncte beider Zweige, die Tangenten ihre Richtung in demselben Sinne ändern. (Fig. 14.) Wenn hingegen Φ_3 Werthe von demselben Zeichen erhält, wenn wir nach einander x_1 und x_2 für x einsetzen, so ändern, für die benachbarten Puncte der beiden Zweige, die Tangenten ihre Richtung in entgegengesetztem Sinne. (Fig. 15.)

Fig. 12—15. Es kann, im Allgemeinen, jede der beiden Tangenten, unabhängig von der andern, eine nach beliebiger Ordnung osculirende sein. Wenn x_1 die (m_1-1) Gleichungen:

$$\Phi_2 = 0, \qquad \Phi_3 = 0, \quad \ldots \qquad \Phi_{m_1} = 0,$$

und x_2 die (m_2-1) Gleichungen:

$$\Phi_2 = 0, \qquad \Phi_3 = 0, \quad \ldots \qquad \Phi_{m_2} = 0,$$

befriedigt, so ist eine der beiden Tangenten eine $m_1$punctig, die andere eine $m_2$punctig osculirende. Jeden der beiden Zweige können wir einzeln für sich verfolgen; für jeden erhalten wir bestimmte Werthe für die Differential-Quotienten der höhern Ordnungen, deren keiner unendlich wird. Bedeuten m_1 und m_2 beide gerade Zahlen, so haben die beiden Zweige die gegenseitige Lage, wie in der 12. Figur. Ist eine dieser Zahlen gerade und die andere ungerade, so ergibt sich die Lage der 13. Figur. Wenn endlich m_1 und m_2 zwei ungerade Zahlen bedeuten, gelangen wir entweder zur Lage der 14. oder 15. Figur. Welche von beiden Lagen in jedem vorliegenden Falle Statt findet, hängt davon ab, ob der Werth der Function Φ_{m_1+1} für $x=x_1$ und der Werth der Function Φ_{m_2+1} für $x=x_2$, entgegengesetzte oder gleiche Zeichen erhalten.

10. In dem Falle der Bedingung (4), wo x_1 und x_2 imaginäre Werthe erhalten, sind die beiden sich schneidenden Zweige zwar imaginär, schneiden sich aber in einem reellen Puncte. Dieser Punct ist ein isolirter, ein conjugirter Punct der Curve. Die beiden

Tangenten desselben sind imaginär. Sie können in untergeordneten Fällen osculirende sein; dann aber ist nothwendig, für beide, die Ordnung der Osculation dieselbe. Denn, wenn die Gleichungen $\Phi_2 = o$ und $\Phi_3 = o$ beide eine imaginäre Wurzel $(x_1 + x_2\sqrt{-1})$ haben, so haben auch beide die zweite imaginäre Wurzel $(x_1 - x_2\sqrt{-1})$. Die Curve hat alsdann in ihrem isolirten Puncte zwei imaginäre dreipunctig osculirenden Tangenten. Sie hat zwei imaginäre vierpunctig osculirenden Tangenten, wenn eine dieser beiden imaginären Wurzeln, und also auch die andere, überdiess noch die Gleichung $\Phi_4 = o$ befriedigen. Und so weiter.

11. Wir wenden uns nun zu demjenigen Falle, dass die Bedingungs-Gleichung:

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dpdq}\right)^2 = \frac{d^2\Omega}{dq^2} \cdot \frac{d^2\Omega}{dp^2}, \tag{5}$$

Statt findet, und also die folgenden beiden Gleichungen:

$$\Phi_2 = o, \qquad \frac{d\Phi_2}{dx} = o, \tag{8}$$

neben einander befriedigt werden. Alsdann erhält man:

$$x = -\frac{\frac{d^2\Omega}{dpdq}}{\frac{d^2\Omega}{dq^2}} = -\frac{\frac{d^2\Omega}{dp^2}}{\frac{d^2\Omega}{dpdq}}.$$

Wir wollen die verschiedenen Formen der Curve, welche diesem Falle entsprechen, nach einander discutiren.

I. In dem allgemeinen Falle, wo Φ_3 nicht verschwindet, gibt die Gleichung (4) der 4. Nummer: Fig. 16.

$$\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{dx}{dp} = -2\,\frac{\Phi_3}{\frac{d\Phi_2}{dx}} = \infty.$$

Es ist also der Krümmungshalbmesser der Curve in dem fraglichen Puncte gleich Null. Da

$$\frac{dp}{dx} = o,$$

tritt uns p als maximum oder minimum in Beziehung auf x entgegen, vorausgesetzt, dass nicht zugleich auch $\frac{d^2p}{dx^2}$ verschwindet. Dass diess niemals geschieht, ist leicht zu zeigen, wenn wir vorerst $\frac{d\Phi_2}{dx}$ noch nicht verschwinden lassen. Denn man hat überhaupt:

$$\frac{d^2x}{dp^2} = -\left(\frac{dx}{dp}\right)^3 \frac{d^2p}{dx^2},$$

mithin ist:

$$\frac{d\Phi_2}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dp^2} = 2\Phi_3 \left(\frac{dx}{dp}\right)^2 \frac{d^2p}{dx^2}.$$

Hiernach gibt die Gleichung (5) der eben angezogenen Nummer, wenn wir alle Glieder derselben durch $\left(\frac{dx}{dp}\right)^2$ dividiren, und nach der Division $\frac{dp}{dx}$ gleich Null setzen:

$$8\Phi_3 \frac{d^2p}{dx^2} + 3\frac{d^2\Phi_2}{dx^2} = o,$$

also für den zu bestimmenden Differential-Quotienten immer einen vollkommen bestimmten und endlichen Werth. Während also x, wodurch die Richtung der, die Curve umhüllenden

geraden Linie bestimmt wird, continuirlich wächst, erreicht, im fraglichen Puncte, p ein maximum oder minimum: es bildet die Curve eine Spitze erster Art. (Fig. 16.)

II. In dem untergeordneten Falle, dass zugleich

$$\Phi_2 = 0, \qquad \Phi_3 = 0, \qquad \frac{d\Phi_2}{dx} = 0, \tag{9}$$

fallen, nach der 3. Nummer, auf der Tangente im fraglichen Puncte, nicht wie im Allgemeinen, bloss drei, sondern vier Durchschnitte mit der Curve zusammen. Man findet:

$$\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{dx}{dp} = -\frac{2 \cdot \Phi_3}{\frac{d\Phi_2}{dx}} = \frac{0}{0},$$

und wenn man, um den wahren Werth zu erhalten, Nenner und Zähler vollständig differentiirt, indem man x, q und p sich ändern lässt, so kommt:

$$\frac{dx}{dp} = -2 \cdot \frac{4\Phi_4 + \frac{d\Phi_3}{dx} \cdot \frac{dx}{dp}}{2 \cdot \frac{d\Phi_3}{dx} + \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dp}}.$$

Folglich erhalten wir zur Bestimmung der beiden Werthe von $\frac{dx}{dp}$ oder $\frac{d^2q}{dp^2}$ die nachstehende quadratische Gleichung:

$$\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + 4\frac{d\Phi_3}{dx}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 8\Phi_4 = 0, \tag{10}$$

die auch unmittelbar aus der Gleichung (5) der 4. Nummer hervorgeht, wenn wir auf die erste und letzte der drei Bedingungs-Gleichungen (9) Rücksicht nehmen. Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind reell, imaginär oder einander gleich, je nachdem der folgende Ausdruck:

$$\left(\frac{d\Phi_3}{dx}\right)^2 - 2\frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \cdot \Phi_4$$

positiv, oder negativ ist, oder verschwindet. Diess führt zu der nachstehenden dreifachen Unterscheidung.

Fig. 17—18. *a.* Es berühren sich zwei reelle Zweige in dem fraglichen Puncte. Die geraden Linien, welche, während ihrer Bewegung die beiden Zweige umhüllen, fallen für diesen Punct in die gemeinschaftliche Tangente zusammen. Die beiden Krümmungshalbmesser sind verschieden. Je nachdem die Werthe von $\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}$ und Φ_4 im Zeichen übereinstimmen oder nicht, stimmen auch die beiden Werthe von $\frac{d^2q}{dp^2}$ im Zeichen überein oder nicht, und es liegen die beiden Zweige der Curve auf derselben (Fig. 17.) oder auf entgegengesetzter Seite (Fig. 18.) ihrer gemeinschaftlichen Tangente. Die Differential-Quotienten höherer Ordnung können nicht unendlich werden; sie bestimmen sich ohne Schwierigkeit für jeden der beiden Werthe von $\frac{d^2q}{dp^2}$, so dass wir den Lauf jedes der beiden Zweige für sich analytisch verfolgen können.

b. Es berühren sich zwei imaginäre Zweige in einem reellen Puncte.

Fig. 19. *c.* Wenn die beiden Wurzeln der Gleichung (10) einander gleich sind, ergibt sich:

$$\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{dx}{dp} = -2 \cdot \frac{\frac{d\Phi_3}{dx}}{\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}} = -4 \cdot \frac{\Phi_4}{\frac{d\Phi_3}{dx}}. \tag{11}$$

Die Krümmungshalbmesser für beide Zweige sind endlich und einander gleich. Der Differential-Quotient $\frac{d^3q}{dp^3}$ wird hier, im Allgemeinen, unendlich gross. Denn, wenn wir zu der Gleichung (6) der 4. Nummer zurückgehen, findet sich für den vorliegenden Fall:

$$2\left\{2\cdot\frac{d\Phi_3}{dx}+\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}\cdot\frac{d^2q}{dp^2}\right\}\frac{d^3q}{dp^3}+3\cdot\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)^2+12\cdot\frac{d\Phi_4}{dx}\cdot\frac{d^2q}{dp^2}+24\Phi_5=o, \qquad (12)$$

in welcher, in Folge der Gleichung (11), der Coefficient des fraglichen Differential-Quotienten verschwindet. Da $\frac{dx}{dp}$ einer endlichen Grösse gleich ist, ist x weder ein maximum oder minimum in Beziehung auf p, noch p in Beziehung auf x. So lange die umhüllende gerade Linie in demselben Sinne sich dreht, rückt auf ihr der Berührungspunct nach derselben Richtung fort, und in dem fraglichen Puncte muss die umhüllende gerade Linie in entgegengesetztem Sinne sich zu drehen anfangen, wenn der Berührungspunct umkehren soll. Da aber

$$\frac{1}{\frac{d^3q}{dp^3}}\equiv\frac{dp}{d\cdot\frac{d^2q}{dp^2}}=o,$$

und also auch, indem wir mit $\frac{dx}{dp}$ multipliciren:

$$\frac{dx}{d\cdot\frac{d^2q}{dp^2}}=o,$$

so wird, im Allgemeinen, p sowohl als x ein maximum oder minimum in Beziehung auf $\frac{d^2q}{dp^2}$. In dem fraglichen Puncte erreicht sowohl der, die Curve beschreibende Punct, als die, dieselbe umhüllende gerade Linie eine Gränzlage, während der Krümmungshalbmesser continuirlich wächst oder abnimmt. Der fragliche Punct ist eine Spitze zweiter Art. (Fig. 19.)

Ein untergeordneter Fall ist hier derjenige, dass zugleich mit den Gleichungen (10) und (11) die nachstehende Gleichung befriedigt wird:

$$\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2+4\cdot\frac{d\Phi_4}{dx}\left(\frac{dx}{dp}\right)+8\Phi_5=o. \qquad (13)$$

Dann wird, nach der Gleichung (12), der Werth des Differential-Quotienten $\frac{d^3q}{dp^3}$ nicht mehr unendlich, sondern erscheint unter der Form $\frac{0}{0}$. Gehen wir aber zur Gleichung (7) der 4. Nummer zurück, so fallen für den vorliegenden Fall aus dieser Gleichung die Differential-Quotienten höherer Ordnung aus, und wir erhalten die folgende quadratische Gleichung zur Bestimmung von $\frac{d^3q}{dp^3}$:

$$\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}\left(\frac{d^3q}{dp^3}\right)^2+6\left\{\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\cdot\frac{d^2q}{dp^2}+2\cdot\frac{d\Phi_4}{dx}\right\}\left(\frac{d^3q}{dp^3}\right)$$
$$+\left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{d^3\Phi_3}{dx^3}\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)^3+9\,\frac{d^2\Phi_4}{dx^2}\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)^2+36\cdot\frac{d\Phi_5}{dx}\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)^2+72\Phi_6\right\}=o. \qquad (14)$$

Es treten uns hier wiederum drei verschiedene Fälle entgegen.

α. Wenn die Wurzeln der vorstehenden Gleichung beide reell sind, so hat die Curve zwei Zweige, die sich nicht bloss im fraglichen Puncte berühren, sondern dreipunctig osculiren und also zugleich sich schneiden. Mit der gemeinschaftlichen Tangente haben Fig. 20.

sie ihren einfachen Contact behalten. Weil $\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}$ oder $\frac{d^2\Omega}{dp^2}$ nach unsern Voraussetzungen **nicht** verschwindet, kann keine der beiden Wurzeln der vorstehenden Gleichung (14) unendlich werden. Wird, durch das Verschwinden des letzten Gliedes dieser Gleichung, eine der beiden Wurzeln gleich Null, so wird, da alsdann $d\cdot\frac{d^2q}{dp^2}=o$, der Krümmungshalbmesser des bezüglichen Zweiges ein maximum oder minimum, oder, mit andern Worten, dieser Zweig der Curve wird von einem Kreise nicht bloss **drei-** sondern **vierpunctig** osculirt. Ueberhaupt bestimmt das Zeichen der beiden Wurzeln der letzten Gleichung die Lage der beiden Zweige der Curve gegen den Osculations-Kreis im fraglichen Puncte, und je nachdem das Zeichen übereinstimmt oder nicht, wächst, vom Osculationspuncte aus, der Krümmungshalbmesser für die beiden Zweige nach derselben Richtung hin oder nach entgegengesetzter. Jeden dieser Zweige können wir, für sich allein, weiter verfolgen, weil die Differential-Quotienten höherer Ordnung, die jedem der beiden Werthe von $\frac{d^3q}{dp^3}$ entsprechen, endlich sind und ohne Schwierigkeit sich ergeben. (Fig. 20.)

β. Imaginären Wurzeln der Gleichung (14) entspricht ein isolirter Punct, in welchem zwei imaginäre Zweige sich **dreipunctig osculiren**.

γ. In dem Falle gleicher Wurzeln der Gleichung (14) besteht neben dieser Gleichung auch noch die folgende, welche man durch Differentiation unmittelbar erhält:

$$\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}\cdot\frac{d^3q}{dp^3}+3\left\{\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\cdot\frac{d^2q}{dp^2}+2\cdot\frac{d\Phi_4}{dx}\right\}=o. \tag{15}$$

Als Folge dieser neuen Bedingungs-Gleichung gibt die Gleichung (8) der 4. Nummer, aus welcher schon, nach den frühern Bedingungs-Gleichungen, $\frac{d^5q}{dp^5}$, $\frac{d^6q}{dp^6}$ und $\frac{d^7q}{dp^7}$ ausfalllen, für $\frac{d^4q}{dp^4}$ im Allgemeinen einen unendlichen Werth. Die Curve hat wiederum in dem fraglichen Puncte eine **Spitze zweiter Art**, die sich von den unter *c.* betrachteten dadurch unterscheidet, dass die beiden Zweige, von welchen sie gebildet wird, unter einander einen innigern Contact haben, als mit dem gemeinschaftlichen Osculations-Kreise und also in der Nähe des fraglichen Punctes ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des Kreises fallen.

In dem untergeordneten Falle, dass, neben den bisherigen Bedingungs-Gleichungen, auch noch die folgende, die in Beziehung auf $\frac{d^3q}{dp^3}$ vom zweiten Grade ist, besteht:

$$2\,\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\left(\frac{d^3q}{dp^3}\right)^2+3\left\{\frac{d^3\Phi_3}{dx^3}\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)+4\cdot\frac{d^2\Phi_4}{dx^2}\cdot\frac{d^2q}{dp^2}+8\cdot\frac{d\Phi_5}{dx}\right\}\frac{d^3q}{dp^3}$$
$$+\,3\left\{\frac{d^3\Phi_4}{dx^3}\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)^3+6\left[\frac{d^2\Phi_5}{dx^2}\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)^2+4\,\frac{d\Phi_6}{dx}\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)+8\Phi_7\right]\right\}=o,$$

stellt sich der Werth für $\frac{d^4q}{dp^4}$ nach der Gleichung (8) der 4. Nummer wiederum unter der Form $\frac{0}{0}$ dar, und erhält einen doppelten Werth. Im Allgemeinen osculiren sich zwei Zweige der Curve in dem fraglichen Puncte **vierpunctig**. Aber in weitere Unterscheidungen hier einzugehen, würde überflüssig sein.

Fig. 21. **III.** Wenn zugleich

$$\Phi_2=o,\qquad \Phi_3=o,\qquad \Phi_4=o,\qquad \frac{d\Phi_2}{dx}=o, \tag{16}$$

so folgt zuvörderst aus der 3. Nummer, dass auf der Tangente in dem fraglichen Puncte fünf Durchschnitte mit der Curve zusammenfallen. Nachdem $\varkappa$ bestimmt worden ist, gibt die Gleichung (5) der 4. Nummer für den in Rede stehenden Fall:

$$\frac{d\varkappa}{dp}\left\{\frac{d^2\Phi_2}{d\varkappa^2}\cdot\frac{d\varkappa}{dp}+4\,\frac{d\Phi_3}{d\varkappa}\right\}=o. \tag{17}$$

Es ist also ein Werth von $\frac{d\varkappa}{dp}$ oder $\frac{d^2q}{dp^2}$ endlich, während der andere verschwindet. Die Gleichung (6) der eben angezogenen Nummer gibt für $\frac{d^2\varkappa}{dp^2}$ oder $\frac{d^3q}{dp^3}$ endliche Werthe; derjenige, welcher $\frac{d\varkappa}{dp}$ entspricht, ist:

$$\frac{d^2\varkappa}{dp^2}=-\frac{6\Phi_5}{\frac{d\Phi_3}{d\varkappa}}.$$

Es berühren sich also in dem fraglichen Puncte zwei solche Zweige der Curve, von welchen einer im Berührungspuncte einen Wendungspunct hat. Jeden Zweig können wir für sich weiter verfolgen. (Fig. 21.)

IV. Wenn zugleich

$$\Phi_2=o,\qquad \Phi_3=o,\qquad \Phi_4=o,\qquad \frac{d\Phi_2}{d\varkappa}=o,\qquad \frac{d\Phi_3}{d\varkappa}=o, \tag{18}$$

so zeigt die Gleichung (17), dass alsdann die Werthe von $\frac{d\varkappa}{dp}$ beide zugleich verschwinden. Für beide Zweige ist der Krümmungshalbmesser unendlich. Die Gleichung (6) der 4. Nummer gibt, nach Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichungen (18):

$$\left\{\frac{d^2\Phi_2}{d\varkappa^2}\cdot\frac{d\varkappa}{dp}+2\cdot\frac{d\Phi_3}{d\varkappa}\right\}\frac{d^2\varkappa}{dp^2}+12\Phi_5=o,$$

und da der Coefficient von $\frac{d^2\varkappa}{dp^2}$ verschwindet, für diesen Differential-Quotienten einen unendlichen Werth. Die Curve hat eine Spitze erster Art.

V. Wenn zugleich

$$\Phi_2=o,\qquad \Phi_3=o,\qquad \Phi_4=o,\qquad \Phi_5=o,\qquad \frac{d\Phi_2}{d\varkappa}=o,$$

so fallen auf der Tangente in dem fraglichen Puncte sechs Durchschnitte mit der Curve zusammen. Wie unter III. erhalten wir für $\frac{d\varkappa}{dp}$ oder $\frac{d^2q}{dp^2}$ zwei Werthe, von welchen einer verschwindet. Die Gleichung (6) der 4. Nummer gibt für den vorliegenden Fall:

$$2\left\{\frac{d^2\Phi_2}{d\varkappa^2}\,\frac{d\varkappa}{dp}+2\,\frac{d\Phi_3}{d\varkappa}\right\}\frac{d^2\varkappa}{dp^2}+3\left\{\frac{d^2\Phi_3}{d\varkappa^2}\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right)+4\,\frac{d\Phi_4}{d\varkappa}\right\}\frac{d\varkappa}{dp}=o,$$

und zeigt, dass dem endlichen Werthe von $\frac{d\varkappa}{dp}$ ein endlicher Werth von $\frac{d^2\varkappa}{dp^2}$ und dem verschwindenden Werthe von $\frac{d\varkappa}{dp}$ ein verschwindender Werth von $\frac{d^2\varkappa}{dp^2}$ entspricht. Die Gleichung (7) der 4. Nummer gibt hiernach immer zwei endliche Werthe für den Differential-Quotienten $\frac{d^3\varkappa}{dp^3}$ oder $\frac{d^4q}{dp^4}$. Derjenige namentlich, welcher dem verschwindenden Werthe von $\frac{d^2\varkappa}{dp^2}$ entspricht, ist:

$$\frac{d^4q}{dp^4}=\frac{d^3\varkappa}{dp^3}=-\frac{24\Phi_6}{\frac{d\Phi_3}{d\varkappa}}.$$

Es berühren sich also zwei solche Zweige der Curve, von welchen einer mit der gemeinschaftlichen Tangente einen vierpunctigen und der andere einen gewöhnlichen Contact hat.

VI. Wenn zugleich

$$\Phi_2 = 0, \qquad \Phi_3 = 0, \qquad \Phi_4 = 0, \qquad \Phi_5 = 0, \qquad \frac{d\Phi_2}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Phi_3}{dx} = 0,$$

so verschwinden zuvörderst wie unter IV. beide Werthe des Differential-Quotienten $\frac{dx}{dp}$. Die Gleichung (6) der 4. Nummer verliert hier ihre Bedeutung; die folgende Gleichung dieser Nummer gibt aber folgende quadratische Gleichung:

$$\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right)^2 + 12\,\frac{d\Phi_4}{dx}\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right) + 72\Phi_6 = 0, \tag{19}$$

zur Bestimmung der Werthe der Differential-Quotienten $\frac{d^2x}{dp^2}$ oder $\frac{d^3q}{dp^3}$.

Fig. 22—23. *a.* In dem Falle zweier reellen und verschiedenen Wurzeln der vorstehenden Gleichung berühren sich zwei Zweige der Curve, welche beide im Berührungspuncte einen Wendungspunct haben. Es werden beide von ihrer gemeinschaftlichen Tangente dreipunctig osculirt. Je nachdem die Werthe von $\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}$ und Φ_6 übereinstimmen oder nicht, haben die beiden Zweige, die in der 22. oder 23. Figur angezeigte Lage.

b. Imaginären Wurzeln entsprechen zwei imaginäre Zweige, welche nicht nur einander, sondern auch eine reelle gerade Linie in einem reellen Puncte dreipunctig osculiren.

c. Wenn insbesondere:

$$\left(\frac{d\Phi_4}{dx}\right)^2 - 2\cdot\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}\cdot\Phi_6 = 0,$$

so sind die beiden Wurzeln der Gleichung (19) einander gleich, und zugleich mit ihr besteht auch die folgende Gleichung:

$$\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right) + 6\,\frac{d\Phi_4}{dx} = 0.$$

Es gibt uns aber die Gleichung (8) der 4. Nummer, wenn wir die obigen Bedingungs-Gleichungen berücksichtigen, zur Bestimmung des Differential-Quotienten $\frac{d^3x}{dp^3}$ überhaupt:

$$\left\{\frac{d^2\Phi_2}{dx^2}\cdot\frac{d^2x}{dp^2} + 6\,\frac{d\Phi_4}{dx}\right\}\frac{d^3x}{dp^3} + 2\left\{\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\left(\frac{d^2x^2}{dp^2}\right) + 12\cdot\frac{d\Phi_5}{dx}\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right) + 72\Phi_7\right\} = 0,$$

woraus ersichtlich ist, dass, im vorliegenden Falle, der Werth des Differential-Quotienten $\frac{d^3x}{dp^3}$ unendlich wird. Die Curve hat eine Spitze zweiter Art, die von solchen zwei Zweigen gebildet wird, welche mit ihrer gemeinschaftlichen Tangente einen Contact der zweiten Ordnung haben. Nur in dem untergeordneten Falle, dass, neben der Gleichung (19), auch noch die folgende besteht:

$$\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right)^2 + 12\cdot\frac{d\Phi_5}{dx}\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right) + 72\Phi_7 = 0,$$

stellt sich der Werth von $\frac{d^3x}{dp^3}$ unter der Form $\frac{0}{0}$ dar und ist ein zwiefacher. Dann erhalten wir wiederum eine dreifache Unterscheidung:

α. **Zwei reelle Zweige berühren sich unter einander vierpunctig und ihre gemeinschaftliche Tangente dreipunctig.**

β. **Die beiden Zweige sind imaginär.**

γ. Die Curve bildet, im Allgemeinen, eine Spitze zweiter Art.

Wenn wir fortführen, erhielten wir neue untergeordneten Fälle. —

12. Indem wir zusammenfassen und verallgemeinern, gelangen wir zu der nachstehenden Unterscheidung aller verschiedenen Arten von Doppelpuncten, die nicht zwei verschiedene, reelle oder imaginäre, Tangenten haben.

Wenn für einen Punct der Curve, welcher ein Doppelpunct ist, die Functionen

$$\Phi_2, \quad \Phi_3, \quad \Phi_4, \quad . \; . \; . \quad \Phi_n$$

und zugleich mit ihnen die Functionen

$$\frac{d\Phi_2}{dx}, \quad \frac{d\Phi_3}{dx}, \quad \frac{d\Phi_4}{dx}, \quad . \; . \; . \quad \frac{d\Phi_m}{dx},$$

verschwinden, und wir voraussetzen, es sei

$$2m < n + 2,$$

so berühren sich zwei reelle Zweige der Curve in dem fraglichen Doppelpuncte. Von diesen beiden Zweigen hat einer mit der gemeinschaftlichen Tangente einen $m$punctigen und der andere einen $(n+1-m)$punctigen Contact.

Wenn n eine gerade Zahl bezeichnet und

$$2m = n + 2,$$

genommen wird, so bilden in dem fraglichen Puncte zwei Zweige der Curve eine Spitze erster Art. Wenn $n=2$, so ist der Krümmungshalbmesser gleich Null, er ist unendlich gross, wenn $n>2$. Ueberhaupt ist die Ordnung der Annäherung der Curve an ihre Tangente im fraglichen Puncte $\frac{n-1}{2}$, in der Art, dass, wenn man irgend zwei Curven beschreibt, welche auf derselben Seite der Tangente, mit dieser bezüglich einen $\frac{n}{2}$punctigen und $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-punctigen Contact haben, einer der beiden Zweige, welche die Spitze bilden, zwischen diesen beiden neuen Curven liegt. Man könnte sagen, der Contact sei ein $\left(\frac{n+1}{2}\right)$punctiger, indem man von den $(n+1)$ Durchschnittspuncten, welche auf der Tangente im fraglichen Puncte zusammenfallen, die Hälfte auf jeden der beiden die Spitze bildenden Zweige rechnet.

Wenn n eine ungerade Zahl bezeichnet und

$$2m = n + 1$$

genommen wird, so hat, im Allgemeinen, die Curve zwei Zweige, die sich in dem fraglichen Puncte berühren und beide mit der gemeinschaftlichen Tangente einen $\left(\frac{n+1}{2}\right)$punctigen Contact haben. Unter sich haben die beiden Zweige einen Contact, der, im Allgemeinen, von gleicher Ordnung ist, in untergeordneten Fällen aber zu einer höhern beliebig ansteigen kann. Welches auch diese Ordnung sein mag, es können die beiden Zweige sowohl imaginär als auch reell sein. Im ersten Falle bilden sie bloss einen conjugirten reellen und isolirten Punct, in der Art, dass, wie in dem Falle reeller Zweige, auf jeder durch denselben gehenden geraden Linie zwei und auf einer einzigen vollkommen bestimmten Linie $(n+1)$ Durchschnitte in diesem Puncte zusammenfallen. In dem Uebergangs-Falle von zwei reellen und zwei imaginären Zweigen, fallen, von den vier Erstreckungen der Curve von dem Berührungspuncte aus, zwei fort und die beiden übrigbleibenden bilden eine Spitze zweiter Art. Es steigt hierbei zugleich die Ordnung des Contactes der beiden Zweige unter sich um eine halbe Einheit. Wenn nemlich zwei reelle Zweige sich $h$punctig osculiren, wobei wir durch h irgend eine ganze Zahl bezeichnen, die grösser ist als $(n+1)$, so fallen auf einer beliebigen, jeden dieser beiden Zweige ebenfalls $h$punctig osculirenden Curve im Osculationspuncte $2h$

Durchschnitte zusammen. (Diese osculirende Curve ist auch dann reell, wenn die beiden Zweige imaginär sind.) Bei dem Uebergange von zwei reellen zu zwei imaginären Zweigen ergeben sich $(2h+1)$ zusammenfallende Durchschnittspuncte und wir können uns des Ausdrucks bedienen, dass die osculirende Curve mit jedem der beiden, die Spitze zweiter Art bildenden Zweige einen $(h+\frac{1}{2})$punctigen Contact habe. Das ist also auch die Ordnung des Contactes der beiden Zweige unter sich. Die Ordnung der Annäherung der beiden Zweige an ihre gemeinschaftliche Tangente kann jede beliebige ganze Zahl $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ sein und, unabhängig hiervon, die Ordnung der Annäherung der beiden Zweige an einander jedes ungerade Vielfache von $\frac{1}{2}$, das grösser ist als $\left(\frac{n-1}{2}\right)$. Wenn die Ordnung der Annäherung der beiden Zweige unter sich, wie es im Allgemeinen der Fall ist, nur um eine halbe Einheit höher ist, als die Ordnung ihrer beiderseitigen Annäherung an ihre gemeinschaftliche Tangente, so gibt es eine, diese Tangente $\left(\frac{n+1}{2}\right)$punctig osculirende Parabel der $\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Ordnung, auf deren entgegengesetzten Seiten vom Scheitel aus, die beiden die Spitze bildenden Zweige sich erstrecken. In dem Falle, wo $n=3$, kann ein Kreis, der Krümmungs-Kreis, diese Parabel ersetzen. In diesem Falle ist der Krümmungshalbmesser in dem fraglichen Puncte einer endlichen Grösse gleich und continuirlich wächst er oder nimmt er ab, wenn wir, die Spitze überschreitend, von einem Zweige auf den andern übergehen. Wenn $n \gtreqless 5$, so wird der Krümmungshalbmesser unendlich.

Wenn endlich:

$$2m > n + 1,$$

so erhalten wir, wenn n eine gerade Zahl bedeutet, eine Spitze erster Art und wenn n ungerade ist, zwei reelle oder imaginäre Zweige, die ihre gemeinschaftliche Tangente $\left(\frac{n+1}{2}\right)$punctig osculiren, und deren gegenseitige Annäherung nie von einer höhern Ordnung ist, als die Annäherung an ihre gemeinschaftliche Tangente *), und eine Spitze zweiter Art kann hier nicht Statt finden.

Dreifache Puncte.

13. Wenn zugleich:

$$\frac{d\Omega}{dq} = o, \qquad \frac{d\Omega}{dp} = o,$$

$$\frac{d^2\Omega}{dq^2} = o, \qquad \frac{d^2\Omega}{dpdq} = o, \qquad \frac{d^2\Omega}{dp^2} = o,$$

nicht aber die partiellen Differential-Coefficienten der dritten Ordnung alle vier zugleich ver-

---

*) Wenn unter II. auch noch $\frac{d\Phi_3}{dx}$ verschwindet, so sind die beiden Werthe, welche die Gleichung (10) für $\left(\frac{dx}{dp}\right)$ gibt, gleich und von entgegengesetztem Zeichen, und sie können nur mit Φ_4 zugleich verschwinden. Ebenso, wenn unter VI. auch noch $\frac{d\Phi_4}{dx}$ verschwindet, sind die Werthe, welche die Gleichung (19) für $\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right)$ gibt, gleich und von entgegengesetztem Zeichen, und verschwinden nur zugleich mit Φ_6.

schwinden, so ist für jeden Werth von x

$$\Phi_1 \equiv o, \qquad \Phi_2 \equiv o,$$

und es fallen also, nach der 3. Nummer auf jeder durch den bezüglichen Punct gehenden geraden Linie drei Durchschnitte mit der Curve zusammen. Der Punct ist ein dreifacher Punct der Curve. Die beiden vorstehenden identischen Gleichungen bringen natürlich die folgenden mit sich:

$$\frac{d\Phi_1}{dx} \equiv o, \qquad \frac{d\Phi_2}{dx} \equiv o, \qquad \frac{d^2\Phi_2}{dx^2} \equiv o.$$

Hiernach reducirt sich die Gleichung (4) der 4. Nummer auf:

$$\Phi_3 = o, \tag{1}$$

und gibt, wenn wir sie in Beziehung auf x auflösen, drei verschiedene Werthe. Diese Werthe bestimmen die Richtung der drei Tangenten des dreifachen Punctes, von denen jede, weil sie in diesem Puncte einen Zweig berührt und die beiden andern schneidet, mit der Curve vier zusammenfallende Puncte gemein hat. Es tritt uns hier eine vierfache Unterscheidung entgegen.

1) Die Werthe von x sind alle drei reell und verschieden;

2) zwei dieser drei Werthe sind imaginär;

3) zwei Werthe sind einander gleich, in welchem Falle die beiden folgenden Gleichungen zugleich befriedigt werden:

$$\Phi_3 = o, \qquad \frac{d\Phi_3}{dx} = o;$$

4) alle drei Werthe von x sind einander gleich, in welchem Falle die drei folgenden Gleichungen zugleich bestehen:

$$\Phi_3 = o, \qquad \frac{d\Phi_3}{dx} = o, \qquad \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} = o.$$

14. In dem Falle, dass die drei Wurzeln der Gleichung (1) alle drei reell und verschieden sind, gibt die Gleichung (5) der 4. Nummer:

$$\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{dx}{dp} = -\frac{2\Phi_4}{\frac{d\Phi_3}{dx}}, \tag{2}$$

und somit, den drei Werthen von x entsprechend, drei Werthe für den Differential-Quotienten $\frac{dx}{dp}$, von denen keiner unendlich werden kann. Die Gleichung (6) der eben angezogenen Nummer, welche hier in die nachstehende sich vereinfacht:

$$4\cdot\frac{d\Phi_3}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dp^2} + 3\left\{\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + 4\cdot\frac{d\Phi_4}{dx}\cdot\frac{dx}{dp} + 8\Phi_5\right\} = o, \tag{3}$$

gibt hiernach die drei Werthe des Differential-Quotienten der folgenden Ordnung und so fort. Keiner dieser Differential-Quotienten kann unendlich werden. Auf diesem Wege können wir die drei Zweige der Curve, welche in dem dreifachen Puncte sich schneiden, jeden für sich, unabhängig von den beiden andern, von dem gemeinsamen Durchschnitte aus verfolgen. Jeder der drei reellen Zweige kann in dem dreifachen Puncte eine nach beliebiger Ordnung osculirende Tangente haben, und ähnlich, wie in der 9. Nummer in Beziehung auf Doppelpuncte, ergibt sich hier sogleich das folgende Resultat. Wenn eine der drei Wurzeln der Gleichung (1) zugleich auch eine Wurzel der folgenden Gleichungen ist:

$$\Phi_4 = o, \qquad \Phi_5 = o, \qquad \Phi_{m_1} = o,$$

wenn eine zweite Wurzel die Gleichungen:

$$\Phi_4 = o, \qquad \Phi_5 = o, \qquad \Phi_{m_2} = o,$$

und endlich die dritte Wurzel die folgenden Gleichungen:

$$\Phi_4 = 0, \qquad \Phi_5 = 0, \qquad \Phi_{m_3} = 0,$$

befriedigt, so haben die entsprechenden drei Zweige in dem fraglichen dreifachen Puncte bezüglich eine (m_1-1)punctig, eine (m_2-1)punctig und eine (m_3-1)punctig osculirende Tangente. —

15. In dem Falle zweier imaginären Wurzeln der Gleichung (1), entspricht diesen ein conjugirter Punct der Curve, welcher für die Anschauung verschwindet, weil er in einen reellen, der dritten Wurzel entsprechenden, Zweig der Curve fällt. Dieser Zweig kann in dem conjugirten Puncte insbesondere auch eine osculirende Tangente haben. —

Fig. 24—26. 16. Wenn zwei Wurzeln der Gleichung (1) einander gleich sind, und für diese also die beiden Gleichungen:

$$\Phi_3 = 0, \qquad \frac{d\Phi_3}{dx} = 0, \tag{2}$$

befriedigt werden, so haben zwei der drei im dreifachen Puncte sich vereinigenden Zweige eine gemeinschaftliche Tangente. Der dreifache Punct entsteht, indem durch einen Doppelpunct mit zusammenfallenden Tangenten ein dritter Zweig der Curve hindurchgeht. Dieser Doppelpunct kann von irgend einer derjenigen Arten sein, die wir als überhaupt möglich in der 11. Nummer unterschieden haben, und auch der dritte Zweig kann, unabhängig hiervon, in dem fraglichen Puncte eine mehrpunctig osculirende Tangente haben. Nur wenige nähere Andeutungen füge ich in der Absicht hinzu, um darzuthun, dass auch hier die analytische Discussion des Laufes der Curve, von ihrem dreifachen Puncte aus, keine Schwierigkeit darbietet.

Die Gleichung (2) der 14. Nummer zeigt, dass, so lange Φ_4 für die beiden gleichen Wurzeln nicht verschwindet, der diesen entsprechende Differential-Quotient $\frac{dx}{dp}$ unendlich wird. Mit ihm werden alle folgenden Differential-Quotienten unendlich. Wenn Φ_4 auch für die dritte Wurzel der Gleichung (1) nicht verschwindet, so erhält für den dritten Zweig $\frac{dx}{dp}$ ebenfalls einen endlichen Werth. Es fällt alsdann eine Spitze erster Art in einen gewöhnlichen Punct eines Zweiges der Curve. Ob die Spitze auf der convexen (Fig. 24.) oder der concaven (Fig. 25.) Seite des dritten Zweiges steht, können wir auch aus der analytischen Bezeichnung erkennen. Wie in der 11. Nummer unter I. erhalten wir, den beiden gleichen Wurzeln entsprechend,

$$\frac{dp}{dx} = 0, \qquad 8\Phi_4 \cdot \frac{d^2p}{dx^2} + 3\,\frac{d^2\Phi_3}{dx^2} = 0,$$

und p ist also ein maximum oder minimum, je nachdem Φ_4 und $\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}$ für diese Wurzeln im Zeichen übereinstimmen oder nicht. Wenn der dritte Zweig in dem Falle eines maximum seine convexe, in dem Falle eines minimum seine concave Seite der Linie P zukehrt, erhalten wir die Lage der 24., sonst die Lage der 25. Figur. Wenn für den dritten Zweig Φ_4 verschwindet, erhält dieser einen Wendungspunct, auf welchem die Spitze steht (Fig. 26.).

Wenn für die beiden gleichen Wurzeln zugleich die drei Gleichungen:

$$\Phi_3 = 0, \qquad \Phi_4 = 0, \qquad \frac{d\Phi_3}{dx} = 0,$$

bestehen, so berühren sich zwei Zweige der Curve und ein dritter Zweig geht durch ihren Berührungspunct. Jene beiden Zweige können reell oder imaginär sein, oder eine Spitze

zweiter Art bilden, je nachdem die beiden Werthe des Differential-Quotienten $\frac{dx}{dp}$ reell, imaginär oder einander gleich sind. Zur Bestimmung derselben reducirt sich die Gleichung (6) der 4. Nummer auf folgende:

$$\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + 4\cdot\frac{d\Phi_4}{dx}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 8\Phi_5 = 0. \tag{4}$$

Wenn, was den Fall zweier gleichen Wurzeln anzeigt, zugleich mit dieser Gleichung die folgende besteht:

$$\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 2\,\frac{d\Phi_4}{dx} = 0, \tag{5}$$

so gibt die Gleichung (7) der 4. Nummer für $\frac{d^2x}{dp^2}$ einen unendlichen Werth, denn allgemein hat man:

$$4\left\{\frac{d^2\Phi_3}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dp} + 2\cdot\frac{d\Phi_4}{dx}\right\}\frac{d^2x}{dp^2} + \left\{\frac{d^3\Phi_3}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right)^3 + 6\cdot\frac{d^2\Phi_4}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + 24\cdot\frac{d\Phi_5}{dx}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 48\Phi_6\right\} = 0.$$

Hier ergibt sich die eben schon erwähnte Spitze zweiter Art. Wenn aber zugleich mit den beiden vorletzten Gleichungen auch noch die folgende besteht:

$$\frac{d^3\Phi_3}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right)^3 + 6\cdot\frac{d^2\Phi_4}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + 24\cdot\frac{d\Phi_5}{dx}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 48\Phi_6 = 0,$$

so erscheint der Werth des Differential-Quotienten $\frac{d^2x}{dp^2}$ unter der Form $\frac{0}{0}$. Zur Bestimmung desselben müssen wir uns alsdann zur Gleichung (8) der 4. Nummer wenden. Es osculiren sich alsdann, im Allgemeinen, zwei der drei Zweige im dreifachen Puncte dreipunctig. Diese beiden Zweige können reell und imaginär sein. Den Uebergang bezeichnet wiederum eine Spitze zweiter Art. Und so weiter. —

17. Wenn zugleich:

$$\Phi_3 = 0, \qquad \frac{d\Phi_3}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2\Phi_3}{dx^2} = 0, \tag{1}$$

so hat die erste dieser drei Gleichungen drei gleiche Wurzeln x. Es ist:

$$x = -\frac{\frac{d^3\Omega}{dq^2dp}}{\frac{d^3\Omega}{dq^3}} = -\frac{\frac{d^3\Omega}{dqdp^2}}{\frac{d^3\Omega}{dq^2dp}} = -\frac{\frac{d^3\Omega}{dp^3}}{\frac{d^3\Omega}{dqdp^2}}.$$

I. In dem allgemeinen Falle, wo Φ_4 nicht verschwindet, gibt die Gleichung (5) der 4. Nummer: Fig. 27.

$$\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{dx}{dp} = -\frac{2\Phi_4}{\frac{d\Phi_3}{dx}} = \infty.$$

Der Krümmungshalbmesser ist also gleich Null. Alle folgenden Differential-Quotienten werden ebenfalls unendlich. Die Tangente hat mit der Curve vier Durchschnitte gemein, die in dem fraglichen Puncte zusammenfallen. Die Ordnung des Contactes ist $\frac{1}{3}$, oder, wenn der Ausdruck gestattet wird, der Contact ist ein $\frac{4}{3}$punctiger. (Fig. 27.)

II. Wenn neben den Gleichungen (1) auch noch die folgende besteht:

$$\Phi_4 = 0,$$

so stellt sich der Differential-Quotient $\frac{dx}{dp}$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ dar. Zur Bestimmung seines wahren Werthes erhalten wir die quadratische Gleichung (4) der vorigen Nummer,

die hier, indem eine ihrer beiden Wurzeln unendlich wird, auf den ersten Grad sich reducirt:

$$\frac{d\Phi_4}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} + 2\Phi_5 = o.$$

Der unendlichen Wurzel entspricht eine gewöhnliche Spitze erster Art. Die Gleichung (7) der 4. Nummer gibt zur Bestimmung des Differential-Quotienten $\frac{d^2x}{dp^2}$:

$$8\,\frac{d\Phi_4}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dp^2} + \left\{\frac{d^3\Phi_3}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right)^3 + 6\,\frac{d^2\Phi_4}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + 24\,\frac{d\Phi_5}{dx}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 48\Phi_6\right\} = o. \tag{2}$$

Dem endlichen Werthe des Differential-Quotienten $\frac{dx}{dp}$ entsprechend, erhalten wir also für $\frac{d^2x}{dp^2}$ und jeden Differential-Quotienten höherer Ordnung einen endlichen und vollkommen bestimmten Werth; wodurch ein gewöhnlicher Zweig ohne Singularität in dem fraglichen Puncte angezeigt wird. Wir erhalten die Form der 28. Figur, wobei auf die Spitze drei und den andern Zweig zwei von den fünf auf der Tangente zusammenfallenden Durchschnitten kommen.

Fig. 29. III. Wenn neben den Gleichungen (1) die folgenden beiden bestehen:

$$\Phi_4 = o, \qquad \frac{d\Phi_4}{dx} = o,$$

so ergibt sich für $\frac{dx}{dp}$ bloss ein unendlicher Werth, und ebenso für jeden der höhern Differential-Quotienten. Die Curve hat nur einen einzigen Zweig. Auf der Tangente im dreifachen Puncte fallen in diesem Puncte, wie im vorigen Falle fünf Durchschnitte zusammen. Der Contact ist ein $\frac{5}{3}$punctiger, oder von der Ordnung $\frac{2}{3}$. Der dreifache Punct ist ein Wendungspunct, in welchem der Krümmungshalbmesser unendlich klein ist. (Fig. 29.)

Fig. 30. IV. Wenn auf der gemeinschaftlichen Tangente sechs Durchschnitte zusammenfallen, so bestehen neben den Gleichungen (1) die folgenden beiden:

$$\Phi_4 = o, \qquad \Phi_5 = o,$$

so ändert sich in dem unter II. betrachteten Falle weiter nichts, als dass der nicht unendliche Werth des Differential-Quotienten $\frac{dx}{dp}$ verschwindet. Demselben entspricht nach der Gleichung (2):

$$\frac{d\Phi_4}{dx}\,\frac{d^2x}{dp^2} + 6\Phi_6 = o. \tag{3}$$

Durch eine gewöhnliche Spitze erster Art geht ein zweiter Zweig, welcher in der Spitze einen Wendungspunct hat. Von den sechs Durchschnitten mit der gemeinschaftlichen Tangente kommen drei auf die Spitze und drei auf den Wendungspunct. (Fig. 30.)

Fig. 31—32. V. Wenn die folgenden drei Gleichungen neben den Gleichungen (1) bestehen:

$$\Phi_4 = o, \qquad \Phi_5 = o, \qquad \frac{d\Phi_4}{dx} = o,$$

so werden die 6 ersten Gleichungen der 4. Nummer identische, und die Gleichung (7), welche hier in die folgende übergeht:

$$\frac{d^3\Phi_3}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right)^3 + 6 \cdot \frac{d^2\Phi_4}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + 24 \cdot \frac{d\Phi_5}{dx}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 48\Phi_6 = o, \tag{4}$$

gibt drei Werthe für $\frac{dx}{dp}$, von welchen keiner je unendlich werden kann. Für jeden Differential-Quotienten höherer Ordnung erhalten wir ebenfalls, und auf lineare Weise, drei

entsprechende endlichen Werthe. Es berühren sich drei verschiedene Zweige in dem fraglichen Puncte. Die Ordnung des Contactes dieser Zweige mit der gemeinschaftlichen Tangente ist die erste, und dieses ist, im Allgemeinen, auch die Ordnung des Contactes je zweier Zweige unter einander. Je nachdem die Wurzeln der Gleichung (4) alle drei im Zeichen übereinstimmen oder nicht, ergibt sich die Lage der 31. oder 32. Figur. Zwei Zweige können imaginär sein.

In der weitern Discussion der untergeordneten Fälle tritt die letzte Gleichung, die in Beziehung auf $\frac{dx}{dp}$ vom dritten Grade ist, gewissermassen an die Stelle der Gleichung $\Phi_3=o$, welche in Beziehung auf x vom dritten Grade ist und, im allgemeinen Falle, uns die drei verschiedenen Tangenten des dreifachen Punctes gab.

Wenn die Gleichung (4) zwei gleiche Wurzeln hat, so wird sie, für diese Wurzel-Werthe, zugleich mit der folgenden Gleichung befriedigt: Fig. 33—35.

$$\frac{d^3\Phi_3}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + 4\frac{d^2\Phi_4}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 8\frac{d\Phi_5}{dx} = o. \qquad (5)$$

In Folge dieser Gleichung verschwindet in der Gleichung (8) der 4. Nummer der Coefficient von $\frac{d^2x}{dp^2}$. Dieser Differential-Quotient wird dadurch unendlich und die Curve hat eine Spitze zweiter Art, die durch einen andern Zweig berührt wird. Wenn die beiden gleichen Wurzeln mit der dritten Wurzel entgegengesetztes Zeichen haben, so haben die Zweige die Lage der 33. Figur, bei gleichem Zeichen die Lage der 34. und 35. Figur, und zwar die Lage der ersten oder zweiten dieser beiden Figuren, je nachdem die gleichen Wurzeln, abgesehen vom Zeichen, grösser oder kleiner als die dritte Wurzel sind. Der Osculations-Kreis der Spitze schneidet diese in fünf und den andern Zweig in zwei Puncten, der Osculations-Kreis dieses Zweiges schneidet diesen in drei und die Spitze in vier Puncten.

In untergeordnetem Falle, wenn nemlich neben der letzten Gleichung auch noch die folgende besteht:

$$\frac{d^3\Phi_4}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right)^3 + 6\frac{d^2\Phi_5}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + 24\cdot\frac{d\Phi_6}{dx}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 48\Phi_7 = o, \qquad (6)$$

erscheint nach der Gleichung (8) der 4. Nummer der Werth des Differential-Quotienten unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; wir erhalten dann, wenn wir das gewöhnliche Verfahren anwenden, zwei verschiedene Werthe für $\frac{d^2x}{dp^2}$, die den beiden gleichen Werthen von $\frac{dx}{dp}$ entsprechen. Es hat die Curve wiederum drei vollständige Zweige, und zwei derselben haben unter einander einen dreipunctigen Contact. Die beiden sich osculirenden Zweige können sowohl reell als imaginär sein, und zwischen zwei solchen Fällen bildet eine Spitze zweiter Art immer den Uebergang. Und so weiter nach Analogie der 16. Nummer.

Wenn ferner die Gleichung (4) drei gleiche Wurzeln hat, und also neben dieser Gleichung und der Gleichung (5) zugleich auch noch die folgende befriedigt wird:

$$\frac{d^3\Phi_3}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 2\frac{d^2\Phi_4}{dx^2} = o, \qquad (7)$$

so ist der Werth des Differential-Quotienten $\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right)$, der, nach der Gleichung (8) der 4. Nummer, sich als ein Bruch darstellt, dessen Zähler der erste Theil der Gleichung (6) und dessen Nenner der erste Theil der Gleichung (5) ist, unendlich, bleibt es auch dann noch, wenn die Gleichung (6) befriedigt wird, und erscheint erst unter der Form $\frac{0}{0}$, oder

vielmehr $\frac{0^2}{0^2}$, wenn, zugleich mit der Gleichung (6), auch ihre Differential-Gleichung befriedigt wird:

$$\frac{d^3\Phi_4}{d\varkappa^3}\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right)^2 + 4\cdot\frac{d^2\Phi_5}{d\varkappa^2}\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) + 8\,\frac{d\Phi_6}{d\varkappa} = 0. \tag{8}$$

Und dann erhält man den wahren Werth des fraglichen Differential-Quotienten, erst nach einer zweimaligen Differentiation seines Nenners und Zählers, und zwar durch eine Gleichung des dritten Grades. Diess ist erforderlich, wenn die Curve drei vollständige Zweige haben soll, die, ihre gemeinschaftliche Tangente einfach berührend, unter sich paarweise genommen, einen dreipunctigen Contact haben. Wir können uns hier, wo wir über die Gränze der Entwicklungen der 4. Nummer hinaustreten und weitere Schlüsse unsicher werden, durch Analogie sicher leiten lassen und wie wir die vier Fälle I.—IV. dieser Nummer erhalten haben, die, wenn auch die Wurzeln der Gleichung $\Phi_3=0$ alle drei gleich sind, dem Falle V., wo die Curve drei sich berührende vollständige Zweige hat, vorangehen: so haben wir auch noch vier verschiedene Formen zu betrachten, wobei, wenn auch die Gleichung (4) drei gleiche Wurzeln hat, uns doch noch keine drei, sich dreipunctig osculirende Zweige entgegentreten. 1) Ein einziger Zweig geht durch den dreifachen Punct, welcher für das Auge nichts Singuläres hat; er hat mit dem Osculations-Kreise einen Contact von der Ordnung $\frac{4}{3}$ und wird von demselben in sieben zusammenfallenden Puncten zugleich osculirt und geschnitten. 2) Es hat die Curve eine gewöhnliche Spitze zweiter Art und ein andrer Zweig derselben osculirt diese Spitze in fünf Puncten, in der Art, dass auf dem gemeinschaftlichen Osculations-Kreise acht Durchschnittspuncte zusammenfallen. 3) Ein einziger Zweig, dem unter 1) ähnlich, geht durch den dreifachen Punct, wo er mit dem Osculations-Kreise einen Contact von der Ordnung $\frac{5}{3}$ hat und von demselben nicht geschnitten wird. Es fallen acht Durchschnittspuncte zusammen. 4) Es hat die Curve eine gewöhnliche Spitze zweiter Art, durch welche ein solcher Zweig der Curve geht, der mit dem Osculations-Kreise der Spitze einen vierpunctigen Contact hat. Es fallen in dem fraglichen Puncte neun Durchschnitte mit diesem Osculations-Kreise zusammen.*)

Wir können ohne alle Schwierigkeit, von drei sich dreipunctig osculirenden Zweigen durch die Zwischenfälle hindurch, zu drei sich vierpunctig osculirenden Zweigen übergehen, und so fort.

VI. Wenn auf der gemeinschaftlichen Tangente im dreifachen Puncte sieben Durchschnittspuncte zusammenfallen sollen, so müssen neben den Gleichungen (1) auch noch die folgenden drei Gleichungen befriedigt werden:

$$\Phi_4 = 0, \qquad \Phi_5 = 0, \qquad \Phi_6 = 0.$$

Nach den Betrachtungsweisen unter II. und IV. ist klar, dass, während ein Werth für $\frac{d\varkappa}{dp}$ unendlich wird, der andere verschwindet. Als Folge der Gleichung (2) verschwindet hier auch der dem letztern entsprechende Differential-Quotient $\frac{d^2\varkappa}{dp^2}$ und erst die Gleichung (8) der

*) Beispiele dieser vier verschiedenen Formen bieten die vier, durch die nachstehenden Gleichungen dargestellten Curven in dem Durchschnitte der beiden geraden Linien P und Q:

$$(p^2+\lambda q)^3 + \sigma p^7 = 0,$$
$$(p^2+\lambda q)\{(p^2+\lambda q)^2+\mu p^5\} + \sigma p^8 = 0,$$
$$(p^2+\lambda q)^3 + \sigma p^8 = 0,$$
$$(p^2+\lambda q)\{(p^2+\lambda q)^2+\mu p^5\} + \sigma p^9 = 0.$$

4. Nummer gibt uns für $\frac{d^3x}{dp^3}$ einen endlichen Werth:

$$\frac{d^3x}{dp^3} = -24 \cdot \frac{\Phi_7}{\frac{d\Phi_4}{dx}}.$$

Wir erhalten hiernach, dem unendlichen Werthe von $\frac{dx}{dp}$ entsprechend, eine gewöhnliche Spitze erster Art, und dem Verschwinden dieses Differential-Quotienten entsprechend, einen Zweig der Curve, welche die Tangente dieser Spitze vierpunctig osculirt.

VII. Wenn neben den Gleichungen (1): Fig. 36—37.

$$\Phi_4 = 0, \qquad \Phi_5 = 0, \qquad \Phi_6 = 0, \qquad \frac{d\Phi_4}{dx} = 0,$$

so erhalten wir nach V. drei sich berührende Zweige. Die Gleichung (4) zeigt, dass für einen dieser Zweige $\frac{dx}{dp}$ verschwindet, und für denselben Zweig gibt die Gleichung (8) der 4. Nummer:

$$\frac{d^2x}{dp^2} = -6 \frac{\Phi_7}{\frac{d\Phi_5}{dx}}.$$

Einer der drei sich berührenden Zweige hat also einen Wendungspunct. Je nachdem die beiden endlichen Wurzeln der Gleichung (4) im Zeichen übereinstimmen oder nicht, erhalten wir die Lage der 36. oder 37. Figur. Die beiden nicht osculirenden Zweige können reell und imaginär sein; eine Spitze zweiter Ordnung bildet den Uebergang. Die Ordnung der Annäherung der beiden Zweige unter sich kann beliebig ansteigen.

VIII. Wenn neben den Gleichungen (1):

$$\Phi_4 = 0, \qquad \Phi_5 = 0, \qquad \Phi_6 = 0, \qquad \frac{d\Phi_4}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Phi_5}{dx} = 0,$$

so bleibt, nach der Gleichung (4) nur ein Werth für $\frac{dx}{dp}$ ein Werth, der nicht verschwindet; dem verschwindenden entspricht $\frac{d^2x}{dp^2} = \infty$. Die Curve hat eine solche Spitze erster Art, die von ihrer Tangente fünfpunctig berührt wird. Durch dieselbe geht ein berührender Zweig der Curve.

IX. Wenn endlich, neben den Gleichungen (1):

$$\Phi_4 = 0, \qquad \Phi_5 = 0, \qquad \Phi_6 = 0, \qquad \frac{d\Phi_4}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Phi_5}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2\Phi_4}{dx^2} = 0,$$

so werden die Wurzeln der Gleichung (4) alle drei gleich Null, und hiernach die Werthe von $\frac{d^2x}{dp^2}$ unendlich. Der Krümmungshalbmesser ist unendlich gross. Die Curve hat nur einen Zweig mit einem Wendungspuncte, die Ordnung der Annäherung an ihre Tangente, auf der sieben Durchschnitte zusammenfallen, beträgt 4.

Wenn auf der gemeinschaftlichen Tangente acht Durchschnittspuncte zusammenfallen sollen, so müssen (neben den Gleichungen (1)) die folgenden bestehen:

$$\Phi_4 = 0, \qquad \Phi_5 = 0, \qquad \Phi_6 = 0, \qquad \Phi_7 = 0. \tag{9}$$

Wir erhalten hier fünf verschiedene Fälle.

X. Im allgemeinen Falle hat die Curve in ihrem dreifachen Puncte eine gewöhnliche Spitze erster Art, und die Tangente dieser Spitze wird von einem andern Zweige der Curve

fünfpunctig osculirt. Aus dem Falle unter VI. folgt nemlich, dass auch $\frac{d^3x}{dp^3}$ für den letztgenannten Zweig verschwindet.

XI. Wenn neben (1) und (9) auch noch

$$\frac{d\Phi_4}{dx} = 0,$$

so verschwindet eine der drei Wurzeln der Gleichung (4). Die Gleichung (8) der 4. Nummer reducirt sich im vorliegenden Falle auf die folgende:

$$\left\{\frac{d^3\Phi_3}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + 4\,\frac{d^2\Phi_4}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 8\,\frac{d\Phi_5}{dx}\right\}\frac{d^2x}{dp^2} + \frac{dx}{dp}\left\{\frac{d^3\Phi_4}{dx^3}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + 6\,\frac{d^2\Phi_5}{dx^2}\left(\frac{dx}{dp}\right) + 24\,\frac{d\Phi_6}{dx}\right\} = 0, \quad (10)$$

woraus wir ersehen, dass für denjenigen Zweig, für welchen $\frac{dx}{dp}$ verschwindet, auch $\frac{d^2x}{dp^2}$ gleich Null wird. Die Curve hat drei sich berührende Zweige, von denen einer die gemeinschaftliche Tangente vierpunctig osculirt. Die beiden andern Zweige können sowohl reell als imaginär sein, und auch durch eine Spitze zweiter Art vertreten werden.

XII. Wenn neben (1) und (9) zugleich:

$$\frac{d\Phi_4}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Phi_5}{dx} = 0,$$

so verschwinden zwei Wurzeln der Gleichung (4) und für diese verliert die Gleichung (8) der 4. Nummer ihre Bedeutung zur Bestimmung von $\frac{d^2x}{dp^2}$. Um diesen Differential-Coefficienten zu bestimmen, müssen wir diese Gleichung von Neuem vollständig differentiiren. Wenn wir, der Kürze wegen, nur diejenigen Glieder hinschreiben, welche, nach der Differentiation, weder Φ_3, und seine partiellen Differential-Quotienten, noch $\frac{d\Phi_4}{dx}$ und $\frac{d\Phi_5}{dx}$, noch $\frac{dx}{dp}$ zu Coefficienten haben, so ergibt sich bei einiger Aufmerksamkeit, wenn wir den constanten Factor 12.35 fortlassen, unmittelbar die folgende quadratische Gleichung zur Bestimmung von $\frac{d^2x}{dp^2}$:

$$\frac{d^2\Phi_4}{dx^2}\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right)^2 + 16\,\frac{d\Phi_6}{dx}\left(\frac{d^2x}{dp^2}\right) + 96\Phi_8 = 0. \quad (11)$$

Es berühren sich also wiederum drei Zweige der Curve; von diesen haben zwei im dreifachen Puncte einen Wendungspunct, und können reell und imaginär sein und auch durch eine Spitze zweiter Art ersetzt werden.

XIII. Wenn neben (1) und (9) zugleich:

$$\frac{d\Phi_4}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Phi_5}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2\Phi_4}{dx^2} = 0,$$

so verschwinden die Wurzeln der Gleichung (4) alle drei zugleich. Die Gleichung (11) zeigt, dass ein Werth von $\frac{d^2x}{dp^2}$ unendlich wird, während der andere endlich bleibt. Es hat die Curve eine solche Spitze erster Art, welche von ihrer Tangente in fünf Puncten geschnitten wird, und durch diese Spitze geht noch ein Zweig derselben mit einem Wendungspuncte.

XIV. Wenn neben (1) und (9) zugleich:

$$\frac{d\Phi_4}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Phi_5}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Phi_6}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2\Phi_4}{dx^2} = 0,$$

so werden die Wurzeln der Gleichung (11) beide unendlich. Durch den dreifachen Punct

geht ein einziger Zweig ohne Wendungspunct. Der Krümmungshalbmesser ist unendlich gross und die Ordnung der Annäherung an die Tangente beträgt $\frac{5}{4}$.

Wenn zu den verschiedenen Bedingungen der Fälle X.—XIV. die neue Bedingung

$$\Phi_8 = 0$$

hinzukommt, so fallen in die gemeinschaftliche Tangente, im dreifachen Puncte, neun Durchschnitte zusammen; dann erhalten wir, den eben bezeichneten Fällen entsprechend, die folgenden fünf neuen Fälle.

XV. Die Curve hat eine gewöhnliche Spitze erster Art, deren Tangente von einem andern Zweige der Curve sechspunctig osculirt wird.

XVI. Die Curve hat drei Zweige, von welchen einer die gemeinschaftliche Tangente fünfpunctig osculirt. Die beiden andern Zweige sind reell oder imaginär, oder werden von einer Spitze zweiter Art vertreten.

XVII. Wenn Φ_8 verschwindet, hat die Gleichung (11) neben einer verschwindenden Wurzel eine endliche. Von den drei sich berührenden Zweigen berührt einer die gemeinschaftliche Tangente in zwei, ein zweiter in drei und der dritte in vier zusammenfallenden Puncten.

XVIII. Eine Wurzel der Gleichung (11) verschwindet, während die andere unendlich wird. Die Curve hat eine ihre Tangente fünfpunctig berührende Spitze, und einen Zweig, der diese Tangente vierpunctig osculirt.

XIX. Wenn die Wurzeln der Gleichung (11) unbestimmt werden, hat endlich die Curve drei, im Allgemeinen, vollständige Zweige, welche unter sich und mit ihrer gemeinschaftlichen Tangente einen dreipunctigen Contact haben. Diesem Falle entsprechen also folgende Bedingungen:

$$\Phi_1 \equiv 0, \qquad \Phi_2 \equiv 0,$$
$$\Phi_3 = 0, \quad \Phi_4 = 0, \quad \Phi_5 = 0, \quad \Phi_6 = 0, \quad \Phi_7 = 0, \quad \Phi_8 = 0,$$
$$\frac{d\Phi_3}{dx} = 0, \quad \frac{d\Phi_4}{dx} = 0, \quad \frac{d\Phi_5}{dx} = 0, \quad \frac{d\Phi_6}{dx} = 0,$$
$$\frac{d^2\Phi_3}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2\Phi_4}{dx^2} = 0. \text{ —}$$

Wir wollen hier diese Erörterungen abbrechen. —

18. Wenn es, nach der Absicht der jedesmaligen Discussion, erlaubt ist, die beiden linearen Functionen p und q so anzunehmen, dass x verschwindet, so vereinfacht sich die Bestimmung der Functionen Φ und ihrer partiellen Differential-Coefficienten. Man hat alsdann überhaupt, nach der 2. Nummer:

$$\Phi_m \equiv \frac{1}{1.2..m} \cdot \frac{d^m\Omega}{dp^m},$$
$$\frac{d^s\Phi_m}{dx^s} \equiv \frac{1}{1.2..m-s} \cdot \frac{d^m\Omega}{dq^s dp^{m-s}}.$$

Als Beispiel wollen wir den Fall einer Curve mit einem solchen dreifachen Puncte, in welchem die drei Zweige unter einander einen gewöhnlichen Contact haben, nehmen und voraussetzen, dass die Curve durch folgende Gleichung:

$$F(y,x) \equiv \Omega = 0,$$

in der y und x rechtwinklige Parallel-Coordinaten bedeuten, dargestellt werde und dass überdiess die gemeinschaftliche Tangente der drei Zweige in dem dreifachen Puncte der Axe der x parallel sei, wonach $\frac{dy}{dx} \equiv \frac{dq}{dp} \equiv x = 0$. Alsdann müssen (nach (17), V) für den fraglichen Punct, ausser den partiellen Differential-Coefficienten der ersten und zweiten Ordnung,

auch noch die folgenden verschwinden:

$$\frac{d^3\Omega}{dx^3}, \quad \frac{d^3\Omega}{dydx^2}, \quad \frac{d^3\Omega}{dy^2dx}, \quad \frac{d^4\Omega}{dx^4}, \quad \frac{d^4\Omega}{dydx^3}, \quad \frac{d^5\Omega}{dx^5}.$$

Bei unserer Functionen-Bestimmung sind die Krümmungshalbmesser in dem dreifachen Puncte den reciproken Werthen von $\frac{d\varkappa}{dx}$ gleich. Diese Werthe aber sind durch folgende Gleichung gegeben, in welche hier die Gleichung (4) der vorigen Nummer übergeht:

$$15\frac{d^3\Omega}{dy^3}\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)^3 + 45\cdot\frac{d^4\Omega}{dy^2dx^2}\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)^2 + 15\cdot\frac{d^5\Omega}{dydx^4}\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) + \frac{d^6\Omega}{dx^6} = 0.$$

Nehmen wir überdiess noch den dreifachen Punct zum Anfangspuncte der Coordinaten, so erhalten wir für die allgemeine Gleichung einer Curve mit einem Puncte der fraglichen Art die folgende:

$$y^3 + \mu y^2(x^2+\beta xy+\gamma y^2) + \lambda y(x^4+\epsilon x^3y+\zeta x^2y^2+\eta xy^3+\vartheta y^4) + \sigma(x^6+\cdots\cdots) = 0$$

und wenn wir, in Beziehung auf diese Gleichung, die vorhergehende entwickeln, kommt:

$$\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)^3 + 2\mu\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right)^2 + 4\lambda\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) + 8\sigma = 0.$$

Die reciproken Werthe der Wurzeln dieser Gleichung sind, was sich auch unmittelbar bestätigt findet, die drei Krümmungshalbmesser der drei im Anfangspuncte sich berührenden Zweige. —

19. Ich schliesse mit einer letzten Bemerkung. Es können vielfache Puncte mit allen ihren Modificationen unendlich weit rücken, ohne dass irgend eine Eigenthümlichkeit derselben sich verliert. Es kann diess auf zwiefache Art geschehen, auf dem Zweige einer Hyperbel oder dem Zweige einer Parabel. Nicht unbezeichnend möchte man sich hier zur Bezeichnung solcher unendlich weit gerückten singulären Puncte des Ausdrucks „hyperbolische und parabolische Singularität in unendlicher Entfernung“ bedienen.

Alle Unterscheidungen des gegenwärtigen Paragraphen behalten ihre unmittelbare Anwendung, so lange die Werthe von p und q, durch welche die Lage des singulären Punctes bestimmt ist, nicht unendlich werden. Wenn wir diese Functionen in ihrer allgemeinen Bedeutung nehmen und demnach, indem wir durch u, v und w ganze lineare Functionen (gewöhnlicher Parallel-Coordinaten) bezeichnen,

$$q \equiv \frac{\varrho u}{w}, \qquad p \equiv \frac{\nu v}{w},$$

setzen, so entsprechen, im Allgemeinen, Puncten in unendlicher, wie in endlicher Entfernung, endliche Werthe von p und q. Die obige Behauptung, dass vielfache Puncte auch in unendlicher Entfernung alle ihre Eigenthümlichkeiten behalten, findet also hierin ihre unmittelbare und vollständige Bestätigung.

Wir wollen, zur nähern Verständigung, zwei Beispiele betrachten. Es rücke erstens der singuläre Punct auf der geraden Linie U unendlich weit, dann verschwindet für denselben der Werth von q, während, weil v und w zugleich unendlich werden, der Werth von p unter unbestimmter Form erscheint. Wir können immer einen Coefficienten ξ so bestimmen, dass überhaupt:

$$\nu v - \xi w \equiv \delta u + \sigma;$$

dieser Coefficient ist dann der wahre Werth von p. Insbesondere verschwindet derselbe, gleichwie der Werth von q, wenn

$$\nu v \equiv \delta u + \alpha,$$

das heisst, wenn wir, was Behufs der Functionen-Bestimmung, erlaubt ist, annehmen, es seien die beiden geraden Linien U und V parallel.

Nehmen wir hiernach den Fall dreier sich berührenden Zweige und lassen den Berührungspunct unendlich weit rücken, so brauchen wir bloss, um die allgemeine Gleichung einer Curve mit solchen drei Zweigen zu erhalten, in der vorletzten Gleichung der vorigen Nummer $\frac{\varrho u}{w}$ und $\frac{\delta u+\alpha}{w}$, oder, statt dessen, auch $\frac{y}{x}$ und $\frac{\sigma y+1}{x}$, an die Stelle von y und x zu schreiben. Auf diesem Wege ergibt sich die nachstehende Gleichung:

$$x^3y^3 + \mu x^2y^2\varphi_2 + \lambda xy\varphi_4 + \sigma\varphi_6 + \frac{\tau\varphi_7}{x} + \frac{\nu\varphi_8}{x^2} + \cdots = o,$$

indem wir mit x^6 multipliciren und, der Kürze wegen, überhaupt:

$$1 + \beta y + \gamma y^2 + \cdots + \nu y^n \equiv \varphi_n$$

setzen. Es hat die Curve drei hyperbolische Zweige, welche an ein und derselben geraden Linie, der Axe der x, nach ihrer zwiefachen Erstreckung sich hinziehen. Wir erkennen bald, dass die Form der Gleichung (1) mit der Form derjenigen Gleichung, welche in der 158. Nummer discutirt worden ist, ganz übereinstimmt und dass insbesondere, wenn wir die Gleichung (1) mit ihren vier ersten Gliedern abbrechen, wonach dieselbe die allgemeine Gleichung der Curven der 6. Ordnung mit drei, an derselben Asymptote sich hinziehenden, unendlichen Zweigen wird, die resultirende Gleichung:

$$x^3y^3 + \mu x^2y^2\varphi_2 + \lambda xy\varphi_4 + \sigma\varphi_6 = o,$$

wenn wir x und y mit p und q vertauschen, in die Gleichung (2) der 159. Nummer übergeht.

Die letzte Gleichung der vorigen Nummer gibt hier das reciproke Maass der Annäherung der drei Zweige an ihre gemeinschaftliche Asymptote. *)

Als zweites Beispiel wollen wir

$$q \equiv \frac{1}{x}, \qquad p \equiv \frac{y}{x}$$

setzen. Für einen Punct, der auf einer Parabel liegt, deren Durchmesser der Axe der x parallel sind, verschwinden, indem y^2 und x unendlich gross und von derselben Ordnung sind, gleichzeitig die Werthe von q und p. Hier wollen wir wiederum den eben betrachteten Fall dreier sich berührenden Zweige nehmen, und nun an die Stelle von y und x in der vorletzten Gleichung der vorigen Nummer die vorstehenden Ausdrücke für q und p einsetzen. Indem wir mit x^6 multipliciren, ergibt sich:

$$x^3 + \alpha x^2(y^2+\beta y+\gamma) + \delta x(y^4+\varepsilon y^3+\zeta y^2+\eta y+\vartheta) + \mu(y^6\ldots) + \frac{\sigma}{x}(y^8+\cdot\cdot) + \cdots = o.$$

Diese Gleichung ist die allgemeine Gleichung solcher Curven, welche drei parabolische Zweige mit gemeinsamer Durchmesser-Richtung haben. Die letzte Gleichung der vorigen Nummer gibt hier die reciproken Werthe der Parameter der drei parabolischen Zweige. —

Der Raum verbietet in eine mehr detaillirte Erörterung hier einzugehen, es mag uns daher genügen, angedeutet zu haben, wie die Entwicklungen des ersten Abschnittes über die verschiedenartigen unendlichen Zweige der Curven aus den Discussionen des gegenwärtigen Paragraphen unmittelbar hervorgehen.

---

*) System. 172. Entwicklungen. Zweiter Band. 606.

§. 2.

Genaue Bestimmung aller möglichen Singularitäten, welche in dem Laufe der Curven vierter Ordnung vorkommen können.

20. Indem wir durch q und p irgend zwei ganze lineare Functionen bezeichnen, und der Kürze wegen,

$$\alpha q + \beta p \equiv \Sigma_1,$$
$$\gamma q^2 + \delta pq + \varepsilon p^2 \equiv \Sigma_2,$$
$$\zeta q^3 + \eta pq^2 + \vartheta p^2 q + \xi p^3 \equiv \Sigma_3,$$
$$\varkappa q^4 + \lambda pq^3 + \mu p^2 q^2 + \nu p^3 q + \varrho p^4 \equiv \Sigma_4,$$

setzen, können wir die Curven der 4. Ordnung durch die nachstehende Gleichung darstellen:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 = 0.$$

Die allgemeine Gleichung der Curven irgend einer n. Ordnung ist nach dieser Bezeichnungsweise, indem wir überhaupt eine ganze und homogene Function eines beliebigen m. Grades durch Σ_m darstellen:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_{n-1} + \Sigma_n = 0.$$

Sobald die beiden Functionen q und p einmal bestimmt sind (und diese Bestimmung hängt von 4 Constanten ab) schliesst Σ_m überhaupt $(m+1)$ Constanten ein. Die vorstehende Gleichung, aus der durch Division immer eine Constante sich fortschaffen lässt, enthält hiernach

$$\frac{n(n+3)}{2} + 3$$

Constante, also drei überzählige. Von diesen kommt eine auf den Umstand, dass die Curve zwar durch den Durchschnitt der beiden geraden Linien P und Q geht, dieser Durchschnitt selbst aber jeder willkührliche Punct der gegebenen Curve sein kann. Die beiden andern werden dadurch bedingt, dass jede der beiden geraden Linien P und Q, ohne dass dadurch die Form der Gleichung geändert wird, um ihren Durchschnittspunct sich drehen können. Dabei werden nemlich q und p durch zwei andere lineare Functionen, beide von der Form $(\sigma q + \tau p)$ ersetzt, wonach sich nur die Coefficienten in den verschiedenen Functionen Σ ändern, die Form dieser Functionen aber unverändert bleibt. So lange die Curve dieselbe bleibt, stellt auch jede Function Σ_m, nach wie vor, dasselbe System von m durch den Durchschnitt von P und Q gehenden geraden Linien dar.

Einfache Puncte.

21. Wenn wir auf der Curve:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 = 0,$$

von dem Durchschnitte von P und Q aus, um eine unendlich kleine Strecke vorwärts gehen, so kommt, indem wir $\alpha = 1$ nehmen:

$$\Sigma_1 \equiv q + \beta p = 0,$$

wobei q und p unendlich kleine Grössen derselben Ordnung sind. Betrachten wir q und p als veränderliche Grössen, so gehört die letzte Gleichung einer geraden Linie an, welche annäherungsweise den Lauf der Curve in dem fraglichen Puncte darstellt: es ist die Gleichung der Tangente. Die Ordnung der Annäherung steigt um eine Einheit, wenn wir Glieder des zweiten Grades mit hinzufügen. Die Gleichung:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = 0,$$

stellt einen dreipunctig osculirenden Kegelschnitt dar. Endlich ist:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0$$

die Gleichung einer vierpunctig osculirenden Curve dritter Ordnung.

22. Wir können die gerade Linie Q so drehen, dass sie mit der Tangente im fraglichen Puncte zusammenfällt, dann wird $\beta=o$. Die Gleichung der Curve:

$$q + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 = o,$$

enthält alsdann nur noch zwei überzählige Constanten. Für die dem gegebenen Puncte der Curve (dem Durchschnitte von P und Q) benachbarten Puncte derselben, müssen wir, um die vorstehende Gleichung zu befriedigen, in Σ_2 ein Glied suchen, das, um den Werth von q aufzuwiegen, mit q von derselben Ordnung ist. Dieses Glied kann nur εp^2 sein, weil ein Glied, das p neben q enthält, von welcher Ordnung auch p sein mag, nicht mit q von derselben Ordnung sein kann. Die Gleichung:

$$q + \varepsilon p^2 = o,$$

gehört einer Parabel an, welche annäherungsweise den Lauf der Curve in dem fraglichen Puncte darstellt. Wenn wir die Gleichung der Curve entwickeln und auf nachstehende Weise ordnen:

$$(q+\varepsilon p^2) + p(\delta q+\xi p^2) + (\gamma q^2+\vartheta p^2 q+\varrho p^4) + pq(\eta q+\nu p^2) + q^2(\zeta q+\mu p^2) + (\lambda pq^3) + (\varkappa q^4) = o,$$

wobei die in der ersten, zweiten, . . . siebenten Klammer eingeschlossenen Glieder bezüglich mit p^2, p^3, . . . p^8 von gleicher Ordnung sind, so erhalten wir nach einander verschiedene Curven, deren Annäherung an die gegebene in dem gegebenen Puncte von einer bloss dreipunctigen zu einer achtpunctigen ansteigt, wenn wir einmal die Glieder der ersten Klammer, dann die Glieder der zwei, drei, vier, fünf, sechs ersten Klammern gleich Null setzen. Wenn wir $(p-\sigma q)$ an die Stelle von p setzen und dann $\sigma = \frac{\xi-\delta\varepsilon}{2\varepsilon^2}$ nehmen, so erhalten wir, indem wir von den Werthen der Coefficienten ganz absehen, eine Gleichung von folgender Form, mit einer überzähligen Constanten:

$$(1+\delta p)(q+\varepsilon p^2) + (\gamma q^2+\vartheta p^2 q+\varrho p^4) + pq(\eta q+\nu p^2) + q^2(\zeta q+\mu p^2) + \lambda pq^3 + \varkappa q^4 = o,$$

in welcher im ersten Gliede die vierpunctig osculirende Parabel in Evidenz tritt.

23. Wenn $\varepsilon=o$, so finden wir erst in Σ_3 das Glied ξp^3, als dasjenige, welches, für nahe liegende Puncte der Curve, das Glied q aufwiegen kann. Gegen diese beiden Glieder verschwinden alsdann alle übrigen und die durch die Gleichung:

$$q + \xi p^3 = o,$$

ausgedrückte Parabel dritter Ordnung stellt annäherungsweise den Lauf der Curve in der Nähe des fraglichen Punctes dar. Dieser Punct ist ein Wendungspunct der Curve. Die Gleichung der Curve behält nur noch eine einzige überzählige Constante, welche auf die willkührliche Richtung der geraden Linie P kommt. Ordnen wir diese Gleichung, ähnlich wie oben, nach der verschiedenen Ordnung der Kleinheit ihrer Glieder für die Nachbarpuncte des Wendungspunctes, so kommt:

$$(q+\xi p^3) + p(\delta q+\varrho p^3) + \vartheta p^2 q + q(\gamma q+\nu p^3) + \eta pq^2 + \mu p^2 q^2 + \zeta q^3 + \lambda pq^3 + \varkappa q^4 = o.$$

Es wird die Curve von der durch die Gleichung:

$$q + \xi p^3 = o$$

dargestellten Parabel dritter Ordnung vierpunctig osculirt. Eine mehrpunctig osculirende cubische Parabel gibt es im Allgemeinen nicht. Wir erhalten die Gleichungen von Curven, welche die gegebene in dem Wendungspuncte bezüglich fünf-, sechs-, sieben-, acht-, neun-, zehn- und zwölfpunctig osculiren, wenn wir nach einander die zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben und acht ersten Glieder der vorstehenden Gleichung gleich Null setzen.

Wir können insbesondere die Richtung der geraden Linie P so bestimmen, dass ϱ oder ϑ ausfällt, wodurch die Anzahl der Constanten auf die gerade nothwendige sich reducirt.

24. Wenn auch der Coefficient ξ verschwindet, so ist ϱp^4 das einzige Glied, durch welches, für Puncte der Curve, welche dem gegebenen benachbart sind, q aufgewogen werden

kann; wonach alsdann die durch die Gleichung:

$$q + \varrho p^4 = o,$$

ausgedrückte Parabel vierter Ordnung den Lauf der Curve in der Nähe des gegebenen Punctes annäherungsweise darstellt. Diese Parabel hat mit der Curve die gerade Linie Q zur gemeinschaftlichen vierpunctig osculirenden Tangente, und osculirt selbst die Curve fünfpunctig. Ordnen wir die Gleichung der Curve mit Rücksicht darauf, dass, für Nachbarpuncte, q und p^4 von derselben Ordnung sind, so kommt:

$$(q+\varrho p^4) + \delta pq + \vartheta p^2 q + \nu p^3 q + \gamma q^2 + \eta pq^2 + \mu p^2 q^2 + \zeta q^3 + \lambda pq^3 + \varkappa q^4 = o.$$

Setzen wir nach einander die zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun und zehn ersten Glieder der vorstehenden Gleichung gleich Null, so erhalten wir die Gleichungen solcher Curven, welche die gegebene in dem fraglichen Puncte bezüglich sechs-, sieben-, acht-, neun-, zehn-, zwölf-, dreizehn- und sechszehnpunctig osculiren.

Die Gleichung der Curve hat noch eine überzählige Constante, welche auf die willkührliche Richtung der Linie P kommt. Wir können sie fortschaffen, indem wir γ verschwinden lassen. Hiernach behalten wir nur 13 Constante, und es können also auch nur Curven vierter Ordnung von besonderer Art einen Punct der fraglichen Art haben. —

Doppelpuncte.

25. In dem Falle eines Doppelpunctes ist die allgemeine Gleichung der Curven vierter Ordnung die folgende:

$$\Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 = o.$$

Diese Gleichung schliesst 15 Constante und unter diesen zwei überzählige ein, weil der Durchschnitt der beiden geraden Linien P und Q zwar in den Doppelpunct der Curve fällt, diese beiden Linien selbst aber, ohne dass die Form der vorstehenden Gleichung sich ändert, beliebig um ihren Durchschnitt sich drehen können. Wir können die Function Σ_2 in zwei Factoren des ersten Grades, beide von der Form $(\sigma p+\tau q)$ zerlegen. Nehmen wir diese beiden Factoren statt p und q, so geht die Form der letzten Gleichung in die nachstehende mit ihren 13 nothwendigen Constanten über:

$$pq + \Sigma_3 + \Sigma_4 = o.$$

Die geraden Linien P und Q sind nun dadurch vollkommen bestimmt, dass sie mit den beiden Tangenten im Doppelpuncte zusammenfallen. Indem wir einmal p^2 und q, das andere Mal q^2 und p, als von derselben Ordnung für die Nachbarpuncte des Doppelpunctes betrachten, können wir die vorstehende Gleichung auf folgende zwiefache Weise entwickeln:

$$p\{(q+\xi p^2) + p(\vartheta q+\varrho p^2) + q(\eta q+\nu p^2)\} + q^2(\zeta q+\mu p^2) + \lambda pq^3 + \varkappa q^4 = o, \quad (1)$$

$$q\{(p+\zeta q^2) + q(\eta p+\varkappa q^2) + p(\vartheta p+\lambda q^2)\} + p^2(\xi p+\mu q^2) + \nu p^3 q + \varrho p^4 = o. \quad (2)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die beiden Parabeln:

$$q + \xi p^2 = o, \qquad p + \zeta q^2 = o,$$

den Lauf der beiden im Doppelpuncte sich schneidenden Zweige annäherungsweise darstellen. Die beidesmalige Berührung ist eine dreipunctige. Auf dieselbe Weise, wie am Schlusse der 22. Nummer, erhalten wir für die beiden vierpunctig osculirenden Parabeln die folgenden Gleichungen:

$$q + \xi(p-\sigma q)^2 = o, \qquad p + \zeta(q-\sigma' q)^2 = o,$$

indem wir:

$$\sigma = \frac{\varrho-\vartheta\xi}{2\xi^2}, \qquad \sigma' = \frac{\varkappa-\eta\zeta}{2\zeta^2},$$

setzen.

26. Wenn insbesondere $\xi = o$, wodurch die Anzahl der Constanten sich auf zwölf reducirt, so kann in der grössern Klammer der Gleichung (1) q nur durch p^3 aufgewogen werden. Der Lauf des einen Zweiges der Curve, dessen Tangente Q ist, hat alsdann einen mit dem Doppelpuncte zusammenfallenden Wendungspunct und wird annäherungsweise durch die vierpunctig osculirende cubische Parabel:

$$q + \varrho p^3 = o,$$

dargestellt.

27. Wenn die Zweige, welche den Doppelpunct bilden, in diesem Puncte beide einen Wendungspunct haben, so verschwindet sowohl ξ als ζ. Dann können wir die Gleichung der Curve auf folgende zwiefache Weise ordnen:

$$p\{(q+\varrho p^3) + \vartheta pq + \nu p^2 q + \eta q^2 + \mu pq^2 + \lambda q^3\} + \varkappa q^4 = o,$$
$$q\{(p+\varkappa q^3) + \eta pq + \lambda pq^2 + \vartheta q^2 + \mu p^2 q + \nu p^3\} + \varrho p^4 = o,$$

indem wir einmal q und p^3, das andere Mal p und q^3, als von derselben Ordnung betrachten, je nachdem wir auf dem Zweige mit der Tangente Q, oder auf dem Zweige mit der Tangente P, vom Doppelpuncte aus, vorwärts gehen.

In dem vorliegenden Falle können wir die Gleichung der Curve auch auf folgende Weise schreiben:

$$pq\{1 + \eta q + \vartheta p\} + \Sigma_4 = o.$$

Um die Form dieser Gleichung, welche die nothwendigen elf Constanten einschliesst, geometrisch zu deuten, bemerken wir, dass die Gleichung:

$$\Sigma_4 = o,$$

ein System von solchen vier geraden Linien darstellt, welche durch den Doppelpunct gehen, und den vier Asymptoten der Curve parallel sind. Jede dieser geraden Linien schneidet die Curve, weil ein Durchschnittspunct unendlich weit liegt und zwei in den Doppelpunct zusammenfallen, ausserdem nur noch in einem einzigen Puncte. Die vier einzigen Durchschnittspuncte, welche wir auf diese Weise erhalten, liegen alle vier auf der geraden Linie:

$$1 + \eta q + \vartheta p = o,$$

und somit sind wir beiläufig zu folgendem Satze gelangt:

Wenn sich zwei Zweige einer Curve vierter Ordnung schneiden und in ihrem Durchschnitte beide einen Wendungspunct haben, so schneiden die vier geraden Linien, welche man, parallel mit den vier Asymptoten, durch diesen Durchschnitt legen kann, die Curve ausserdem noch in vier solchen Puncten, die in gerader Linie liegen.

28. Um den Fall eines isolirten Punctes, dessen beiden Tangenten imaginär sind, in der Gleichung der Curve in Evidenz zu bringen, erhalten wir sogleich nachstehende Formen:

$$(q^2+\sigma^2 p^2) + \Sigma_3 + \Sigma_4 = o,$$
$$(q^2+\sigma^2 p^2)r + \Sigma_4 = o.$$

In dem Falle der ersten Gleichung sind die beiden imaginären Tangenten gewöhnliche, in dem Falle der zweiten Gleichung beide osculirende. Der Factor $(q^2+\sigma^2 p^2)$ enthält eine überzählige Constante, weil die Richtung einer der beiden geraden Linien P und Q erst dann bestimmt ist, nachdem die Richtung der andern beliebig angenommen worden ist. Die Constante können wir unter Andern auf lineare Weise dadurch ausfallen lassen, dass wir annehmen, dass die geraden Linien P und Q (zugeordnete Durchmesser des Doppelpunctes *)) auf einander senkrecht stehen.

*) Ein isolirter Punct ist immer als eine Ellipse anzusehen, deren beiden Axen, bis zum Verschwinden, ihre Richtung und ihr gegenseitiges Grössen-Verhältniss beibehalten haben. Daher kann auch

29. In dem Falle einer Spitze erster Art erhalten wir die allgemeine Gleichung:

$$q^2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 = o,$$

welche 13 Constante, unter diesen aber, der willkührlichen Richtung von P wegen, eine überzählige einschliesst. Diese fällt aus, wenn wir p mit $(p+\sigma q)$ vertauschen, und dann σ so bestimmen, dass $(\vartheta+3\sigma\xi)$ verschwindet, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn wir von Vorne herein $\vartheta=o$ setzen. Um für die, dem Rückkehrpuncte nahe liegenden Puncte q^2 aufzuwiegen, finden wir in Σ_3 das Glied ξp^3. Ordnen wir hiernach die Gleichung der Curve, indem wir q^2 und p^3 als von derselben Ordnung betrachten, so kommt:

$$(q^2+\xi p^3) + p(\eta q^2+\varrho p^3) + q(\zeta q^2+\nu p^3) + \mu p^2q^2 + \lambda pq^3 + \varkappa q^4 = o.$$

Die Curve hat in der Spitze mit ihrer Tangente Q einen Contact von der Ordnung $\frac{1}{2}$. Sie hat mit der semicubischen Parabel, welche durch die Gleichung:

$$q^2 + \xi p^3 = o$$

dargestellt wird, einen Contact von der ersten Ordnung.

30. Wenn $\xi=o$, so sind, für Nachbarpuncte q^2 und p^4 und mithin auch q und p^2 von derselben Ordnung, und wenn wir, mit Rücksicht hierauf, die Gleichung der Curve ordnen, so kommt:

$$(q^2+\vartheta p^2q+\varrho p^4) + pq(\eta q+\nu p^2) + q^2(\zeta q+\mu p^2) + \lambda pq^3 + \varkappa q^4 = o. \quad (1)$$

Um den Lauf der Curve annäherungsweise darzustellen, erhalten wir also die durch die Gleichung:

$$q^2 + \vartheta p^2q + \varrho p^4 \equiv (q+\varpi p^2)(q+\varpi' p^2) = o$$

dargestellten beiden Parabeln. Es berühren sich in dem Doppelpuncte zwei Zweige der Curve, welche von diesen beiden Parabeln bezüglich dreipunctig osculirt werden. Die beiden Zweige sind reell oder imaginär zugleich mit diesen Parabeln, je nachdem:

$$\vartheta^2 - 4\varrho > o, \qquad \vartheta^2 - 4\varrho < o.$$

Die vorstehende Gleichung enthält 12 Constante, aber unter diesen noch eine überzählige, welche darauf kommt, dass P irgend eine beliebige gerade Linie ist, welche durch den Berührungspunct auf der gemeinschaftlichen Tangente Q geht.

Die Form der Gleichung (1) bleibt im Uebrigen unverändert, wenn wir an die Stelle des ersten Gliedes derselben $(q+\varpi p^2)(q+\varpi' p^2)$, das folgende einführen:

$$\{q + \varpi(p+\pi q)^2\}\{q + \varpi'(p+\pi' q)^2\}.$$

Die beiden neuen Parabeln, welche bei beliebiger Bestimmung von π und π' durch die beiden Gleichungen:

$$q + \varpi(p+\pi q)^2 = o, \qquad q + \varpi'(p+\pi' q) = o,$$

dargestellt werden, osculiren also die Curve im Allgemeinen ebenfalls dreipunctig. Unter solchen dreipunctig osculirenden Parabeln befinden sich aber zwei, welche die beiden Zweige der Curve vierpunctig osculiren. Es muss also, bei gehöriger Bestimmung der beiden Constanten π und π', die Gleichung der Curve (1) die folgende Form annehmen:

$$\{q + \varpi(p+\pi q)^2\}\{q + \varpi'(p+\pi' q^2)\} + q^2(\zeta q+\mu p^2) + \lambda pq^3 + \varkappa q^4 = o,$$

in der jene beiden vierpunctig osculirenden Parabeln in Evidenz treten. Damit diese Gleichung bloss die elf nothwendigen Constante einschliesse, brauchen wir bloss π oder π' verschwinden zu lassen.

---

von zugeordneten Durchmessern und Axen eines isolirten Punctes die Rede sein. Die dem fraglichen isolirten Puncte entsprechende Ellipse wird durch die folgende Gleichung:

$$q^2 + \sigma^2p^2 = \varepsilon,$$

dargestellt.

31. Zwischen den beiden Fällen, dass die Curve zwei reelle sich berührenden Zweige hat, und dass ein isolirter Punct diese imaginär gewordenen Zweige vertritt, bildet derjenige Fall den Uebergang, wo:

$$\vartheta^2 - 4\varrho = 0, \qquad \text{oder} \qquad \varpi = \varpi'.$$

Dann können wir die Gleichung (1) unter folgender Form schreiben:

$$(q+\varpi p^2)^2 + 2\alpha q(p+\beta q)(q+\varpi p^2) + q\Sigma_3 = 0,$$

welche unverändert bleibt, wenn wir $(p+\sigma q)$ an die Stelle von p setzen. Nach dieser Substitution können wir den unbestimmten Coefficienten σ so bestimmen, dass die resultirende Gleichung folgende Form annimmt:

$$(q+\varpi p^2)^2 + 2\alpha pq(q+\varpi p^2) + q\Sigma_3 = 0, \tag{2}$$

oder auch, indem wir:

$$q\Sigma_3 - \alpha^2 q^2 p^2 \equiv q\Sigma'_3$$

setzen, die folgende:

$$(q+\varpi p^2+\alpha pq)^2 + q\Sigma'_3 = 0.$$

Es sei, um zu particularisiren:

$$\Sigma_3 \equiv \nu p^3 + \mu p^2 q + \lambda pq^2 + \varkappa q^3;$$

alsdann kommt, wenn wir die vorstehende Gleichung (2) in Beziehung auf $(q+\varpi p^2)$ auflösen:

$$q + \varpi p^2 = -\alpha pq \pm \sqrt{(-\nu p^3 q+(\alpha^2-\mu)p^2q^2-\lambda pq^3-\varkappa q^4)}.$$

So lange ν nicht verschwindet, ergibt sich, bei gehöriger Vernachlässigung, für die Nachbarpuncte des Doppelpunctes:

$$q + \varpi p^2 = \pm p\sqrt{(-\nu pq)},$$
$$= \pm p^2\sqrt{(\nu\varpi p)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass diese Puncte, je nachdem ϖ positiv oder negativ ist, auf der negativen oder positiven Seite der Tangente Q liegen; dass sie ferner, je nachdem $\nu\varpi$ positiv oder negativ ist, auf der positiven oder negativen Seite der, durch den Berührungspunct gehenden geraden Linie P liegen, dass sie endlich zugleich auf der innern und äussern Seite derjenigen Parabel, welche durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$q + \varpi p^2 = 0, \tag{3}$$

sich erstrecken. Hiernach ist der Doppelpunct der Curve eine S p i t z e z w e i t e r A r t. Die Ordnung der Annäherung, sowohl der beiden Zweige an die Parabel, als auch dieser beiden Zweige unter sich, beträgt $1\frac{1}{2}$.

32. Wenn $\nu=0$, und demnach die Gleichung der Curve folgende Form hat:

$$(q+\varpi p^2)^2 + 2\alpha pq(q+\varpi p^2) + q^2\Sigma_2 = 0,$$

so ergibt sich, bei gehörigen Vernachlässigungen,

$$q + \varpi p^2 = -(\alpha\pm\sqrt{(\alpha^2-\mu)})pq,$$
$$= \varpi(\alpha\pm\sqrt{(\alpha^2-\mu)})p^3.$$

Alsdann hat die Curve ihre beiden vollständigen Zweige wieder erlangt und diese Zweige haben u n t e r s i c h u n d m i t d e r P a r a b e l (3) e i n e n C o n t a c t d e r z w e i t e n O r d n u n g.

Wenn $\alpha^2-\mu<0$, so werden die beiden vollständigen Zweige der Curve imaginär und durch einen i s o l i r t e n P u n c t vertreten.

Wir können hier noch zwei untergeordnete Fälle unterscheiden. Wenn zugleich $\nu=0$ und $\mu=0$, wonach:

$$(q+\varpi p^2)^2 + 2\alpha pq(q+\varpi p^2) + q^3\Sigma_1 = 0,$$

so kommt für die eine Wurzel:

$$(q+\varpi p^2) = -2\alpha pq = 2\alpha\varpi p^3,$$

und für die andere:

$$(q+\varpi p^2) = -\alpha pq + \sqrt{(\alpha^2 p^2 q^2 - \lambda pq^3)},$$
$$= -\alpha pq \left\{ 1 - \sqrt{(1 - \frac{\lambda}{\alpha^2} \cdot \frac{q}{p})} \right\},$$
$$= -\frac{\lambda}{2\alpha} \cdot q^2 - \frac{\lambda\varpi^2}{2\alpha} p^4.$$

Von den beiden Zweigen hat der erste mit der Parabel (3) einen Contact der 2. Ordnung, wie bisher, der zweite aber einen Contact der 3. Ordnung. Jener schneidet die Parabel, indem er sie berührt; dieser nicht.

Wenn endlich zugleich $\nu = o$, $\mu = o$, $\lambda = o$, und demnach die Gleichung der Curve die folgende wird:

$$(q+\varpi p^2)^2 + 2\alpha pq(q+\varpi p^2) + \varkappa q^4 = o,$$

so erhalten wir für den zweiten Zweig:

$$q + \varpi p^2 = -\alpha pq + \sqrt{(\alpha^2 p^2 q^2 - \varkappa q^4)},$$
$$= -\frac{\varkappa}{2\alpha} \frac{q^3}{p} = \frac{\varkappa\varpi^3}{2\alpha} \cdot p^5.$$

Dann hat ein Zweig, wie bisher, mit der Parabel einen Contact der 2. Ordnung, der andere Zweig aber einen Contact der 4. Ordnung.

33. Wenn zugleich:

$$\nu = o, \qquad \alpha^2 - \mu = o,$$

wonach wir die Gleichung der Curve auf nachstehende Form mit acht Constanten bringen können:

$$(q+\varpi p^2+\alpha pq)^2 + \lambda pq^3 + \varkappa q^4 = o,$$

so kommt nach gehörigen Vernachlässigungen:

$$q + \varpi p^2 + \alpha pq = \pm \sqrt{(-\lambda pq^3)},$$
$$= \pm \lambda\varpi p^3 \sqrt{(\lambda\varpi p)}.$$

Die Curve bildet in diesem Falle wiederum eine Spitze zweiter Art; ein Schenkel derselben liegt innerhalb und der andere ausserhalb des durch die folgende Gleichung:

$$q + \varpi p^2 + \alpha pq = o,$$

dargestellten Kegelschnittes, der in dem Falle, dass α verschwindet, eine Parabel ist. Wenn wir diesen untergeordneten Fall ausschliessen, so liegen beide Schenkel auf derselben Seite, der diesen Kegelschnitt dreipunctig osculirenden Parabel:

$$q + \varpi p^2 = o.$$

Je nachdem $\lambda\varpi$ positiv oder negativ ist, liegt die Spitze auf der positiven oder negativen Seite der Linie P. Die Annäherung jedes Schenkels der Spitze an den fraglichen Kegelschnitt, so wie der beiden Schenkel unter sich, ist von der Ordnung $2\frac{1}{2}$.

Wenn zu den obigen beiden Bedingungen auch noch das Verschwinden von λ hinzukommt, wonach die Gleichung der Curve die folgende wird:

$$(q+\varpi p^2+\alpha pq)^2 + \varkappa q^4 = o,$$

so löset sich der erste Theil dieser Gleichung in zwei reelle oder imaginäre Factoren des zweiten Grades auf, welche zwei, sich vierpunctig osculirende, reelle oder imaginäre, Kegelschnitte darstellen. Es können sich also zwei Zweige einer Curve vierter Ordnung, so lange diese nicht durch ein System zweier Kegelschnitte ersetzt wird, nicht vierpunctig osculiren. Die möglichen Fälle sind hiermit erschöpft. —

34. In dem Falle zweier sich berührenden Zweige einer Curve vierter Ordnung, können wir diese Curve auch durch die folgende Gleichung darstellen:

$$(q+\Sigma'_2)(q+\Sigma''_2) + (\lambda p+\varkappa q)q^3 = o.$$

So lange λ nicht verschwindet, können wir, ohne dass diese Form sich ändert, $(\lambda p+\varkappa q)$ mit

λp vertauschen; dann kommt, indem die Constanten auf die 11 nothwendigen sich reduciren:

$$(q+\Sigma'_2)(q+\Sigma''_2) + \lambda pq^3 = o. \tag{1}$$

In den Gleichungen:

$$q + \Sigma'_2 = o, \qquad q + \Sigma''_2 = o, \tag{2}$$

treten diejenigen beiden Kegelschnitte, welche die beiden Zweige der Curve fünfpunctig osculiren, in Evidenz.

Wenn λ verschwindet, so behält die entsprechende Gleichung:

$$(q+\Sigma'_2)(q+\Sigma''_2) + \varkappa q^4 = o,$$

immer noch ihre überzählige Constante, welche auf die willkührliche Richtung der Linie P kommt. Dann werden von den beiden Kegelschnitten (2) die bezüglichen Curven-Zweige beide sechspunctig osculirt. Um die überzählige Constante fortzuschaffen, können wir die letzte Gleichung auch auf folgende Weise schreiben:

$$\{q + \varpi p^2 + \tau q(p+\gamma q)\}\{q + \varpi' p^2 + \tau' pq\} + \varkappa q^4 = o.$$

Wesentlich ist in dieser Form, dass die Coefficienten ϖ und ϖ' verschieden sind. Sind sie einander gleich, so berührt jeder der beiden Kegelschnitte einen der beiden Zweige fünfpunctig und den andern dreipunctig. Die Curve hat also zwei Zweige, die sich im fraglichen Doppelpuncte dreipunctig osculiren.

Dreifache Puncte.

35. Die allgemeine Gleichung einer Curve vierter Ordnung mit einem dreifachen Puncte ist die folgende:

$$\Sigma_3 + \Sigma_4 = o,$$

und enthält, weil die Form dieser Gleichung sich nicht ändert, wie wir auch die beiden geraden Linien P und Q um ihren Durchschnitt sich drehen lassen, zwei überzählige Constanten, wonach die Anzahl der nothwendigen Constanten auf zehn sich reducirt. Die Gleichung:

$$\Sigma_3 = o,$$

stellt das System der drei Tangenten der Curve im dreifachen Puncte dar. Je nachdem diese drei Tangenten alle drei reell oder zwei derselben imaginär sind, schneiden sich drei reelle Zweige der Curve in demselben Puncte, oder ein conjugirter Punct der Curve liegt auf einem ihrer reellen Zweige. In dem ersten Falle können wir, um die beiden überzähligen Constanten fortzuschaffen, die beiden geraden Linien P und Q mit zwei der drei Tangenten des Doppelpunctes zusammenfallen lassen, wonach die Gleichung der Curve die folgende Form erhält:

$$pq(q+\alpha p) + \Sigma_4 = o.$$

Wir können diese Gleichung immer und auf einzige Weise auf folgende Form bringen:

$$p(q+\alpha p)\{q+\Sigma_2\} + \lambda q^3(q+\beta p) = o, \tag{1}$$

und dann stellt die Gleichung:

$$q + \Sigma_2 = o,$$

denjenigen Kegelschnitt dar, welcher den, an der Tangente Q sich hinziehenden, Zweig der Curve fünfpunctig osculirt. In dem untergeordneten Falle der nachstehenden Gleichung mit 9 Constanten:

$$p(q+\alpha p)\{q+\Sigma_2\} + \lambda q^4 = o,$$

ist der fragliche Kegelschnitt ein sechspunctig osculirender.

Auf gleiche Weise können wir diejenigen beiden Kegelschnitte bestimmen, welche die beiden andern Zweige in dem dreifachen Puncte fünfpunctig osculiren.

In dem Falle, dass die beiden letztgenannten Zweige imaginär werden, nimmt die Glei-

chung (1) die folgende Form an:

$$(q^2+\varkappa^2p^2)\{q+\Sigma_2\} + \lambda q^3(q+\beta p) = 0,$$

in welcher der Factor $(q^2+\varkappa^2p^2)$ eine überzählige Constante einschliesst. Indem β verschwindet, particularisirt sich die Curve auf gleiche Weise, wie in dem Falle, dass in dem dreifachen Puncte drei reelle Zweige der Curve sich schneiden.

36. Wenn zwei der drei Tangenten des dreifachen Punctes zusammenfallen, so erhalten wir für die allgemeine Gleichung der Curve mit neun Constanten die folgende:

$$p^2q + \Sigma_4 = 0.$$

Die Curve hat alsdann eine Spitze erster Art mit der Tangente P, durch welche noch ein andrer Zweig geht, dessen Tangente Q ist. Der letzten Gleichung können wir immer die folgenden beiden Formen geben:

$$p^2\{q+\Sigma_2\} + \lambda q^3(q+\beta p) = 0,$$

$$q\{p^2+\Sigma_3\} + \mu p^4 = 0.$$

In der ersten dieser beiden Formen tritt:

$$q + \Sigma_2 = 0,$$

als die Gleichung eines, denjenigen Zweig, dessen Tangente Q ist, fünfpunctig osculirenden Kegelschnittes in Evidenz, in der zweiten:

$$p^2 + \Sigma_3 = 0,$$

als die Gleichung derjenigen Curve dritter Ordnung, welche den Zweig mit der Spitze am genauesten darstellt.

Weil in der ersten Gleichung dieser Nummer Σ_4 nothwendig die höchste Potenz von q enthalten muss, damit nicht alle Glieder durch p theilbar werden, so kann die Spitze erster Art nicht durch zwei sich berührende Zweige, und noch weniger durch eine Spitze zweiter Art ersetzt werden; dergestalt also, dass, wenn eine Curve vierter Ordnung zwei sich berührende Zweige oder eine Spitze zweiter Art hat, durch den Berührungspunct jener beiden Zweige oder durch diese Spitze kein neuer Zweig der Curve gehen kann. Man sieht sogleich den Grund dieser Unmöglichkeit ein. Auf der Tangente in einem Puncte der fraglichen Art fallen nemlich vier Puncte schon zusammen, so dass eine Curve der vierten Ordnung von einer solchen Tangente überhaupt nicht mehr geschnitten werden kann.

37. Wenn die Tangenten des dreifachen Punctes alle drei zusammenfallen, so nimmt die Gleichung der Curve die folgende Form an:

$$q^3 + \Sigma_4 = 0.$$

Diese Gleichung enthält noch eine überzählige Constante, welche darauf kommt, dass die gerade Linie P beliebig um den dreifachen Punct sich drehen kann, ohne dass die vorstehende Form sich ändert. Die folgende Gleichung schliesst bloss die acht nothwendigen Constanten ein:

$$q^3 + p\Sigma_3 = 0.$$

Entwickeln wir, so kommt:

$$q^3 + \varrho p^4 + \nu p^3q + \mu p^2q^2 + \lambda pq^3 = 0. \tag{2}$$

Für Nachbarpuncte sind q^3 und ϱp^4 von derselben Ordnung, und die Parabel:

$$q^3 + \varrho p^4 = 0,$$

stellt annäherungsweise den Lauf der Curve dar. Die Gleichung (2) ist in Beziehung auf die Kleinheit der Glieder geordnet, so dass, in der Nähe des Berührungspunctes, der Lauf der Curve mit steigender Ordnung der Annäherung dargestellt wird, wenn wir zu den beiden Gliedern in der letzten Gleichung einmal noch das dritte, dann noch das dritte und vierte Glied, aus der Gleichung der Curve hinzunehmen. Die Ordnung der Annäherung der Curve an ihre Tangente ist $\frac{4}{3}$.

Systeme von zwei Doppelpuncten.

38. Wenn eine Curve der 4. Ordnung zwei Doppelpuncte hat und wir eine Tangente des einen Punctes P, eine Tangente des andern Punctes Q und diejenige gerade Linie, welche die beiden Doppelpuncte verbindet, T nennen, so fallen von den vier Durchschnitten der Linie T mit der Curve zwei auf P und zwei auf Q, und von den Durchschnitten jeder der beiden Tangenten P und Q mit der Curve beidesmal drei auf T zusammen. Und umgekehrt, diese Voraussetzungen reichen hin, um auszudrücken, dass auf der geraden Linie T zwei Doppelpuncte liegen und dass P und Q Tangenten dieser Doppelpuncte sind. Soll daher

$$\Omega_4 = o$$

die Gleichung der Curve vierter Ordnung sein, so muss, wenn wir $t=o$ setzen, die Function Ω_4 sich auf p^2q^2 reduciren, und wenn wir $p=o$ oder $q=o$ setzen, muss t^3 sich als Factor herausstellen. Diese Forderungen führen unmittelbar zu der folgenden möglichst allgemeinen Function-Bestimmung:

$$\Omega_4 \equiv p^2q^2 + \alpha pqtr + \beta t^3s.$$

Die so bestimmte Function Ω_4 enthält zwölf Constante, von welchen 10 auf die 5 linearen Functionen kommen, und zwei als unbestimmte Coefficienten sich darstellen. Diese Anzahl von Constanten ist die nothwendige und hinreichende für eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpuncten, weil überhaupt die Bedingung, dass eine Curve eine gewisse Anzahl von Doppelpuncten habe, für jeden Doppelpunct die Anzahl der Constanten um eine Einheit vermindert.

Die Gleichung der Curve wird hiernach:

$$p^2q^2 + \alpha pqtr + \beta t^3s = o, \tag{1}$$

und kann, indem wir:

$$\alpha r \equiv \mu p + \nu p + (\mu\nu+\sigma)t$$

setzen, auch unter der nachstehenden Form geschrieben werden:

$$\text{I.} \qquad p(p+\mu t)q(q+\nu t) + t^2(\beta ts+\sigma pq) = o.$$

In dieser neuen Form treten die beiden Tangenten jedes der beiden Doppelpuncte in Evidenz. Denn, setzen wir nach einander:

$$p = o, \quad (p+\mu t) \equiv p' = o, \quad q = o, \quad (q+\nu t) \equiv q' = o, \tag{2}$$

so verschwindet jedesmal das erste Glied der vorstehenden Gleichung, während im zweiten Gliede t^3 sich als Factor herausstellt. Es stellen also die beiden ersten Gleichungen (2) die beiden Tangenten P und P' des ersten und die beiden letzten Gleichungen (2) die beiden Tangenten Q und Q' des zweiten Doppelpunctes dar.

Es sei:

$$\beta s \equiv \lambda q + \varrho p + \tau t.$$

Wenn alsdann $\lambda=o$, so wird in der Form I., wenn wir $p=o$ setzen, t^4 gemeinschaftlicher Factor. Also ist P eine osculirende Tangente.

Wenn zugleich $\lambda=o$ und $\sigma=o$, so werden P und P' beide osculirende Tangenten.

Wenn zugleich $\lambda=o$ und $\varrho=o$, so werden P und Q beide osculirende Tangenten.

Wenn endlich zugleich $\lambda=o$, $\varrho=o$ und $\sigma=o$, so werden P und P', Q und Q' alle vier osculirende Tangenten.

Wir erhalten hier also vier untergeordnete Fälle. 1) Von den beiden Zweigen, welche sich in einem Doppelpuncte schneiden, hat einer in diesem Puncte einen Wendungspunct. Allgemeine Gleichung mit elf Constanten:

$$\text{II.} \qquad p(p+\mu t)q(q+\nu t) + \sigma t^2pq + t^3(\varrho p+\tau t) = o.$$

2) In einem der beiden Doppelpuncte hat jeder der beiden Zweige einen Wendungspunct.

Allgemeine Gleichung mit zehn Constanten:

III. $$p(p+\mu t)q(q+\nu t) + t^3(\varrho p+\tau t) = o.$$

3) In jedem der beiden Doppelpuncte hat einer der beiden Zweige einen Wendungspunct. Allgemeine Gleichung mit zehn Constanten:

IV. $$p(p+\mu t)q(q+\nu t) + \sigma t^2 pq + \tau t^4 = o.$$

4) In jedem der beiden Doppelpuncte haben beide Zweige Wendungspuncte. Allgemeine Form mit neun Constanten:

V. $$p(p+\mu t)q(q+\nu t) + \tau t^4 = o.$$

39. Wenn wir in der Gleichung I. $\mu=o$ setzen; so fallen die beiden Tangenten P und P' des ersten Doppelpunctes in P zusammen und dieser Punct geht in eine Spitze erster Art über. Wenn $\nu=o$, so verwandelt sich der zweite Doppelpunct in eine solche Spitze. Hiernach ergeben sich die nachstehenden vier untergeordneten Fälle:

1) Es hat die Curve eine Spitze erster Art und einen gewöhnlichen Doppelpunct. Allgemeine Form mit elf Constanten:

VI. $$p^2q(q+\nu t) + t^2(\beta ts+\sigma pq) = o.$$

2) Einer derjenigen Zweige, welche den Doppelpunct bilden, hat einen Wendungspunct. Allgemeine Form mit zehn Constanten:

VII. $$p^2q(q+\nu t) + \sigma t^2 pq + t^3(\varrho p+\tau t) = o.$$

3) Es haben beide Zweige in dem Doppelpuncte einen Wendungspunct. Allgemeine Gleichung mit neun Constanten:

VIII. $$p^2q(q+\nu t) + t^3(\varrho p+\tau t) = o.$$

4) Es hat die Curve zwei Spitzen erster Art. Allgemeine Form mit zehn Constanten:

IX. $$p^2q^2 + t^2(\beta ts+\sigma pq) = o.$$

40. Wenn auf jeder der in P zusammenfallenden beiden Tangenten des ersten Doppelpunctes in diesem Puncte vier Durchschnitte mit der Curve liegen sollen, wonach zwei Zweige der Curve in diesem Puncte sich berühren, so muss s in der Gleichung VI. auf eine Function von p und t ohne Constante sich reduciren. Hiernach entspricht 1) dem Falle zweier sich berührenden Zweige und eines gewöhnlichen Doppelpunctes die folgende allgemeine Gleichung mit zehn Constanten:

X. $$p^2q(q+\nu t) + \sigma t^2 pq + t^3(\lambda q+\tau t) = o.$$

2) Es kann in dem Doppelpuncte ein Zweig einen Wendungspunct haben. Allgemeine Form mit neun Constanten:

XI. $$p^2q(q+\nu t) + \sigma t^2 pq + \tau t^4 = o.$$

3) Es können beide Zweige einen Wendungspunct haben. Allgemeine Form mit acht Constanten:

XII. $$p^2q(q+\nu t) + \tau t^4 = o.$$

4) Es kann die Curve zwei sich berührende Zweige und ausserdem eine Spitze erster Art haben. Allgemeine Form mit neun Constanten:

XIII. $$p^2q^2 + \sigma t^2 pq + t^3(\lambda p+\tau t) = o.$$

Für diejenigen Puncte der Curve, welche auf den beiden sich berührenden Zweigen in der Nähe des Berührungspunctes liegen, sind p und t^2 von derselben Ordnung, während der Werth von q einer endlichen Grösse gleich bleibt. Ordnen wir hiernach die Gleichung X., so kommt:

$$\{p^2q^2+\sigma pqt^2+\tau t^4\} + pt\{\nu pq+\lambda t^2\} = o,$$

und wenn wir die erste Klammer in zwei Factoren auflösen:

$$(pq+\varkappa t^2)(pq+\varkappa' t^2) + pt(\nu pq+\lambda t^2) = o.$$

Die beiden Gleichungen:

$$pq + \varkappa t^2 = o, \qquad pq + \varkappa' t^2 = o,$$

stellen zwei solche Kegelschnitte dar, welche die beiden sich berührenden Zweige der Curve im Berührungspuncte dreipunctig osculiren. Diese beiden Zweige sind hiernach zugleich mit $\varkappa$ und $\varkappa'$ reell oder imaginär, je nachdem:

$$\sigma^2 > 4r \qquad \text{oder} \qquad \sigma^2 < 4r.$$

Im letztern Falle werden die beiden sich berührenden Zweige durch einen isolirten Punct vertreten. Demnach schliesst jede der vier Gleichungen X—XIII. einen zwiefachen Fall ein.

41. In dem Uebergangs-Falle, wo

$$\sigma^2 = 4r,$$

hat die Curve, statt der beiden sich berührenden Zweige, eine Spitze zweiter Art. Hier sind drei Fälle möglich.

1) Es hat die Curve eine Spitze zweiter Art und einen gewöhnlichen Doppelpunct. Allgemeine Gleichung mit neun Constanten:

$$\text{XIV.} \qquad \{pq+\varkappa t^2\}^2 + pt(\nu pq+\lambda t^2) = o.$$

2) Es hat im Doppelpuncte ein Zweig einen Wendungspunct. Allgemeine Form mit acht Constanten:

$$\text{XV.} \qquad (pq+\varkappa t^2)^2 + \nu p^2 qt = o.$$

3) Es hat die Curve eine Spitze zweiter und eine Spitze erster Art. Allgemeine Form mit acht Constanten:

$$\text{XVI.} \qquad (pq+\varkappa t^2)^2 + \lambda pt^3 = o.$$

42. Ueberall, wo in den bisher aufgezählten Fällen ein Doppelpunct mit zwei gewöhnlichen oder auch mit zwei osculirenden Tangenten vorkommt, können wir denselben auch durch einen isolirten Punct ersetzen, wonach zum Beispiel dem Falle I. zwei andere coordinirt sind, 1) dass die Curve einen eigentlichen Doppelpunct und einen isolirten Punct, 2) dass sie zwei isolirte Puncte hat. Es scheint mir überflüssig, die entsprechenden allgemeinen Formen einzeln aufzustellen. Den beiden eben bezeichneten Fällen, auf die wir uns hier beschränken wollen, entsprechen zwei Gleichungen, die wir in der folgenden zusammenfassen können:

$$(p^2 \mp \zeta^2 t^2)(q^2 + \xi^2 t^2) + t^2(\beta ts + \sigma pq) = o.$$

Diese Gleichung hat die gerade nothwendige Anzahl von Constanten, nemlich zwölf; die Functionen p und q sind dadurch bestimmt, dass die geraden Linien P und Q diejenigen Durchmesser der beiden Doppelpuncte sind, deren zugeordnete *) in der Linie T zusammenfallen.

43. Ausser den bisher aufgezählten oder angedeuteten Fällen sind keine andern möglich. Der Grund der Unmöglichkeit ergibt sich immer unmittelbar. So können zum Beispiel, wenn ausserdem die Curve schon einen Doppelpunct hat, zwei sich berührende Zweige unter einander keinen dreipunctigen Contact haben. Es lässt sich nemlich immer ein Kegelschnitt beschreiben, der einen der beiden Zweige in dem Berührungspuncte dreipunctig osculirt und durch irgend zwei gegebene Puncte geht. Nähmen wir für einen dieser beiden gegebenen Puncte den zweiten Doppelpunct, so würde solch ein Kegelschnitt mit der Curve neun Puncte gemein haben, was unmöglich ist, so lange die Curve sich nicht in ein System von zwei Kegelschnitten, von welchen der eben bestimmte einer ist, sich auflöset. Es kann, um noch ein zweites Beispiel hervorzuheben, die Curve nicht zwei Spitzen zweiter Art haben. Es gibt nemlich unendlich viele Kegelschnitte, welche die Curve in einer der

---

*) Vergleiche die Note zur 28. Nummer.

beiden Spitzen so berühren, dass in derselben fünf Durchschnittspuncte zusammenfallen. Alle solche Kegelschnitte haben unter einander einen dreipunctigen Contact und einer derselben ist auf einzige Weise vollkommen bestimmt, wenn er überdiess noch eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punct berührt. Nehmen wir aber für diese gerade Linie die Tangente in der zweiten Spitze und für den Berührungspunct auf ihr diese Spitze selbst, so würde ein so bestimmter Kegelschnitt mit der Curve, was unmöglich ist, neun Puncte gemeinschaftlich haben. —

Systeme von drei Doppelpuncten.

44. Wenn eine Curve vierter Ordnung drei Doppelpuncte hat, so können wir durch diese Puncte, paarweise genommen, drei gerade Linien P, Q und T legen. Dann muss in der Gleichung der Curve, wenn wir p verschwinden lassen, q^2t^2, wenn q verschwindet, p^2t^2, und wenn t verschwindet, p^2q^2 als Factor hervortreten. Diese Bedingungen, welche ihrerseits hinreichend sind, um auszudrücken, dass die Curve drei Doppelpuncte hat, führen unmittelbar zu der folgenden Form-Bestimmung:

$$p^2q^2 + \vartheta p^2t^2 + \zeta q^2t^2 + \xi pqtu = 0. \qquad (1)$$

Zu derselben Form gelangen wir, wenn wir von der Gleichung I. der 28. Nummer ausgehen und in dieser Gleichung die Constanten so bestimmen, dass die Curve zu ihren beiden Doppelpuncten noch einen dritten erhält. Zuvörderst wollen wir, zum Behuf dieser Bestimmung, zwei überzählige Constanten einführen. Die folgende Gleichung mit vierzehn Constanten:

$$(p+\mu t)(p+\mu' t)(q+\nu t)(q+\nu' t) + t^2(\beta ts+\sigma pq) = 0,$$

wird zur Form der Gleichung I. zurückgeführt, wenn wir in derselben $(p+\mu t)$ mit p und $(q+\nu t)$ mit q vertauschen, denn bei dieser Vertauschung bleibt die Form des zweiten Gliedes unverändert. P und Q sind nun nicht mehr zwei Tangenten der beiden Doppelpuncte, sondern irgend zwei beliebige gerade Linien, welche durch diese Doppelpuncte gehen, so dass wir insbesondere auch die Voraussetzung machen können, dass sie in dem dritten Doppelpuncte sich schneiden. Es sei wiederum:

$$\beta s \equiv \lambda q + \varrho p + \tau t.$$

Dann kommt, wenn wir in der letzten Gleichung nach einander p und q verschwinden lassen:

$$t^2\{\mu\mu' q^2 + [\mu\mu'(\nu+\nu')+\lambda]qt + [\mu\mu'\nu\nu'+\tau]t^2\} = 0,$$
$$t^2\{\nu\nu' p^2 + [\nu\nu'(\mu+\mu')+\varrho]pt + [\mu\mu'\nu\nu'+\tau]t^2\} = 0.$$

Wenn in den Durchschnitt von P und Q ein Doppelpunct der Curve fallen soll, so muss in der ersten dieser beiden Gleichungen q^2 und in der zweiten p^2 sich als Factor herausstellen; diess gibt die folgenden drei Bedingungs-Gleichungen:

$$\mu\mu'(\nu+\nu') + \lambda = 0, \qquad \nu\nu'(\mu+\mu') + \varrho = 0, \qquad \mu\mu'\nu\nu' + \tau = 0.$$

Hiernach ergibt sich:

$$\beta s \equiv -\mu\mu'\nu\nu' \left\{\frac{\nu+\nu'}{\nu\nu'}\cdot q + \frac{\mu+\mu'}{\mu\mu'}\cdot p + t\right\},$$

und die Gleichung der Curve wird:

$$(p+\mu t)(p+\mu' t)(q+\nu t)(q+\nu' t) + \sigma pqt^2 - \mu\mu'\nu\nu' t^3\left\{\frac{\nu+\nu'}{\nu\nu'}\cdot q + \frac{\mu+\mu'}{\mu\mu'}\cdot p + t\right\} = 0,$$

oder, wenn wir entwickeln:

$$p^2q^2 + \nu\nu' p^2t^2 + \mu\mu' q^2t^2 + pqt\{(\mu+\mu')q + (\nu+\nu')p + \sigma t\} = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung hat ganz die Form der Gleichung (1), wenn wir in dieser die lineare Function ξu auf folgende Weise auflösen:

$$\xi u \equiv \gamma q + \delta p + \sigma t.$$

Die Tangenten-Paare der beiden ersten Doppelpuncte haben die folgenden Gleichungen:

$$p + \mu t = o, \qquad p + \mu' t = o,$$
$$q + \nu t = o, \qquad q + \nu' t = o,$$

und in diesen Doppelpuncten schneiden sich also zwei reelle Zweige, oder dieselben sind isolirte Puncte, je nachdem einerseits μ und μ', andrerseits ν und ν' reell oder imaginär sind. Es sind Spitzen erster Art, wenn einerseits μ und μ', andrerseits ν und ν' einander gleich sind. Um die vier Constanten der Gleichung (2) aus den Constanten der Gleichung (1) zu bestimmen, ergeben sich, indem wir diese Gleichungen als identische betrachten, unmittelbar die folgenden beiden Gleichungen zweiten Grades:

$$\mu^2 - \gamma\mu + \zeta = o,$$
$$\nu^2 - \delta\nu + \vartheta = o,$$

von denen die erste μ und μ' und die zweite ν und ν' zu Wurzeln hat. Die Wurzeln beider Gleichungen können, unabhängig von einander, reell und imaginär und einander gleich sein; und hiernach kann also auch von den beiden ersten Doppelpuncten jeder, abgesehen von dem andern, durch den Durchschnitt zweier reellen Zweige gebildet werden, ein isolirter Punct sein oder in einer Spitze erster Art bestehen.

Um die Natur des dritten Doppelpunctes zu erkennen, wollen wir durch denselben eine willkührliche gerade Linie legen, in deren Gleichung:

$$p + \varkappa q = o,$$

$\varkappa$ einen unbestimmten Coefficienten bezeichnet. Eine solche gerade Linie schneidet die Curve noch in zwei Puncten, welche durch die folgende Gleichung bestimmt sind:

$$\varkappa^2 q^2 - \varkappa\{(\mu+\mu') - \varkappa(\nu+\nu')\} qt + \{\nu\nu'\varkappa^2 - \sigma\varkappa + \mu\mu'\} t^2 = o. \qquad (3)$$

Von diesen beiden Puncten fällt einer in den Durchschnitt von P und Q und die fragliche gerade Linie wird demnach Tangente des dritten Doppelpunctes, wenn

$$\nu\nu'\varkappa^2 - \sigma\varkappa + \mu\mu' = o. \qquad (4)$$

Der dritte Doppelpunct ist ein eigentlicher Doppelpunct oder ein isolirter Punct, je nachdem die beiden Wurzeln der Gleichung (4), die wir auch folgendergestalt schreiben können:

$$\vartheta\varkappa^2 - \sigma\varkappa + \zeta = o,$$

reell oder imaginär sind, je nachdem also:

$$\sigma^2 - 4\vartheta\zeta > o, \qquad \text{oder} \qquad \sigma^2 - 4\vartheta\zeta < o.$$

Der fragliche Punct ist endlich eine Spitze erster Art, wenn

$$\sigma^2 = 4\vartheta\zeta = 4\mu\mu'\nu\nu'.$$

45. Wir ziehen aus dem Bisherigen den Schluss, dass die folgenden Fälle, alle zehn, möglich sind.

1) Es hat die Curve drei eigentliche Doppelpuncte,
2) zwei eigentliche Doppelpuncte und einen isolirten Punct,
3) einen eigentlichen Doppelpunct und zwei isolirte Puncte,
4) drei isolirte Puncte,
5) zwei eigentliche Doppelpuncte und eine Spitze erster Art,
6) einen eigentlichen Doppelpunct, einen isolirten Punct und eine Spitze erster Art,
7) zwei isolirte Puncte und eine Spitze erster Art,
8) einen eigentlichen Doppelpunct und zwei Spitzen erster Art,
9) einen isolirten Punct und zwei Spitzen erster Art,
10) drei Spitzen erster Art.

Es hängen die Curven der Fälle 1—4 von elf, die Curven der Fälle 5—7 von zehn, die Curven der Fälle 8—9 von neun und die Curve des 10. Falles von acht Constanten ab.

Zugleich liegt die analytische Unterscheidung dieser verschiedenen Fälle vor. So bezieht sich zum Beispiel die Gleichung:

$$p^2p^2 + \vartheta p^2t^2 + \zeta q^2t^2 + pqt\{\gamma q + \delta t + \sigma t\} = o,$$

auf den ersten Fall dreier eigentlichen Doppelpuncte, wenn,

$$\gamma^2 > 4\zeta, \qquad \delta^2 > 4\vartheta, \qquad \sigma^2 > 4\zeta\vartheta;$$

und auf den vierten Fall dreier isolirten Puncte, wenn

$$\gamma^2 < 4\zeta, \qquad \delta^2 < 4\vartheta, \qquad \sigma^2 < 4\zeta\vartheta.$$

In dem zehnten Falle dreier Spitzen ergibt sich die folgende allgemeine Form mit den nothwendigen Constanten:

$$p^2q^2 + \nu^2p^2t^2 + \mu^2q^2t^2 + 2pqt\{\mu q + \nu p \pm \mu\nu t\} = o.$$

In dieser Gleichung müssen wir nur das untere Zeichen beibehalten, weil, wenn wir das obere Zeichen nehmen, diese Gleichung auch folgendergestalt sich schreiben lässt:

$$\{pq + \nu pt + \mu qt\}^2 = o,$$

woraus folgt, dass alsdann ein System zweier zusammenfallenden Kegelschnitte an die Stelle der Curve vierter Ordnung tritt. In dem Falle dreier Spitzen erhalten wir für die drei Tangenten in diesen die folgenden drei Gleichungen:

$$p + \mu t = o, \qquad q + \nu t = o, \qquad \nu p - \mu q = o;$$

und somit ist der nachstehende Satz bewiesen:

Wenn eine Curve vierter Ordnung drei Spitzen erster Art hat, so schneiden sich die Tangenten in diesen Spitzen, alle drei in demselben Puncte. *)

46. Dieser letzte Satz steht mit einem allgemeinern, mit dem wir uns in dieser Nummer nachträglich beschäftigen wollen, in Beziehung. Wenn wir nemlich die beiden Wurzeln der Gleichung (4) durch $\varkappa$ und $\varkappa'$ bezeichnen, so kommt:

$$\nu\nu'\varkappa\varkappa' = \mu\mu', \qquad (5)$$

und hieraus ist ersichtlich, dass, wenn wir von den dreimal zwei Tangenten der drei Doppelpuncte:

$$\begin{array}{llll} p + \mu t = o, & (A) & p + \mu' t = o, & (A') \\ q + \nu t = o, & (B) & q + \nu' t = o, & (B') \\ p + \varkappa q = o, & (C) & p + \varkappa' q = o, & (C') \end{array}$$

fünf willkührlich annehmen, die sechste dadurch vollkommen bestimmt ist; und zwar ergibt sich hier der folgende Satz:

Wenn eine Curve vierter Ordnung drei Doppelpuncte hat, so umhüllen die sechs Tangenten in diesen Doppelpuncten ein und denselben Kegelschnitt.

---

*) Um diesem Satze seine richtige Stelle anzuweisen, bemerken wir, dass die Polar-Curve einer solchen Curve der vierten Ordnung, welche drei Spitzen erster Art hat, nur von der dritten Ordnung, diese Curve selbst also von der dritten Classe ist. Sie ist nicht die allgemeine Curve dieser Classe, weil ihr an den neun nothwendigen Constanten eine fehlt, womit in Uebereinstimmung ist, dass, während eine Curve der dritten Classe, im Allgemeinen, von der sechsten (aber nie von der fünften) Ordnung ist, die Curve, im vorliegenden Falle, nur bis zur vierten Ordnung ansteigt. Dieser Particularisation entspricht, dass die Curve ihre sechs imaginären Spitzen verloren und statt derselben eine isolirte gerade Linie erhalten hat. Hiernach ist der fragliche Satz durch das Princip der Reciprocität mit dem bekannten Satze verknüpft, „dass eine Curve dritter Ordnung im Allgemeinen drei reelle Wendungspuncte hat, und dass diese in gerader Linie liegen." System: Dritter Abschnitt, § 8.

Um diesen Satz zu beweisen, reicht es hin, zu zeigen, dass die drei Diagonalen irgend eines von den sechs Tangenten gebildeten Sechsecks in demselben Puncte sich schneiden. Solche drei Diagonalen können wir durch die folgenden drei Symbole näher bestimmen:

$$\{A, A'; B', C\}, \qquad \{A', B; C, C'\}, \qquad \{B, B'; C', A\},$$

wobei zum Beispiel das erste Symbol diejenige gerade Linie anzeigt, welche den Punct (A, A'), in welchem die Tangenten A und A' sich schneiden, mit dem Puncte (B', C), in welchem die Tangenten B' und C sich schneiden, verbindet. Für diese drei Diagonalen erhalten wir auf bekannte Weise und zwar unmittelbar, die nachstehenden drei Gleichungen:

$$\mathrm{p} = \varkappa\nu'\mathrm{t},$$
$$\mu'\mathrm{q} = \nu\mathrm{p},$$
$$\mu\mathrm{t} = \varkappa'\mathrm{q}.\ ^{*})$$

Von diesen drei Gleichungen bedingen zwei die dritte und es gehen also die drei bezüglichen geraden Linien durch denselben Punct, weil:

$$\mu\mu' = \varkappa\varkappa'\nu\nu'.$$

Der von den sechs Tangenten umhüllte Kegelschnitt, welcher, von Vorne herein betrachtet, jeder beliebige sein kann, ist characteristisch für die Unterscheidung der verschiedenen Natur der drei Doppelpuncte. Wenn derselbe durch einen dieser drei Doppelpuncte geht, so ist dieser eine Spitze erster Art. Wenn er durch zwei Doppelpuncte geht, so sind diese beiden Spitzen erster Art. In dem Falle, dass er durch alle drei Doppelpuncte geht, löset sich die Curve in ein System zweier mit ihm zusammenfallenden Kegelschnitte auf. Wenn der fragliche Kegelschnitt einen Doppelpunct umschliesst, so ist dieser ein isolirter Punct; liegt der Doppelpunct ausserhalb, so schneiden sich in demselben zwei reelle Zweige der Curve, und man erhält alsdann die Tangenten dieser Zweige im Doppelpuncte, wenn man, von diesem aus, die beiden Tangenten an den Kegelschnitt legt. Wenn, in dem Falle dreier eigentlichen Doppelpuncte, drei Tangenten derselben in einem einzigen Puncte sich schneiden, so schneiden sich auch die drei übrigen in demselben Puncte, wobei alsdann der Kegelschnitt (Curve zweiter Classe) in ein System von zwei Puncten ausartet. Fallen diese beiden Puncte insbesondere zusammen, so sind die drei Doppelpuncten drei Spitzen erster Art. Wenn der fragliche Kegelschnitt imaginär ist, sind die Doppelpuncte isolirte Puncte.

Wenn wir erwägen, dass, wenn von den beiden Tangenten des ersten, zweiten oder dritten Doppelpunctes, eine in das, von den drei geraden Linien P, Q und T gebildete Dreieck hineintritt, die andere nicht, bezüglich das Product $\mu\mu'$, $\nu\nu'$ oder $\varkappa\varkappa'$ negativ ist, sonst immer positiv, so führt uns die Gleichung (5) auch zu folgendem Resultate:

In das von den drei Doppelpuncten einer Curve vierter Ordnung gebildete Dreieck tritt entweder keine Tangente der Curve in einem die-

---

*) Die erste der vorstehenden Gleichungen:

$$\mathrm{p} = \varkappa\nu'\mathrm{t},$$

ist, ihrer Form nach, die allgemeine einer geraden Linie, welche durch den Durchschnitt der Linien A und A' geht; überdiess ergibt sie sich aus den Gleichungen B' und C, wenn wir zwischen denselben die Function q eliminiren, und stellt also diejenige, vollkommen bestimmte, gerade Linie dar, welche auch noch durch den Durchschnitt der beiden, durch diese Gleichungen dargestellten, geraden Linien geht. Ganz ebenso sind die beiden übrigen Gleichungen gebildet worden.

Ueber diese Art der Beweisführung findet man ausführlichere Auskunft in den ersten derjenigen kleinern Abhandlungen, welche von mir, unter dem Titel analytisch geometrische Aphorismen, in dem 10. und 11. Bande des von Herrn Crelle herausgegebenen Journals der Mathematik erschienen sind.

ser Doppelpuncte, oder es tritt in dasselbe eine gerade Anzahl dieser Tangenten hinein.

47. Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, diejenigen Fälle zu unterscheiden, in welchen eine oder mehrere Tangenten der Curve in den Doppelpuncten osculirende sind.

Wenn allein die eine Tangente des ersten Doppelpunctes:

$$p + \mu t = o,$$

eine osculirende sein soll, und wir demnach voraussetzen, dass μ und μ' reell und verschieden sind, so erhalten wir aus der Gleichung (2) die folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\sigma + \mu'(\nu+\nu') = o. \tag{6}$$

Es kann hierbei der zweite Doppelpunct von jeder Art sein und insbesondere auch, wenn $\nu=\nu'$, in eine Spitze übergehen. Soll auch der dritte Doppelpunct eine Spitze bilden, so ergibt sich die neue Bedingung:

$$\sigma^2 = 4\mu\mu'\nu\nu',$$

welche, verbunden mit der Gleichung (6), die folgende gibt:

$$\mu'(\nu+\nu')^2 = 4\mu\nu\nu'.$$

Da keiner der vier Coefficienten μ, μ', ν und ν', ohne dass die Curve ausartet, weder verschwinden noch unendlich werden darf, so ist die letzte Bedingung dann nicht zu erfüllen, wenn $\nu+\nu'=o$ und folglich auch $\sigma=o$. Dieser Fall gehört in die folgende Nummer. Da ferner auch μ und μ' verschieden sind, so kann auch nicht $\nu=\nu'$ sein. Also kann der dritte Doppelpunct nicht mit dem zweiten zugleich in eine Spitze übergehen, wenn der erste Doppelpunct eine osculirende Tangente hat. Hiernach ergibt sich eine Unterart nur in den Fällen 1, 2, 3, 5 und 6 der 45. Nummer.

48. Wenn die beiden Tangenten des ersten Doppelpunctes beide osculirende sein sollen, so kommt:

$$\sigma + \mu'(\nu+\nu') = o, \qquad \sigma + \mu(\nu+\nu') = o,$$

Bedingungs-Gleichungen, welche auch durch die folgenden beiden ersetzt werden können:

$$\sigma = o, \qquad \nu + \nu' = o.$$

In diesem Falle kann, nach der vorigen Nummer, die Curve keine Spitze haben. Die erste der vorstehenden beiden Gleichungen bringt, nach der Gleichung (4), die folgende mit sich:

$$\varkappa + \varkappa' = o.$$

Wenn also die beiden (reellen oder imaginären) Tangenten des ersten Doppelpunctes osculirende sind, so bilden die Tangenten des zweiten mit den Seiten Q und T, und die Tangenten des dritten mit den Seiten P und Q, Systeme von vier Harmonicalen.

Hiernach ergibt sich, insofern ein eigentlicher Doppelpunct zwei osculirende Tangenten hat, eine Unterart in den Fällen 1, 2 und 3, und, wenn es ein isolirter Punct ist, dessen Tangenten osculirende sind, eine Unterart in den Fällen 2, 3 und 4.

49. Wenn eine Tangente des ersten und eine Tangente des zweiten Doppelpunctes osculirende sind, so kommt:

$$\sigma + \mu'(\nu+\nu') = o, \qquad \sigma + \nu'(\mu+\mu') = o,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\mu'}{\nu'} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Aus der Verbindung der Gleichungen der beiden osculirenden Tangenten:

$$p + \mu t = o, \qquad q + \nu t = o,$$

ergibt sich die folgende:

$$p = \frac{\mu}{\nu} \cdot q,$$

und aus den Gleichungen der beiden nicht osculirenden Tangenten:

$$p = \frac{\mu'}{\nu'} \cdot q.$$

Da die letzten beiden Gleichungen identisch sind, gelangen wir zu dem folgenden Resultate.

Wenn jeder von zwei der drei Doppelpuncte einer Curve vierter Ordnung eine osculirende Tangente hat, so liegt der Durchschnitt der beiden osculirenden Tangenten und der Durchschnitt der beiden nicht osculirenden Tangenten mit dem dritten Doppelpuncte in gerader Linie.

Der dritte Doppelpunct kann von jeder Art und insbesondere auch eine Spitze sein; denn die obigen beiden Bedingungs-Gleichungen sind mit der folgenden:

$$\sigma^2 = 4\mu\mu'\nu\nu',$$

nicht im Widerspruche. Es ergibt sich hiernach eine Unterart in den Fällen 1, 2 und 5.

50. Wenn endlich die beiden Tangenten des ersten und zugleich eine Tangente des zweiten Doppelpunctes osculirende sind, so kommt:

$$\sigma = o, \quad \mu + \mu' = o, \quad \nu + \nu' = o, \quad \varkappa + \varkappa' = o,$$

oder, gleichbedeutend hiermit:

$$\sigma = o, \quad \delta = o, \quad \gamma = o.$$

Es ist, schon aus der Symmetrie dieser Bedingungs-Gleichungen in Beziehung auf die drei linearen Functionen p, q und t, klar, dass alsdann die Tangenten der drei Doppelpuncte alle sechs osculirende sind.

Wenn die Werthenpaare μ und μ', ν und ν' beide reell oder auch beide imaginär sind, so ist:

$$\sigma^2 - 4\mu\mu'\nu\nu' \equiv -(2\mu\nu)^2 < o,$$

der dritte Doppelpunct also ein isolirter. Wenn hiernach unter den drei Doppelpuncten mit osculirenden Tangenten zwei eigentliche Doppelpuncte sich befinden, so ist der dritte nothwendig ein isolirter Punct; wenn zwei Puncte isolirte sind, so sind alle drei isolirte. Andere Fälle als diese beiden gibt es nicht. Somit eine Unterart in den Fällen 2 und 4.

Die Gleichung der Curve, welche hier nur noch acht Constante behalten hat, ist die folgende:

$$p^2q^2 + \vartheta p^2t^2 + \zeta q^2t^2 = o. \tag{7}$$

Diese Form ist, so lange die Curve drei gegebene Puncte zu Doppelpuncten haben soll, keiner Particularisation mehr fähig. Alle verschiedenen Fälle sind in dem Vorstehenden erschöpft. Da bei dem Uebergange von der allgemeinen Gleichung (1) zu der Gleichung (7) die Anzahl der Constanten sich nur um drei, von elf auf acht, vermindert hat, so gibt es zwischen dem von zehn Constanten abhängenden Falle, dass eine der sechs Tangenten eine osculirende ist (47), und dem Falle, dass alle sechs osculirende sind, nur einen Uebergangs-Fall mit neun Constanten, denjenigen nemlich, dass zwei Tangenten osculirende sind, sei es nun, dass diese beiden Tangenten demselben Doppelpuncte (48) oder zwei verschiedenen Doppelpuncten (49) angehören. Insbesondere ist es nicht möglich, dass jeder der drei Doppelpuncte eine osculirende und eine gewöhnliche Tangente hat; denn das Vorhandensein von bloss zwei osculirenden Tangenten reducirt die Constanten-Anzahl schon auf neun und das Vorhandensein der dritten fordert eine Reduction auf acht, welche aber schon hinreichend ist für den Fall (der den fraglichen einschliessen müsste), dass alle sechs Tangenten osculirende sind. —

§. 3.

Ueber die Natur der singulären Puncte und singulären geraden Linien, und über die Art ihrer Entstehung.

51. Wir können uns eine Curve auf zwei verschiedene Arten, zwischen welchen eine vollständige Analogie Statt findet, beschrieben denken und sie demgemäss auch auf zwiefache Art analytisch darstellen. Bei der ersten Bestimmungsweise denken wir uns dieselbe durch einen sich bewegenden Punct beschrieben, bei der zweiten durch eine sich bewegende gerade Linie umhüllt. In dem ersten Falle bleibt der beschreibende Punct (der hier keineswegs als ein verschwindendes Oval anzusehen ist) derselbe, wenn wir ihn um sich selbst drehen; es kann, bei einem einzelnen Puncte, von einer bestimmten Richtung keine Rede sein; denn alle, durch denselben gehenden, geraden Linien stehen zu ihm in gleicher Beziehung. In dem zweiten Falle bleibt die umhüllende gerade Linie unverändert dieselbe, wenn wir sie nach ihrer Richtung beliebig fortrücken; es kann von einer absoluten Lage derselben keine Rede sein, denn ihre Puncte sind von einander auf keine Weise unterschieden. Erst wenn der beschreibende Punct fortrückt, wird eine Richtung bestimmt; diejenige Richtung, welche einem unendlich kleinen Fortrücken entspricht, bestimmt die Tangenten der beschriebenen Curve. Erst wenn die umhüllende gerade Linie ihre Lage ändert, wird ein Punct bestimmt, weil eine solche Lagen-Aenderung als eine Drehung um einen bestimmten Punct angesehen werden kann; einer unendlich kleinen Drehung der umhüllenden geraden Linie entsprechen die Puncte der umhüllten Curve. Wir können hiernach bei einem ohne Singularitäten fortschreitenden Curven-Zweige, einem elliptischen oder hyperbolischen Bogen zum Beispiel, die zwiefache Bestimmungsweise vereinigen: denn ein solcher Zweig wird zugleich von seinen Tangenten umhüllt und von den Berührungspuncten auf denselben beschrieben. Und hiermit gewinnen wir die folgende Anschauung von der allgemeinen Entstehung einer Curve:

Wenn auf einer geraden Linie ein Punct continuirlich fortrückt, während die gerade Linie selbst um diesen Punct sich continuirlich dreht, wird ein und dieselbe Curve von jener geraden Linie umhüllt und von diesem Puncte beschrieben.

Fig. I, 1. Wenn das sich Drehen der geraden Linie und das Fortrücken des Punctes discontinuirlich ist, so wird die Curve durch ein Polygon vertreten. Hierbei denken wir uns also eine gerade Linie AA und auf derselben einen Punct α, um welchen diese gerade Linie sich um einen endlichen Winkel ω dreht, so dass sie, nach der Drehung, die Lage $A'A'$ einnimmt. Auf $A'A'$ rückt der Punct α nach α' fort und dann dreht sich die gerade Linie $A'A'$ um den Punct α', und fällt, nachdem sie den Winkel ω' beschrieben hat, in $A''A''$; wonach der beschreibende Punct auf der geraden Linie $A''A''$ von α' nach α'' fortrückt; dann dreht sich die gerade Linie $A''A''$ um den Punct α'', und fällt, nachdem sie den Winkel ω'' beschrieben hat, in $A'''A'''$, wonach der beschreibende Punct von α'' nach α''' fortrückt, und so weiter.

52. Wir können die geometrischen Betrachtungen der vorigen Nummer leicht auf den analytischen Standpunct übertragen. Wenn wir eine ursprüngliche Lage der umhüllenden geraden Linie, und des beschreibenden Punctes auf ihr, annehmen, (eine Annahme, welche von drei Constanten abhängt,) so bestimmen wir dadurch die **Lage der Curve**. Nennen wir hiernach den veränderlichen Winkel, welchen die umhüllende gerade Linie, in ihren successiven Lagen mit jener ursprünglichen Richtung bildet, x, und den Weg, welchen der beschreibende Punct auf ihr zurückgelegt hat, σ: so wird die **Natur der Curve** durch eine Gleichung zwischen x und σ ausgedrückt. Diese Gleichung sei:

$$x = \varphi(\sigma). \tag{1}$$

Es ist offenbar, dass σ die Länge des Bogens der beschriebenen Curve darstellt.

Wenn wir den Krümmungshalbmesser in den verschiedenen Puncten der Curve ϱ nennen, so hat man bekanntlich $\frac{d\sigma}{dx} = \varrho$. Differentiiren wir hiernach die vorstehende Gleichung, und setzen, der Kürze halber:

$$\frac{1}{\frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma}} \equiv \psi(\sigma),$$

so ergibt sich:

$$\varrho = \psi(\sigma), \tag{2}$$

wonach die Curve, unabhängig von ihrer Lage, durch eine Gleichung zwischen der Länge des Bogens und dem Krümmungshalbmesser ausgedrückt wird. Ebenso können wir auch die Curve durch eine Gleichung zwischen ϱ und x ausdrücken; wir brauchen zu diesem Ende nur σ zwischen den beiden Gleichungen (1) und (2) zu eliminiren.

53. Wenn wir eine Curve, wie gewöhnlich, durch eine Gleichung zwischen linearen Punct-Coordinaten darstellen, so denken wir uns dieselbe durch die Bewegung eines Punctes beschrieben und können dabei auf die umhüllende gerade Linie unmittelbar keine Rücksicht nehmen. Wenn wir andrerseits die Curve durch eine Gleichung zwischen linearen Linien-Coordinaten darstellen, so denken wir uns dieselbe durch die Bewegung einer geraden Linie umhüllt und können dabei auf den beschreibenden Punct unmittelbar keine Rücksicht nehmen. *)

Wenn man auf dem Umfange einer Curve einen Punct beliebig annimmt, so gibt es, im Allgemeinen, eine einzige Tangente der Curve in diesem Puncte, und diese Tangente schneidet die Curve so, dass von den Durchschnitten zwei in dem angenommenen Puncte zusammenfallen. Und ebenso, wenn man eine Tangente der Curve beliebig annimmt, so gibt es auf dieser Tangente, im Allgemeinen, einen einzigen Berührungspunct und von den Tangenten der Curve, welche durch diesen Punct gehen, fallen zwei in die angenommene Tangente zusammen. Aber hier hört die vollständige Uebereinstimmung in Beziehung auf die zwiefache Entstehungsweise der Curven auf. Denn es gibt keine Curve, die durch eine Gleichung von einem höhern Grade zwischen Punct-Coordinaten dargestellt wird, von der Beschaffenheit, dass man nicht:

1) eine gewisse Anzahl von reellen oder imaginären Puncten auf ihrem Umfange so auswählen kann, dass auf der Tangente in einem solchen Puncte drei Durchschnitte zusammenfallen;

2) dass nicht eine gewisse Anzahl von reellen oder imaginären geraden Linien zwei (reelle oder imaginäre) Zweige der Curve zugleich berühren.

Und es gibt andrerseits keine Curve, welche durch eine Gleichung eines höhern Grades zwischen Linien-Coordinaten dargestellt wird, von der Art, dass man nicht:

1) eine gewisse Anzahl von reellen oder imaginären Tangenten so auswählen kann, dass von den Tangenten, welche von dem Berührungspuncte aus an die Curve sich legen lassen, drei in eine so ausgewählte zusammenfallen;

2) dass nicht durch denselben reellen oder imaginären Punct zwei verschiedene, entweder reelle oder imaginäre, Zweige der Curve gehen.

Mit andern Worten also, es hat eine algebraische Curve, vorausgesetzt, dass sie von einer höhern Ordnung als der zweiten ist, im Allgemeinen entweder Wendungspuncte

*) System. Erster Abschnitt, §. 2.

(Rückkehr-Tangenten) und Doppeltangenten, oder Rückkehrpuncte (Wendungs-Tangenten) und Doppelpuncte. Nur in untergeordneten Fällen findet Beides zugleich Statt.

Diese Betrachtungen führen zu der nicht unwichtigen Bemerkung, dass wir einseitig verfahren, wenn wir für die allgemeinen algebraischen Curven diejenigen nehmen, welche, wenn p und q beliebige lineare Punct-Coordinaten (gewöhnliche Parallel-Coordinaten, wenn wir wollen) bedeuten, und φ die allgemeine algebraische Function bezeichnet, durch die Gleichung:

$$\varphi(q,p) = o,$$

dargestellt werden. Denn warum soll eine Curve im Allgemeinen Doppeltangenten und keine Doppelpuncte, warum soll sie Rückkehrtangenten und keine Rückkehrpuncte haben? Alles dreht sich um, wenn wir in der vorstehenden Gleichung die Punct-Coordinaten mit Linien-Coordinaten vertauschen. Und überdiess, zwei reciproke Curven haben, eben weil ihre Beziehung zu einander eine ganz gegenseitige ist, und beide von einer gleichen Anzahl von Constanten abhängen, gleichen Anspruch auf Allgemeinheit. Warum sollen wir als Normal-Curven diejenigen betrachten, welche Doppeltangenten und Rückkehrtangenten haben, vorzugsweise von ihren reciproken Curven mit Doppelpuncten und Rückkehrpuncten? Was für jene das Allgemeine ist, ist für diese ein Singuläres, und, umgekehrt, was für jene ein Singuläres ist, ist für diese das Allgemeine.

54. Wenn eine vorliegende Curve eine Doppeltangente hat, so ist diess nicht als eine Singularität zu betrachten, sobald wir uns die Curve durch einen Punct beschrieben denken; eben so wenig kann es für eine Singularität gelten, wenn eine vorliegende Curve einen Doppelpunct hat, sobald wir uns die Curve durch die Bewegung einer geraden Linie umhüllt denken. Eine Doppeltangente ist indess eine Singularität in der zweiten, ein Doppelpunct eine Singularität in der ersten Entstehungsweise. In dem erstgenannten Falle fallen zwei Lagen der umhüllenden geraden Linie, in dem andern Falle zwei Lagen des beschreibenden Punctes zusammen; wodurch eine Particularisation bedingt wird. Wenn wir aber die Curve in ihrer Entstehung betrachten, so sind weder bei der ersten, noch bei der zweiten Erzeugungsweise Doppelpuncte und Doppeltangenten als Singularitäten anzusehen, denn, ob später der beschreibende Punct oder die umhüllende gerade Linie eine frühere Lage von Neuem einnimmt, kann dann nicht in Betracht kommen. Hiernach beziehen sich die Singularitäten im engern Sinne auf einen einzelnen Zweig, und diese wollen wir in diesem Paragraphen näher ins Auge fassen.

55. Nach der Anschauungsweise der 51. Nummer dreht sich die umhüllende gerade Linie, während zugleich der beschreibende Punct sich fortbewegt. Es kann hiernach erstens in der Fortbewegung des Punctes eine Singularität eintreten; es kann diess zweitens in der Drehung der geraden Linie geschehen und endlich kann drittens Beides zugleich Statt finden. Diesem entsprechend erhalten wir drei Arten von Singularitäten in dem Laufe der entstehenden Curven.

1) Es kann der beschreibende Punct in seiner continuirlichen Bewegung eine Gränz-Lage erreichen und dann, was der gewöhnliche Fall ist, nach entgegengesetzter Richtung sich fortbewegen. Bietet alsdann die Bewegung der umhüllenden geraden Linie gleichzeitig keine Singularität dar, so erhält die entstehende Curve einen Rückkehrpunct (eine Spitze) erster Art. Die umhüllende gerade Linie tritt hierbei, indem sie fortfährt, continuirlich sich zu drehen, auf die entgegengesetzte Seite des Rückkehrpunctes hinüber.

2) Es kann die umhüllende gerade Linie bei ihrer continuirlichen Drehung eine Gränz-Lage erreichen und dann, was der gewöhnliche Fall ist, in entgegengesetztem Sinne sich

zu drehen fortfahren. Bietet alsdann das Fortrücken des beschreibenden Punctes keine Singularität dar, so erhält die entstehende Curve eine Rückkehrtangente. Der beschreibende Punct wendet sich hierbei auf die entgegengesetzte Seite der Rückkehrtangente und wird ein Wendungspunct der Curve.

3) Wenn zugleich die umhüllende gerade Linie in ihrer Drehung und der beschreibende Punct in seinem Fortrücken eine Gränz-Lage erreichen und dann, was der gewöhnliche Fall ist, beide in entgegengesetztem Sinne sich weiter bewegen, so erhält die Curve eine Spitze zweiter Art.

56. Wir wollen wiederum, um die vorstehenden Betrachtungen anschaulicher zu machen und zu ergänzen, die Curve durch ein Polygon ersetzen.

In der Figur II, 1. ist die das Polygon umhüllende gerade Linie von der Lage AA_0 zu der Lage $A'A'_0$ fortgerückt, indem sie immer in demselben Sinne sich gedreht hat, so dass die Erstreckung von A nach A_0 der Erstreckung von A' nach A'_0 entspricht. Der beschreibende Punct aber ist, indem er nach einander die Lagen a_3, a_2, a_1 und a angenommen hat, auf der umhüllenden geraden Linie von A nach A_0 fortgerückt, hat in a die Richtung seiner Bewegung umgekehrt und dann nach einander, von A_0 nach A fortrückend, die Lagen a^1, a^2, a^3 eingenommen. Wenn die Bewegung des Punctes in eine continuirliche übergeht, so geht die Geschwindigkeit desselben, indem er die Richtung seiner Bewegung umkehrt, durch Null hindurch. Hiernach nehmen die Elementar-Seiten des Polygons a_3a_2, a_2a_1, a_1a bis zum Puncte a immer mehr ab. In diesem Puncte verschwindet ihre Länge gegen die Länge der frühern Seiten. Ueber diesen Punct hinaus wächst ihre Länge wieder. Da während dessen die Aenderung der Richtung der Polygon-Seiten mit den frühern Aenderungen derselben immer vergleichbar bleibt, so ist klar, dass der Krümmungshalbmesser in dem Puncte a, der eine Spitze erster Art wird, verschwindet. Fig. II, 1.

Wenn die umhüllende gerade Linie, wie in dem eben betrachteten Falle, immer in demselben Sinne von der Lage AA_0 nach der Lage $A'A'_0$ sich fortbewegt und der beschreibende Punct, auf ihr nach derselben Richtung fortrückend, nach einander die Lagen a_3, a_2, a_1, a_0 einnimmt, dann seine Richtung umkehrend die Polygon-Seite a_0a^0 durchläuft, in a^0 seine Richtung wiederum umkehrt, und in demselben Sinne als ursprünglich fortrückend, nach einander die Lagen a^1, a^2, a^3 einnimmt, so entsteht die Polygon-Form der Figur III, 1. Geht die Bewegung in eine continuirliche über, so werden die an a_0a^0 anstossenden Elementar-Seiten des Polygons unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung. Der Krümmungshalbmesser wird dadurch ein unendlich Kleines derselben Ordnung. Die Zuckung des beschreibenden Punctes ist unendlich klein und, indem ihre Spur dem Auge entgeht, verwandelt sich das Polygon in einen nach demselben Sinne gekrümmten Bogen einer Curve. Fig. III, 1.

Aendert der beschreibende Punct dreimal nach einander die Richtung seines Fortrückens, während die umhüllende gerade Linie continuirlich sich dreht, so entsteht, indem der Punct zuletzt die, der ursprünglichen entgegengesetzte, Richtung behält, ein Polygon, welches, zu beiden Seiten der entsprechenden Singularität, die convexen Seiten einander zukehrt. Wird die Bewegung des Punctes eine continuirliche, so werden die Elementar-Seiten des Polygons unendlich kleine Grössen der dritten Ordnung. Von derselben Ordnung ist alsdann der Krümmungshalbmesser. Die Curve, in welche alsdann das Polygon übergeht, bildet, indem von den Zuckungen des beschreibenden Punctes für das Auge jede Spur verschwindet, eine Spitze erster Art.

Ueberhaupt entsteht, wenn die umhüllende gerade Linie immer in demselben Sinne sich fortdreht, während der beschreibende Punct n Mal nach einander seine Bewegung ändert, ein Polygon, dessen Zweige vor und nach der Singularität entweder

ihre beiden concaven oder ihre beiden convexen Seiten einander zukehren, je nachdem n entweder eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet. Diesem entspricht, wenn die Bewegung eine continuirliche wird, eine Curve, die einen singulären Punct hat, in welchem der Krümmungshalbmesser ein unendlich Kleines von der n. Ordnung ist. Die Curve bietet in dem ersten Falle dem Auge keine Singularität dar, während sie, in dem zweiten Falle, eine Spitze erster Art bildet.

Fig. I, 2. **57.** Wenn der beschreibende Punct auf der umhüllenden geraden Linie immer nach derselben Richtung fortrückt, diese gerade Linie aber von der ursprünglichen Lage $A_,A_,$ bis zur Lage AA in demselben Sinne, dann aber von AA bis A'A' in entgegengesetztem Sinne sich dreht, so erhalten wir die Polygon-Form der Figur (I, 2.). Wird die Bewegung eine continuirliche, so geht die Grösse der Drehung, indem diese ihren Sinn ändert, durch Null hindurch; während die Elementar-Seiten der Curve mit den frühern und spätern vergleichbar bleiben, werden an AA die Contingenz-Winkel ω gegen die frühern und spätern unendlich klein. Es wird der Krümmungshalbmesser unendlich gross. AA wird eine Rückkehrtangente, der Berührungspunct auf ihr ein Wendungspunct der Curve.

Fig. I, 3. Wenn die umhüllende gerade Linie zweimal nacheinander den Sinn ihrer Drehung ändert, in A_0A_0 und A^0A^0, so erhalten wir die Polygon-Form der Figur (I, 3.), wobei die beiden Polygon-Zweige vor und nach der Singularität ihre concaven Seiten einander zukehren, wie wenn keine Singularität vorhanden wäre. Wird die Bewegung eine continuirliche, so wird der Contingenz-Winkel auf der singulären geraden Linie ein unendlich Kleines der dritten Ordnung, mithin der Krümmungshalbmesser ein unendlich Grosses der zweiten Ordnung. Weil die Oscillationen der umhüllenden geraden Linie unendlich klein werden, verliert das Auge die Spur der Singularität.

Aendert die umhüllende gerade Linie dreimal nach einander den Sinn ihrer Drehung, während der beschreibende Punct continuirlich fortrückt, so ist vor und nach der Singularität der Sinn der Drehung entgegengesetzt. Wird die Bewegung eine continuirliche, so erhält die entstehende Curve einen Wendungspunct und in demselben ist der Krümmungshalbmesser ein unendlich Grosses der dritten Ordnung.

Ueberhaupt entsteht, wenn der beschreibende Punct auf der umhüllenden geraden Linie immer nach derselben Richtung sich fortbewegt, während diese n Mal nach einander den Sinn ihrer Drehung ändert, ein Polygon, dessen Zweige vor und nach der Singularität entweder in demselben oder in entgegengesetztem Sinne gekehrt sind, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet. Geht das Polygon in eine Curve über, so hat diese eine singuläre gerade Linie, auf welcher der Krümmungshalbmesser ein unendlich Grosses der n. Ordnung ist. Die Curve bietet entweder dem Auge keine Singularität dar, oder sie hat einen Wendungspunct, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet.

Fig. II, 2. **58.** Wenn die umhüllende gerade Linie, von ihrer ursprünglichen Lage $A_,A_,$ aus, nach A'A' fortrückend, indem sie die Lage AA einnimmt, den Sinn ihrer Drehung ändert, während zugleich der beschreibende Punct von α_3 bis α nach derselben Richtung fortrückt, dann in α auf AA seine Richtung ändert, und endlich nach entgegengesetzter Richtung fortrückt: so entsteht ein Polygon (Fig. II, 2.), das zwei solche Zweige hat, die in α, wo sie zusammenstossen, die convexen Seiten einander zukehren. Wird die Bewegung eine continuirliche, so werden die Elementar-Seiten sowohl als die Contingenz-Winkel unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung, bleiben dabei aber mit einander gegenseitig vergleichbar. Folglich ist der Krümmungs-Halbmesser endlich. Die Curve bildet eine Spitze zweiter Art.

Wenn die umhüllende gerade Linie dreimal nach einander den Sinn ihrer Drehung und

zugleich der beschreibende Punct dreimal nach einander die Richtung seines Fortschreitens ändert, so entsteht eine ähnliche Polygon-Form. Wie vorhin, behält die entsprechende Curve einen endlichen Krümmungshalbmesser, weil die Elementar-Seiten und Contingenz-Winkel, als unendlich kleine Grössen der dritten Ordnung, unter einander vergleichbar bleiben. Sie hat wiederum eine Spitze zweiter Art.

Wenn die umhüllende gerade Linie dreimal nach einander den Sinn ihrer Drehung und zugleich der beschreibende Punct einmal die Richtung seines Fortschreitens ändert, so entsteht die Polygon-Form der Figur (II, 4.); ändert jene den Sinn ihrer Drehung einmal, während dieser dreimal auf seinem Wege umkehrt, so entsteht die Polygon-Form der Figur (IV, 2.). In beiden Fällen hat die Curve eine Spitze zweiter Art, mit dem Unterschiede jedoch, dass einmal der Krümmungshalbmesser unendlich gross, das andere Mal unendlich klein ist. Fig II, 4.—IV, 2.

59. Wir wenden uns nun zu dem allgemeinen Falle, dass zugleich eine $(m-1)$malige Drehungs-Aenderung der umhüllenden geraden Linie und eine $(n-1)$malige Umkehrung in der Bewegung des beschreibenden Punctes Statt findet. Wir gelangen alsdann leicht zu der nachstehenden vierfachen Unterscheidung:

1) Wenn m und n beide ungerade Zahlen bedeuten, so verbirgt sich die Singularität dem Auge.

2) Wenn m eine ungerade und n eine gerade Zahl bedeutet, so bildet die Curve eine Spitze erster Art.

3) Wenn m eine gerade und n eine ungerade Zahl bedeutet, so hat die Curve eine Wendung.

4) Wenn m und n beide gerade Zahlen bedeuten, so bildet die Curve eine Spitze zweiter Art.

In allen diesen Fällen ist der Krümmungshalbmesser der Curve in dem fraglichen Puncte unendlich gross oder unendlich klein, je nachdem m grösser oder kleiner als n ist.

60. Wir wollen die in der vorigen Nummer betrachteten Singularitäten als Singularitäten der n. Ordnung und der m. Classe bezeichnen, so dass, wenn $n=1$, das Singuläre in der Bewegung des beschreibenden Punctes und, wenn $m=1$, das Singuläre in der Bewegung der umhüllenden geraden Linie wegfällt. Die Singularität ist eine maskirte, wenn m und n ungerade Zahlen bedeuten. Jede Spitze erster Art ist eine Singularität von gerader Ordnung und ungerader Classe. Jede Wendung der Curve ist eine Singularität von ungerader Ordnung und gerader Classe. Jede Spitze zweiter Art ist eine Singularität von gerader Ordnung und gerader Classe. In allen diesen Fällen ist der Krümmungshalbmesser unendlich gross oder unendlich klein, je nachdem die Classe oder die Ordnung der Singularität eine höhere ist.

61. Um die letzten Entwicklungen analytisch darzustellen, wollen wir den Begriff der Zeit einführen und diese durch τ bezeichnen. Alsdann erhalten wir, um die fortschreitende Bewegung des Punctes auszudrücken, eine Gleichung von der Form:

$$\sigma = \Phi(\tau),$$

und um die Drehung der geraden Linie auszudrücken, eine Gleichung von der Form:

$$\varkappa = \Psi(\tau).$$

Differentiiren wir die vorstehenden beiden Gleichungen, so kommt:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \Phi'(\tau), \qquad \frac{d\varkappa}{d\tau} = \Psi'(\tau),$$

mithin:

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\varkappa} = \frac{\Phi'(\tau)}{\Psi'(\tau)}.$$

Also, in Worten ausgedrückt:

Der Krümmungshalbmesser einer Curve ist gleich dem Quotienten, den man erhält, wenn man die Geschwindigkeit des beschreibenden Punctes durch die Winkel-Geschwindigkeit der umhüllenden geraden Linie dividirt.

Wir können τ als unabhängige veränderliche Grösse und demnach $d\tau$ als constant betrachten. Wenn dann für irgend einen Werth von τ einer der beiden Differential-Quotienten $\frac{d\sigma}{d\tau}$ und $\frac{d\varkappa}{d\tau}$ verschwindet, oder wenn beide zugleich verschwinden, so erhält die Curve eine Singularität. Wenn, für den besondern Werth von τ, die ersten nicht verschwindenden Differential-Quotienten der beiden Functionen σ und $\varkappa$ die folgenden beiden sind:

$$\frac{d^n\sigma}{d\tau^n} \text{ und } \frac{d^m\sigma}{d\tau^m},$$

so ist die fragliche Singularität von der n. Ordnung und der m. Classe, und also, in Uebereinstimmung mit der 59. Nummer, ϱ so lange unendlich gross oder unendlich klein, als nicht $n=m$. In diesem Falle ergibt sich für ϱ der endliche Werth:

$$\varrho = \frac{\frac{d^n\Phi(\tau)}{d\tau^n}}{\frac{d^n\Psi(\tau)}{d\tau^n}}.$$

Wenn $m>n$, so ist ϱ in Beziehung auf τ unendlich gross und von der Ordnung $(m-n)$. In Beziehung auf σ beträgt diese Ordnung daher $\frac{m-n}{n}$. Wenn hingegen $n>m$ so ist ϱ, in Beziehung auf σ, ein unendlich Kleines von der Ordnung $\frac{n-m}{n}$. *)

---

*) In zwei verschiedenen Schriften, die gleichzeitig und unabhängig von einander erschienen sind, ist die Entstehung und analytische Darstellung der Curven auf eine Art betrachtet worden, die mit der im Texte entwickelten Anschauungsweise im Wesentlichen übereinstimmt.

Neue Curvenlehre. Grundzüge einer Umgestaltung der höhern Geometrie durch ihre ursprüngliche analytische Methode. Von Adolf Peters. 1835.

Novae theoriae linearum curvarum originariae et vere scientificae specimina quinque prima. Auct. C. C. F. Krause. Edidit Schröder. 1835.

Der vorstehende Paragraph ist unabhängig von diesen beiden Schriften niedergeschrieben worden; nur in die erste derselben habe ich, in Folge einer zufälligen gütigen Mittheilung, im Augenblicke des Druckes dieses Paragraphen einen Blick geworfen. Das Sachliche, was diese Schrift enthält, scheint mir nicht eigentlich neu, weil schon vor einer Reihe von Jahren H. Gergonne in den „Annales de mathématiques" seine Untersuchungen, wie man eine Curve, unabhängig von ihrer Lage, darstellen kann, mitgetheilt hat. Was das Formelle betrifft, so verkenne ich keineswegs, dass, bei dem Auffinden von etwas Neuem, ein namhafter Unterschied darin liegt, ob man die Wichtigkeit des Aufgefundenen erkennt oder nicht. Ueber diese Wichtigkeit selbst aber kann ich die Ansicht des Verfassers einstweilen nicht theilen.

Eine der schönsten Erweiterungen der neuern Geometrie beruht auf der Unterscheidung, dass wir uns eine Curve einmal bloss durch die Bewegung eines Punctes, das andere Mal bloss durch die Bewegung einer geraden Linie beschrieben denken können. Einmal brauchen wir, um zum Begriff einer Curve zu gelangen, durchaus nicht den Begriff einer geraden Linie (wenn ein, den Punct vertretender, Stift die Curve zeichnet); das andere Mal brauchen wir hierzu durchaus nicht

62. In zwei reciproken Curven entsprechen Singularitäten sich in der Art, dass (was aus den vorhergehenden Betrachtungen unmittelbar folgt) eine Singularität der n. Ordnung und der m. Classe, einer der beiden Curven eine Singularität der m. Ordnung und der n. Classe der andern Curve bedingt. Also entsprechen sich gegenseitig:

1) zwei Spitzen zweiter Art;

2) zwei Zweige, deren jeder nur in einem einzigen Sinne sich krümmt und dem Auge keine Singularität darbietet, wenn m und n beide ungerade sind. Das Product der beiden Krümmungshalbmesser in solchen zwei sich entsprechenden singulären Puncten ist einer endlichen Grösse gleich;

3) eine Spitze erster Art und ein Wendungspunct, wenn von den beiden Zahlen m und n eine gerade und die andere ungerade ist. Wenn der Krümmungshalbmesser für die erstere unendlich klein ist, so ist er für die letztere unendlich gross und umgekehrt. Das Product zweier solchen Krümmungshalbmesser ist immer einer endlichen Grösse gleich. —

§. 4.

Gegenseitige Beziehung der singulären Puncte und singulären geraden Linien zu einander. Gesetze, nach welchen, bei algebraischen Curven, die Anzahl von jenen durch die Anzahl von diesen, und umgekehrt, bestimmt ist.

63. Das Princip der Reciprocität gibt unerwartete Aufschlüsse über die Theorie der singulären Puncte. Diejenigen Resultate, welche ich hierüber bereits mitgetheilt habe *), will ich in der gegenwärtigen Nummer summarisch zusammenfassen, und dann denselben Gegenstand nach allen Seiten hin vollständig discutiren.

Es lassen sich bekanntlich an eine Curve der n. Ordnung Ω_n durch einen gegebenen Punct oder auch parallel mit einer gegebenen geraden Linie, im Allgemeinen, $n(n-1)$ Tangenten legen. Die Ordnung der Polar-Curve Ω_m, oder, wenn wir lieber wollen, die Classe

---

den Begriff eines Punctes (wenn ein, die gerade Linie vertretendes, Lineal, indem es im Sande continuirlich sich bewegt und diesen fortschiebt, eine Curve bildet). Das Princip der Reciprocität ist das Band, welches diese doppelte Auffassungsweise verknüpft. Um die Lage und die Bewegung eines Punctes auszudrücken, brauchen wir irgend ein festes, beliebig anzunehmendes Coordinaten-System, auf welches Alles bezogen werden muss, und somit ist in der analytischen Darstellung einer Curve zugleich ihre eigentliche Natur und ihre Lage ausgedrückt. Dasselbe gilt, wenn wir die Lage und Bewegung einer geraden Linie bestimmen wollen. Es ist ein Vortheil dabei, wenn wir in der Gleichung der Curven nicht bloss ihre Natur, sondern zugleich auch ihre Lage erkennen können: sobald nur jedes unabhängig für sich geschehen kann und eines das andere nicht stört. Dieses wird durch unsere Methode vollständig erreicht und hierin liegt das, was sie von der gewöhnlichen Coordinaten-Methode unterscheidet.

Wenn wir bei der Entstehung einer Curve zugleich die umhüllende gerade Linie und den beschreibenden Punct ins Auge fassen, so können wir die Drehung der geraden Linie als eine Function des Fortschreitens des Punctes betrachten und erhalten alsdann, gleichsam als Corollarium, die Auffassungsweise des vorstehenden Textes.

Es knüpfen sich an diesen Gegenstand Fragen an, welche ein besonderes Interesse gewähren, die ich aber weiter nicht berühre, weil ich sie hier nicht erschöpfend behandeln kann. Das Discontinuirliche, was beim Uebergange von einer der beiden coordinirten Haupt-Entstehungsarten einer Curve zu der der andern Statt findet, besteht natürlich auch beim Uebergange zu der intermediären Entstehungsweise.

*) System, 298 und 330.

der gegebenen Curve, die wir als die m. bezeichnen wollen, ist hiernach, im Allgemeinen, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$m = n(n-1).$$

Die Polar-Curve Ω_m ist aber, wenn wir uns dieselbe als von einem Puncte beschrieben (durch eine Gleichung zwischen gewöhnlichen Punct-Coordinaten dargestellt) denken, von einer besondern Art. Sie hat, was bei einer solchen Curve, im Allgemeinen, nicht Statt findet, eine gewisse Anzahl von Doppelpuncten und Spitzen, bezüglich gleich der Anzahl der Doppeltangenten und Wendungen der gegebenen Curve Ω_n, welche als die allgemeine Curve der n. Ordnung Singularitäten in Beziehung auf die umhüllende gerade Linie hat (51). Ich habe allgemein am angeführten Orte bewiesen, dass eine gegebene Curve der n. Ordnung im Allgemeinen, $3n(n-2)$ Wendungen hat und hieraus geschlossen, dass dieselbe $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten haben muss. Es hat also die Polar-Curve, im Allgemeinen, $3n(n-2)$ Spitzen und $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppelpuncte. Die reciproke Polar-Curve ist die gegebene, um ihre Ordnung durch die Ordnung der ersten Polar-Curve zu bestimmen, müssen wir auf die singulären Puncte dieser letztern Rücksicht nehmen.

Wenn nemlich eine Curve der m. Ordnung einen Doppelpunct hat, so fallen von den $m(m-1)$ Tangenten, welche von einem gegebenen Puncte sich im Allgemeinen an die Curve legen lassen, zwei in diejenige gerade Linie zusammen, welche den gegebenen Punct mit dem Doppelpuncte verbindet. Diese hören auf Tangenten im engern Sinne zu sein, weil sie nicht mehr Lagen der umhüllenden geraden Linie bezeichnen. Sind u Doppelpuncte zugleich vorhanden, so reducirt sich die obige Anzahl der eigentlichen Tangenten um $2u$ Einheiten, und um eine gleiche Anzahl von Einheiten reducirt sich die Ordnung der Polar-Curve. Wenn die Curve m. Ordnung eine Spitze hat, so fallen drei der $m(m-1)$ Tangenten in diejenige gerade Linie zusammen, welche durch den gegebenen Punct und die Spitze geht, wonach die Anzahl der eigentlichen Tangenten sich um drei Einheiten reducirt. Diese Reduction beträgt also, wenn v Spitzen zugleich da sind, $3v$ Einheiten. Folglich ist, wenn eine Curve m. Ordnung u Doppelpuncte und v Spitzen hat, die Ordnung ihrer Polar-Curve

$$m(m-1) - 2u - 3v.$$

Wenn wir also die reciproke Curve der ersten Polar-Curve Ω_m bestimmen, wobei wir auf die gegebene Curve Ω_n, die von der n. Ordnung ist, zurückkommen, so ergibt sich:

$$n = m(m-1) - 2u - 3v.$$

Diese Gleichung geht, wenn wir:

$$m = n(n-1), \qquad v = 3n(n-2), \qquad u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$$

setzen, in eine identische über. Auf diesem Wege haben wir den Werth von u bestimmt.

64. Ich habe endlich bereits schon nachgewiesen, dass, wenn durch eine allmählige Constanten-Aenderung, eine Curve einen Doppelpunct erhält, sie dadurch sechs ihrer Wendungspuncte verliert; dass diese alle sechs imaginär oder dass zwei derselben reell oder vier imaginär sind, je nachdem der entstehende Doppelpunct ein conjugirter Punct, oder ein Durchschnitt zweier reellen Zweige ist; dass endlich, wenn die Curve eine Spitze erhält, acht ihrer Wendungspuncte, von welchen sechs imaginär sind, wegfallen. *) Wenn wir hiernach die Anzahl der Wendungspuncte einer gegebenen Curve der n. Ordnung Ω_n oder die Anzahl der Spitzen ihrer Polar-Curve Ω_m durch v bezeichnen, so kommt, wenn die gegebene Curve x Doppelpuncte und y Spitzen hat:

$$v = 3n(n-2) - 6x - 8y.$$

---

*) Was in der 300. Nummer des Systems zunächst für den Fall der Curven dritter Ordnung bewiesen worden ist, gilt offenbar bei Curven jeder beliebigen Ordnung.

65. **Wenn eine Curve der n. Ordnung einen Doppelpunct hat, so vermindert sich die Anzahl ihrer Doppeltangenten, um die doppelte Anzahl derjenigen Tangenten, welche, von dem Doppelpuncte aus, an die Curve sich legen lassen.** Denn jede solche Tangente ist keine eigentliche Doppeltangente mehr; es fallen auf ihr zwar zweimal zwei Durchschnittspuncte mit der Curve, wenn wir uns dieselbe durch einen Punct beschrieben denken, zusammen, aber nicht mit ihr zwei umhüllende Tangenten der Curve. Wir müssen die Anzahl solcher Tangenten deshalb doppelt in Anschlag bringen, weil die durch einen Doppelpunct gehenden Tangenten überhaupt doppelt gezählt werden müssen; wovon wir die unmittelbare Anschauung gewinnen, wenn wir einen Doppelpunct, je nachdem er ein isolirter Punct oder ein Durchschnitt reeller Zweige ist, uns als ein verschwindendes Oval oder als zwei ihren gemeinschaftlichen Asymptoten immer näher rückenden Hyperbel-Zweige denken.

Die analytische Bestimmung der Anzahl derjenigen Tangenten, welche, von dem Doppelpuncte aus, an die Curve sich legen lassen, bietet keine Schwierigkeit dar. Um zuvörderst auszudrücken, dass eine Curve der n. Ordnung einen Doppelpunct habe und dass dieser Doppelpunct in den Durchschnitt zweier gegebenen geraden Linien P und Q falle, ergibt sich die folgende Form:

$$\Sigma_2 + \Sigma_3 + \cdots + \Sigma_n = 0. \tag{1}$$

Wir bezeichnen hierbei, wie wir es schon in einem frühern Paragraphen gethan haben, die allgemeine homogene Function irgend eines m. Grades zwischen den beiden linearen Functionen p und q:

$$\alpha q^m + \beta q^{m-1} p + \cdots + \nu p^m,$$

der Kürze wegen durch Σ_n. Es stellt alsdann die Gleichung:

$$\Sigma_2 = 0,$$

das System der beiden Tangenten des Doppelpunctes dar, und diese können sowohl reell als als auch imaginär sein. Im ersten Falle schneiden sich im Doppelpuncte zwei reelle Zweige der Curve, in dem zweiten ist er ein conjugirter Punct derselben. Die Gleichung (1) hat zwei überzählige Constanten, welche auf die willkührliche Richtung der beiden geraden Linien P und Q kommen. Wenn wir $\Sigma_2 \equiv pq$ setzen, so sind diese beiden geraden Linien die beiden Tangenten des Doppelpunctes und dann reduciren sich die Constanten auf die gerade nothwendigen $\left(\frac{n(n+3)}{1.2} - 1\right)$. Wir wollen hier indess die Form der Gleichung (1) mit zwei überzähligen Constanten beibehalten. Für die Puncte jeder geraden Linie, welche durch den fraglichen Doppelpunct, den Durchschnitt von P und Q geht, ist:

$$pdq = qdp.$$

Differentiiren wir mit Bezugnahme hierauf die Gleichung (1), so kommt:

$$\left(\frac{d\Sigma_2}{dq} \cdot q + \frac{d\Sigma_2}{dp} \cdot p\right) + \left(\frac{d\Sigma_3}{dq} \cdot q + \frac{d\Sigma_3}{dp} \cdot p\right) + \cdots + \left(\frac{d\Sigma_n}{dq} \cdot q + \frac{d\Sigma_n}{dp} \cdot p\right) = 0.$$

Diese Gleichung muss für die Berührungspuncte auf den, durch den Doppelpunct gehenden, Tangenten befriedigt werden. Es ist aber, nach dem bekannten Theorem über homogene Functionen, überhaupt:

$$\frac{d\Sigma_m}{dq} \cdot q + \frac{d\Sigma_m}{dp} \cdot p \equiv m\Sigma_m,$$

wonach die letzte Gleichung in die folgende übergeht:

$$2\Sigma_2 + 3\Sigma_3 + \cdots + \Sigma_n = 0,$$

und wenn wir sie mit der Gleichung (1) zusammenstellen, zu der nachstehenden führt:

$$(n-2)\Sigma_2 + (n-3)\Sigma_3 + \cdots + \Sigma_{n-1} = 0. \tag{2}$$

Zur Bestimmung der fraglichen Berührungspuncte erhalten wir also die beiden Gleichungen

(1) und (2), von welchen die erste vom n. und die zweite vom $(n-1)$. Grade ist. Beide haben dieselbe Form und beide stellen eine Curve dar, die denselben Doppelpunct und in diesem dieselben beiden geraden Linien zu Tangenten haben. Die Anzahl der Durchschnitte der beiden Curven beträgt $n(n-1)$, von diesen fallen aber sechs auf die gemeinsamen Tangenten des gemeinschaftlichen Doppelpunctes zusammen. Diese kommen bei der Bestimmung der durch den Doppelpunct gehenden Tangenten nicht in Betracht, so dass deren Anzahl sich auf $(n(n-1)-6)$ reducirt. Also vermindert sich die Anzahl der Doppeltangenten der gegebenen Curve, des Doppelpunctes wegen, um

$$2(n(n-1)-6)$$

Einheiten.

66. Die analytischen Entwicklungen der vorigen Nummer bestehen auch dann, wenn die Curve (1), statt des gewöhnlichen Doppelpunctes eine Spitze erster Art hat. Dann hat auch die Curve (2) eine solche Spitze, und die beiden Curven schneiden sich, wenn wir von den in der gemeinsamen Spitze zusammenfallenden Durchschnittspuncten absehen, in so vielen Puncten als in dem allgemeinen Falle. Es lassen sich, wenn eine Curve der n. Ordnung eine Spitze hat, auch von dieser aus, an die Curve $(n(n-1)-6)$ Tangenten legen. Da aber, wenn wir eine durch einen solchen Punct gehende gerade Linie als eine (Pseudo-) Tangente betrachten, diese eine dreifache ist, so reducirt sich die Anzahl der Doppeltangenten einer Curve der n. Ordnung, die eine gewöhnliche Spitze erster Art hat, dieser Spitze wegen, um

$$3(n(n-1)-6)$$

Einheiten.

67. Wenn eine Curve der n. Ordnung x Doppelpuncte hat, so erhalten wir als Reduction der Anzahl ihrer Dppeltangenten $2x(n(n-1)-6)$ weniger der Anzahl der gemeinschaftlichen (Pseudo-) Tangenten je zweier Doppelpuncte, also weniger $4\cdot\frac{x(x-1)}{1.2}$. Die fragliche Reduction beträgt hiernach:

$$2x(n(n-1)-6)-2x(x-1).$$

Wenn eine Curve der n. Ordnung y Spitzen hat, so erhalten wir als Reduction der Anzahl ihrer Dopeltangenten $3y(n(n-1)-6)$, weniger der Anzahl der gemeinschaftlichen (Pseudo-) Tangenten je zweier Rückkehrpuncte, also weniger $9\cdot\frac{y(y-1)}{1.2}$. Die fragliche Reduction beträgt hiernach:

$$3y(n(n-1)-6)-\tfrac{9}{2}y(y-1).$$

Wenn eine Curve der n. Ordnung zugleich x Doppelpuncte und y Spitzen hat, so erhalten wir, als Reduction in der Anzahl ihrer Doppeltangenten, $(2x+3y)(n(n-1)-6)$ weniger der Anzahl der gemeinschaftlichen (Pseudo-) Tangenten je zweier Doppelpuncte, nemlich $2x(x-1)$, je zweier Spitzen, nemlich $\frac{9}{2}y(y-1)$ und jedes Doppelpunctes und jeder Spitze, nemlich $6xy$. Diese vollständige Reduction beträgt also:

$$(2x+3y)(n(n-1)-6)-2x(x-1)-\tfrac{9}{2}y(y-1)-6xy.$$

Wenn wir also hiernach die Anzahl der übrigbleibenden Doppeltangenten durch u bezeichnen, so kommt:

$$u=\tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)-(2x+3y)(n(n-1)-6)+2x(x-1)+\tfrac{9}{2}y(y-1)+6xy.$$

68. Wir wollen, der leichtern Uebersicht wegen, die Resultate der letzten Nummern zusammenstellen. Es bezeichne:

n die Ordnung einer gegebenen Curve und also die Classe ihrer Polar-Curve; oder die Anzahl der Puncte, in welchen die gegebene Curve von einer gegebenen geraden Linie geschnitten wird und also die Anzahl derjenigen umhüllenden Tangenten der Polar-Curve, welche durch einen gegebenen Punct gehen;

m die Classe der gegebenen Curve und also die Ordnung ihrer Polar-Curve; oder auch die Anzahl der umhüllenden Tangenten der gegebenen Curve, welche durch einen gegebenen Punct gehen und also die Anzahl der Durchschnittspuncte einer gegebenen geraden Linie mit der Polar-Curve;

v die Anzahl der Wendungspuncte der gegebenen Curve und also die Anzahl der Spitzen ihrer Polar-Curve;

u die Anzahl der Doppeltangenten der gegebenen und also der Doppelpuncte ihrer Polar-Curve;

y die Anzahl der Spitzen der gegebenen Curve und also der Wendungspuncte ihrer Polar-Curve;

x die Anzahl der Doppelpuncte der gegebenen Curve und also der Doppeltangenten ihrer Polar-Curve.

Alsdann bestehen die folgenden, durch das Princip der Reciprocität paarweise mit einander verknüpften, Gleichungen:

$$m = n(n-1) - 2x - 3y, \quad (1)$$

$$n = m(m-1) - 2u - 3v, \quad (2)$$

$$v = 3n(n-2) - 6x - 8y, \quad (3)$$

$$y = 3m(m-2) - 6u - 8v, \quad (4)$$

$$u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2x+3y)(n(n-1)-6) + 2x(x-1) + \tfrac{9}{2}y(y-1) + 6xy, \quad (5)$$

$$x = \tfrac{1}{2}m(m-2)(m^2-9) - (2u+3v)(m(m-1)-6) + 2u(u-1) + \tfrac{9}{2}v(v-1) + 6uv. \quad (6)$$

Diese sechs Gleichungen sind keinesweges von einander unabhängig. Wenn wir die beiden Gleichungen (1) und (2) mit 3 multipliciren und dann addiren, so erhalten wir dasselbe Resultat, als wenn wir die beiden Gleichungen (3) und (4) addiren. Wenn wir ferner den Werth von m aus der Gleichung (1) nehmen und ihn in (2) einsetzen, so kommt:

$$n = (n(n-1) - 2x - 3y)^2 - (n(n-1) - 2x - 3y) - 2u - 3v,$$

und diese Gleichung wird eine identische, wenn wir aus (3) und (5) die Werthe von v und u nehmen. Und ebenso endlich, wie die Gleichungen (1), (2), (3) und (5) sind auch die Gleichungen (2), (1), (4) und (6) in der Art von einander abhängig, dass drei derselben die vierte bedingen. Wir sehen hieraus insbesondere, dass die vorstehenden Gleichungen alle sechs bloss aus den drei ersten hervorgehen, worin zugleich ein neuer Beweis für die Richtigkeit der beiden letzten Gleichungen liegt.

69. Die Resultate der vorigen Nummer erklären die paradox scheinende Reduction der Ordnung der reciproken Polar-Curve auch in dem Falle vollständig, wo die gegebene Curve Doppelpuncte und Spitzen hat. Wir wollen uns hier auf ein Beispiel beschränken, und als solches eine Curve der 7. Ordnung mit drei Doppelpuncten und vier Spitzen nehmen. Im Allgemeinen hat eine Curve dieser Ordnung 105 Wendungspuncte, welche sich im vorliegenden Falle indess, der drei Doppelpuncte wegen, um $3.6 = 18$, und der vier Spitzen wegen, um $4.8 = 32$ reduciren, so dass die Curve nur noch 55 behält. Eine Curve der 7. Ordnung hat ferner, im Allgemeinen, 700 Doppeltangenten, von diesen fallen, ihrer drei Doppelpuncte und vier Spitzen wegen, $18.36 - 6.2 - 9.6 - 6.12 = 510$ fort, wonach nur 190 übrig bleiben. Die Ordnung der Polar-Curve ist im Allgemeinen $7.6 = 42$, reducirt sich aber hier, der drei Doppelpuncte der gegebenen Curve wegen, um 6 und, der vier Spitzen wegen, um 12 Einheiten, so dass sie auf 24 heruntersinkt. Diese Polar-Curve hat 55 Spitzen und 190 Doppelpuncte. Die Ordnung der reciproken Polar-Curve, wäre, wenn diese Spitzen und Doppelpuncte nicht da wären, $24.23 = 552$, reducirt sich nun aber um $2.190 + 3.55 = 545$, also auf 7, was wirklich die Ordnung der ursprünglich gegebenen Curve war. —

70. Wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung (1) n abziehen und dann mit 3 multipliciren, so kommt:

$$3(m-n) = 3n(n-2) - 6x - 9y,$$

aber nach (3) ist:

$$v - y = 3n(n-2) - 6x - 9y,$$

und somit ergibt sich:

$$m - n = \tfrac{1}{3}(v-y). \tag{7}$$

Der Unterschied der Anzahl der Tangenten, welche, von einem gegebenen Puncte aus, an eine algebraische Curve sich legen lassen und der Anzahl der Puncte, in welchen dieselbe Curve von einer gegebenen geraden Linie geschnitten wird, ist gleich dem dritten Theile des Unterschieds der Anzahl der Wendungspuncte und Spitzen eben dieser Curve.

71. Wenn wir die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander abziehen, so kommt:

$$m^2 - n^2 = 2(u-x) + 3(v-y),$$

und wenn wir $3(m-n)$ statt $(v-y)$ schreiben:

$$(m-n)(m+n-9) = 2(u-x); \tag{8}$$

eine Gleichung, welche eine Relation zwischen m, n, u und x ausdrückt.

Aus den Gleichungen (8) und (7) ergeben sich ferner die folgenden:

$$m + n = 9 + \frac{2(u-x)}{m-n} = \frac{9(v-y) + 6(u-x)}{v-y},$$

$$m - n = \tfrac{1}{3}(v-y),$$

und hieraus folgt:

$$m = \frac{27(v-y) + 18(u-x) + (v-y)^2}{6(v-y)},$$

$$n = \frac{27(v-y) + 18(u-x) - (v-y)^2}{6(v-y)}.$$

Setzen wir endlich die gefundenen Ausdrücke für $(m+n)$ und n in die Gleichung (1), die wir zu diesem Behufe folgendergestalt schreiben können:

$$m + n = n^2 - 2x - 3y,$$

so erhalten wir, nach einer einfachen Reduction:

$$(v-y)^2[(v-y)^2 - 54(v+y) - 36(u+x) + 405] + 756(u-x)(v-y) + 324(u-x)^2 = 0. \tag{9}$$

Diese Gleichung des 4. Grades, welche in Beziehung auf u und x, so wie auf v und y symmetrisch ist, gibt eine merkwürdige Relation zwischen der **Anzahl der Doppelpuncte, der Anzahl der Doppeltangenten, der Anzahl der Wendungspuncte und der Anzahl der Spitzen** irgend einer beliebigen algebraischen Curve, unabhängig von der Ordnung und der Classe dieser Curve. Vorausgesetzt ist hierbei bloss, dass die Curve keine Singularität einer höhern Ordnung habe.

72. Wenn wir uns die Curve durch die Bewegung eines Punctes beschrieben denken, so ist, im Allgemeinen, $x=0$ und $y=0$, wonach wir für die allgemeine Curve irgend einer beliebigen Ordnung folgende Relation zwischen der Anzahl der Doppeltangenten und der Anzahl der Wendungspuncte erhalten:

$$v^4 - 54v^3 - 36uv^2 + 405v^2 + 756uv + 324u^2 = 0. \tag{10}$$

Wenn wir uns hingegen die Curve durch die Bewegung einer geraden Linie umhüllt denken, so ist, im Allgemeinen, $u=0$ und $v=0$, und somit erhalten wir für die allgemeinen Curven einer beliebigen Classe zwischen der Anzahl der Doppelpuncte und der Anzahl der Spitzen folgende Relation:

$$y^4 - 54y^3 - 36xy^2 + 405y^2 + 756xy + 324x^2 = 0. \tag{11}$$

73. Die Gleichung (7) zeigt, dass m grösser oder kleiner ist als n, je nachdem v grösser oder kleiner ist als y und umgekehrt. Je nachdem also an eine gegebene algebraische Curve durch einen gegebenen Punct mehr oder weniger Tangenten sich legen lassen, als dieselbe von einer gegebenen geraden Linie in Puncten geschnitten wird: ist die Anzahl der Wendungspuncte grösser oder kleiner, als die Anzahl der Spitzen.

Nach der Gleichung (8) ist $u > x$, wenn entweder:

$$m > n, \qquad m + n > 9,$$

oder:

$$m < n, \qquad m + n < 9.$$

Die letzten Bedingungen beziehen sich nur auf einen einzigen Fall, denjenigen nemlich, wo $n=4$ und $m=3$. Alsdann hat die Curve drei Spitzen und eine Doppeltangente, aber keinen Wendungspunct und keinen Doppelpunct. Diesen Fall ausgenommen, ist also $u > x$, wenn $m > n$. Es ist ferner $u < x$, wenn entweder:

$$m < n, \qquad m + n > 9,$$

oder:

$$m > n, \qquad m + n < 9.$$

Den letzten Bedingungen entspricht nur der einzige Fall, wo $m=4$ und $n=3$ und die Curve drei Wendungspuncte und einen Doppelpunct, aber weder eine Spitze, noch eine Doppeltangente hat. Diesen Fall ausgenommen, ist $u < x$ wenn $m < n$. Je nachdem also durch einen gegebenen Punct mehr oder weniger Tangenten an eine gegebene algebraische Curve gehen, als diese Curve von einer gegebenen geraden Linie in Puncten geschnitten wird, hat die Curve, im Allgemeinen, mehr oder weniger Doppeltangenten als Doppelpuncte.

Wenn $m=n$, so gibt die Gleichung (7) $v=y$ und die Gleichung (8) $u=x$. Dann gehen die Gleichungen (1), (2), (3) und (4) gleichmässig in die folgende über:

$$2x + 3y = n(n-2).$$

Um also die verschiedenen Curven zu bestimmen, welche von gleicher Ordnung und Classe sind, und welche hiernach gerade so viele Doppeltangenten als Doppelpuncte und so viele Wendungen als Spitzen haben, müssen wir die vorstehende Gleichung für ein angenommenes n in ganzen Zahlen auflösen und diejenigen Auflösungen verwerfen, welche aus andern Gründen unstatthaft sind. So ergibt sich zum Beispiel:

$m = n = 2,$	$u = x = 0,$	$v = y = 0;$
» $= 3,$	» $= 0,$	» $= 1;$
» $= 4,$	» $= 1,$	» $= 2;$
» $= 5,$	» $= 0,$	» $= 5;$
» $=$ »	» $= 3,$	» $= 3.$

Wenn n eine ganze Zahl von der Form $5g$ oder $5g+2$, so gibt es Curven, deren Doppelpuncte, Doppeltangenten, Spitzen und Wendungen, alle in gleicher Anzahl vorhanden sind. Hierhin gehört zum Beispiel, neben dem letzten Falle des vorstehenden Schemas, auch noch der folgende:

$$m = n = 7, \qquad u = v = x = y = 7.$$

Wenn eine Curve so viele Wendungspuncte als Spitzen hat, so hat sie auch so viele Doppeltangenten als Doppelpuncte. Das Umgekehrte ist auch wahr, ausgenommen wenn $m+n=9$. Dann ist $u=x$, ohne dass $v=y$ und $m=n$.

74. Die folgende Tafel enthält alle möglichen Fälle, in welchen m und n beide kleiner sind als 10.

n	m	x	u	y	v
2	2	—	—	—	—
3	3	—	—	1	1
3	4	1	—	—	3
4	4	1	1	2	2
4	5	2	2	1	4
5	5	3	3	3	3
»	»	—	—	5	5
3	6	—	—	—	9
4	6	3	4	—	6
»	»	—	1	2	8
5	6	4	5	2	5
»	»	1	2	4	7
6	6	6	6	4	4
»	»	3	3	6	6
»	»	—	—	8	8
4	7	1	4	1	10
5	7	5	8	1	7
»	»	2	5	3	9
6	7	7	9	3	6
»	»	4	6	5	8
»	»	1	3	7	10
7	7	10	10	5	5
»	»	7	7	7	7
»	»	4	4	9	9
»	»	1	1	11	11
4	8	2	8	—	12
5	8	6	12	—	9
»	»	3	9	2	11
»	»	—	6	4	13
6	8	8	13	2	8
»	»	5	10	4	10
»	»	2	7	6	12
7	8	11	14	4	7
»	»	8	11	6	9
»	»	5	8	8	11
»	»	2	5	10	13
8	8	15	15	6	6
»	»	12	12	8	8
»	»	9	9	10	10
»	»	6	6	12	12
»	»	3	3	14	14
»	»	—	—	16	16
4	9	—	10	1	16
5	9	4	14	1	13
»	»	1	11	3	15
6	9	9	18	1	10
»	»	6	15	3	12
»	»	3	12	5	14
»	»	—	9	7	16
7	9	12	19	3	9
»	»	9	16	5	11
»	»	6	13	7	13
m	n	u	x	v	y

n	m	x	u	y	v
7	9	3	10	9	15
»	»	—	7	11	17
8	9	16	20	5	8
»	»	13	17	7	10
»	»	10	14	9	12
»	»	7	11	11	14
»	»	4	8	13	16
»	»	1	5	15	18
9	9	21	21	7	7
»	»	18	18	9	9
»	»	15	15	11	11
»	»	12	12	13	13
»	»	9	9	15	15
»	»	6	6	17	17
»	»	3	3	19	19
»	»	—	—	21	21
4	10	1	16	—	18
5	10	5	20	—	15
»	»	2	17	2	17
6	10	10	24	—	12
»	»	7	21	2	14
»	»	4	18	4	16
»	»	1	15	6	18
7	10	13	25	2	11
»	»	10	22	4	13
»	»	7	19	6	15
»	»	4	16	8	17
»	»	1	13	10	19
8	10	17	26	4	10
»	»	14	23	6	12
»	»	11	20	8	14
»	»	8	17	10	16
»	»	5	14	12	18
»	»	2	11	14	20
9	10	22	27	6	9
»	»	19	24	8	11
»	»	16	21	10	13
»	»	13	18	12	15
»	»	10	15	14	17
»	»	7	12	16	19
»	»	4	9	18	21
		1	6	20	23
10	10	28	28	8	8
»	»	25	25	10	10
»	»	22	22	12	12
»	»	19	19	14	14
»	»	16	16	16	16
»	»	13	13	18	18
»	»	10	10	20	20
»	»	7	7	22	22
»	»	4	4	24	24
»	»	1	1	26	26
m	n	u	x	v	y

Wenn wir in der vorstehenden Tafel m und n unter einander vertauschen, so vertauschen sich unter einander auch einerseits u und x, andrerseits v und y, wonach wir den Zahlen jeder Vertical-Columne, sowohl die oberhalb derselben, als auch die unterhalb derselben angegebene Bedeutung beilegen können.

Bei der Berechnung der vorstehenden Tafel haben wir Werthe für n und m innerhalb der durch die Gleichungen (1) und (2) gegebenen gegenseitigen Beschränkungen beliebig angenommen. (Nach diesen beiden Gleichungen kann, wenn etwa n die kleinere Zahl ist, m jede beliebige ganze Zahl bis $n(n-1)$ einschliesslich bedeuten, mit der einzigen Ausnahme, dass es nicht die Zahl $(n(n-1)-1)$ sein kann.) Dann haben wir die Gleichung:

$$2x + 3y = n(n-1) - m$$

in ganzen Zahlen aufgelöset und diejenigen Auflösungen verworfen, für welche

$$x + y > \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

(Vergleiche hierüber die folgende Nummer). Dann ist

$$v = y + 3(m-n),$$

und endlich

$$u = \tfrac{1}{2}(m(m-1) - n - 3v).$$

Wenn wir eine Gruppe von Werthen für x, y, u und v haben, die gegebenen Werthen von m und n entsprechen, so erhalten wir unmittelbar alle übrigen Gruppen, indem wir x und u um $3g$ Einheiten vermindern, während wir y und v um $2g$ Einheiten wachsen lassen.

75. Es ist leicht, auf anderm Wege, wenn die Ordnung einer Curve gegeben ist, das Maximum ihrer möglichen Doppelpuncte, unter welche hier auch ihre Spitzen mitzuzählen sind, zu bestimmen. Es betrage überhaupt die Anzahl der Doppelpuncte z. Dann lässt sich durch diese z Doppelpuncte und durch $\left(\frac{p(p+3)}{1.2} - z\right)$ beliebig auf dem Umfange der Curve angenommene Puncte einer Curve der p. Ordnung legen. Somit ist nothwendig, weil in jedem Doppelpuncte zwei Durchschnitte der beiden Curven zusammenfallen,

$$2z + \left(\frac{p(p+3)}{1.2} - z\right) \overset{=}{<} np,$$

mithin:

$$z \overset{=}{<} np - \frac{p(p+3)}{1.2}.$$

Hierdurch ist das Maximum für solche Doppelpuncte einer Curve der n. Ordnung, durch welche eine Curve der p. Ordnung sich legen lässt, gegeben: das absolute Maximum ist also das Maximum des Ausdruckes:

$$np - \frac{p(p+3)}{1.2} \equiv \frac{p(2n-3-p)}{1.2},$$

wenn wir nach einander für p alle möglichen ganzen Zahlen einsetzen. Diesem Maximum entspricht überhaupt:

$$p = 2n - 3 - p,$$

und, wenn p eine ganze Zahl sein soll, gleichmässig:

$$p = n - 1, \qquad p = n - 2.$$

Das gesuchte Maximum wird hiernach:

$$z = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.*)$$

*) Schon Cramer hat auf analogem Wege für die Curven der acht ersten Ordnungen ein Maximum der Anzahl der Doppelpuncte und der mehrfachen Puncte überhaupt bestimmt, indem er davon

Nach der 7. Nummer der einleitenden Betrachtungen schneiden sich alle Curven der n. Ordnung, welche der Bedingung unterworfen sind, dass sie durch $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ willkührlich angenommene Puncte gehen, ausserdem auch noch in denselben $\left(\frac{n(n-3)}{2}+1\right)$ festen Puncten. Bemerkenswerth, und gewiss nicht ohne tiefern Grund, ist es, dass diese letztere Anzahl dem eben bestimmten Maximum der Doppelpuncte gleich ist.

76. Wir wollen uns jetzt zunächst mit Doppelpuncten von besonderer Art beschäftigen. Die Erörterungen hierüber schliessen sich unmittelbar an die bisherigen an.

Wenn zwei verschiedene Zweige einer Curve sich berühren, oder überhaupt sich $g$punctig osculiren, so fallen in dem Osculationspuncte g consecutive gewöhnliche Doppelpuncte (Durchschnittspuncte der beiden Zweige) und in der Tangente des Osculationspunctes g consecutive Doppeltangenten der Curve zusammen. Es ist hiernach klar, dass ein solcher Osculationspunct die Ordnung der Polar-Curve um $2g$ Einheiten reducirt (63) und $6g$ Wendungspuncte in sich aufnimmt (6). Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung ergibt sich also:

$$m = n(n-1) - 2g, \tag{1}$$

$$v = 3n(n-2) - 6g. \tag{2}$$

In der Anzahl der Doppeltangenten der fraglichen Curve ergibt sich (67), indem wir den Osculationspunct in g Doppelpuncte auflösen, eine Reduction von

$$2g(n(n-1)-6). - 2g(g-1) \equiv 2g(n(n-1)-(g+5))$$

Einheiten, wonach

$$u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - 2g(n(n-1)-(g+5)).$$

In dieser Anzahl sind diejenigen g Doppeltangenten, welche in der Tangente im Osculationspuncte zusammenfallen, einbegriffen; wenn wir von dieser abstrahiren, so kommt:

$$u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - 2g(n(n-1)-(g+4\tfrac{1}{2})). \tag{3}$$

Zur Bestätigung der Gleichungen (1), (2) und (3) ergibt sich die folgende:

$$n = m(m-1) - 2g - 3v - 2u. \tag{4}$$

Als Beispiel wollen wir die Curven der vierten Ordnung nehmen und voraussetzen, dass zwei Zweige einer solchen Curve sich dreipunctig osculiren. Dann ergibt sich:

$$g = 3, \quad m = 6, \quad v = 6, \quad u = 1.$$

Die Polar-Curve ist also von der 6. Ordnung, sie hat, wie die gegebene, zwei sich dreipunctig osculirende Zweige, dann ferner sechs Spitzen erster Art und einen Doppelpunct, wonach die Ordnung der reciproken Polar-Curve um $6+18+2 \equiv 26$ Einheiten, also von 30 auf 4 heruntersinkt.

Bei einer einfachen Berührung zweier Curven-Zweige ergibt sich:

$$g = 2, \quad m = 8, \quad v = 12, \quad u = 6.$$

Bei einer vierpunctigen Osculation würden wir erhalten:

$$g = 4, \quad m = 4, \quad v = 0, \quad u = 0;$$

aber alsdann zerfällt die Curve in ein System zweier sich osculirenden Kegelschnitte. In diesem Falle existiren wirklich weder Spitzen noch Doppeltangenten. *)

---

ausgeht, dass eine Linie der 1., 2, 3., 4. . . Ordnung, bezüglich durch 2, 5, 9, 14 . . . willkührlich auf dem Umfange einer gegebenen Curve der n. Ordnung angenommenen Puncte gelegt werden, diese Curve aber in nicht mehr als n, $2n$, $3n$, $4n$ . . . Puncten schneiden kann, wobei, wenn sie durch einen $m$fachen Punct dieser letztern geht, auf diesen m Durchschnittspuncte zu rechnen sind. Cramer, Analyse des lignes courbes algébriques. §. 175—181.

*) Auch in dem Falle, dass zwei sich einfach berührende, oder sich dreipunctig osculirende Kegel-

77. Eine **Spitze zweiter Art** wird im Allgemeinen von zwei solchen Zweigen gebildet, welche unter einander einen Contact von der Ordnung $\frac{3}{2}$ haben und bezeichnet alsdann die Uebergangsstufe zwischen zwei sich bloss berührenden und zwei sich dreipunctig osculirenden Zweigen. Es finden hier die nachstehenden vier Relationen Statt:

$$m = n(n-1) - 5, \tag{1}$$

$$v = 3n(n-2) - 15, \tag{2}$$

$$u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - 5(n(n-1) - 7), \tag{3}$$

$$n = m(m-1) - 5 - 3v - 2u. \tag{4}$$

Wir haben nur nothwendig die Richtigkeit von drei derselben nachzuweisen, weil jede derselben eine algebraische Folge aus den drei übrigen ist.

Die Gleichung (1) ist darin begründet, dass von den $n(n-1)$ Tangenten, welche an eine gegebene Curve der n. Ordnung parallel mit einer gegebenen geraden Linie und also auch, von einem gegebenen Puncte aus, sich legen lassen, in dem Falle, dass diese Curve eine gewöhnliche Spitze zweiter Art hat, **fünf** durch diese Spitze gehen und, im engern Sinne des Wortes, aufhören Tangenten zu sein. Um den Beweis dieser Behauptung direct zu führen, wollen wir die folgende Gleichung zu Grunde legen:

$$(q+\varpi p^2)^2 + 2q\Sigma_1(q+\varpi p^2) + q\Sigma_3 \equiv \Omega_4 = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichung ist die allgemeine der Curven der 4. Ordnung mit einer gewöhnlichen Spitze zweiter Art; sie wird die allgemeine Gleichung der Curven einer beliebigen n. Ordnung mit einer solchen Spitze, wenn wir den Gliedern des ersten Theiles dieser Gleichung noch die folgenden:

$$\Sigma_5 + \Sigma_6 + \cdot \cdot \Sigma_n,$$

hinzufügen. Wir beschränken uns hier aber auf die Curven der 4. Ordnung, weil die, für den allgemeinen Fall, hinzukommenden Glieder bei unserer Beweisführung sich müssig verhalten. In der vorstehenden Gleichung (5), welche wir der 31. Nummer entlehnt haben, kann p mit $(p+\sigma q)$ vertauscht werden, ohne dass dieselbe, im Allgemeinen, ihre Form ändert. Diese Gleichung hat also eine überzählige Constante, welche darauf kommt, dass für die gerade Linie P jede beliebige genommen werden kann, sobald sie nur durch die Spitze geht. Wenn wir mithin die Anzahl derjenigen Tangenten bestimmen, welche der geraden Linie P parallel sind, so erhalten wir überhaupt die Anzahl derjenigen Tangenten der gegebenen Curve, welche eine gegebene, beliebige Richtung haben. Für die Berührungspuncte auf den mit P parallelen Tangenten ist aber $dp = 0$, mithin:

$$\frac{d\Omega_4}{dq} = 0.$$

Entwickeln wir, so können wir der resultirenden Gleichung die folgende Form geben:

$$(q+\varpi p^2) + q\Sigma'_1 + \Sigma'_3 = 0.$$

Diese Form zeigt, dass die bezügliche Curve von der durch die folgende Gleichung dargestellten Parabel:

$$q + \varpi p^2 = 0,$$

dreipunctig osculirt wird. Diese Curve schneidet also, wie diese Parabel, die gegebene in

schnitte die Curve vierter Ordnung vertreten, behalten die bezüglichen Bestimmungen ihre Geltung, wenn wir berücksichtigen, dass das System der beiden Kegelschnitte einmal zwei Doppelpuncte, das andere Mal einen Doppelpunct hat. Einmal müssen wir für die beiden Doppelpuncte zwölf Wendungspuncte und vier Doppeltangenten rechnen, so dass alle Wendungspuncte erschöpft sind und von den sechs Doppel-Tangenten nur noch zwei übrig bleiben. Das andere Mal verschlingt der einzige Doppelpunct die sechs Wendungspuncte und ausserdem bleibt nur noch die Doppeltangente. Es versteht sich, dass in beiden Fällen $m = n = 4$.

fünf, in der Spitze dieser letztern zusammenfallenden Puncten. Somit ist der geforderte Beweis geführt.

78. Nach der Gleichung (3) bringt eine Spitze zweiter Art in der Anzahl der Doppeltangenten eine Reduction von $5(n(n-1)-7)$ Einheiten hervor. Die bisherigen Erörterungen sind hinreichend, um uns von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Es können nemlich zwei sich einfach (zweipunctig) berührende Curven-Zweige, sowohl reell als imaginär sein, wo alsdann im letztern Falle der Berührungspunct ein isolirter wird. Nach der 76. Nummer lassen sich, von einem solchen Berührungspuncte aus,

$$n(n-1)-7$$

Tangenten an die Curve legen. Dasselbe muss also auch Statt finden, in dem Falle einer Spitze zweiter Art, welche zwischen zwei reellen und zwei imaginären sich berührenden Curven-Zweigen die blosse Uebergangs-Stufe bildet. Jede dieser Tangenten ist nicht mehr als Doppeltangente anzusehen und da jede nach der vorigen Nummer fünffach zu rechnen ist, muss sich die Anzahl der eigentlichen Doppeltangenten um

$$5(n(n-1)-7)$$

Einheiten reduciren.

Wir können, zur Bestätigung, auch unmittelbar den Beweis führen, dass an eine Curve der n. Ordnung, von einer Spitze zweiter Art aus, sich nur $(n(n-1)-7)$ Tangenten legen lassen. Nach der 31. Nummer nimmt, wenn wir uns zunächst auf die Curven der vierten Ordnung beschränken, für den fraglichen Fall die allgemeine Gleichung folgende Form mit der nothwendigen Anzahl von Constanten an:

$$(q+\varpi p^2+\alpha pq)^2+q\Sigma_3=o,$$

oder auch, wenn wir, der Kürze wegen,

$$q+\varpi p^2+\alpha pq \equiv K$$

setzen, die folgende:

$$K^2+q\Sigma_3=o. \tag{1}$$

Um die Berührungspuncte auf den durch die Spitze, das heisst den Durchschnitt der Linien P und Q gehenden Tangenten der Curve zu finden, müssen wir, wie in der 65. Nummer, die vorstehende Gleichung in Beziehung auf p und q differentiiren und, nach der Differentiation, dp durch p und dq durch q ersetzen. Es ist aber:

$$\frac{d.K^2}{dp}\cdot p+\frac{d.K^2}{dq}\cdot q \equiv 2K(2K-q),$$

$$\frac{d.q\Sigma_3}{dp}\cdot p+\frac{d.q\Sigma_3}{dq}\cdot q \equiv 4q\Sigma_3,$$

und somit kommt:

$$K(2K-q)+2q\Sigma_3=o. \tag{2}$$

Diese Gleichung gibt, mit der Gleichung der Curve zusammengestellt, die fraglichen Berührungspuncte. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich unmittelbar die folgende:

$$Kq=o, \tag{3}$$

welche wir, statt der Gleichung (2), mit der Gleichung der Curve zusammenstellen können. Diese neue Gleichung stellt das System der geraden Linie Q und des Kegelschnittes K, der von derselben berührt wird, dar. Die gerade Linie Q schneidet die Curve (1) so, dass auf ihr alle vier Durchschnittspuncte in der Spitze zusammenfallen. Von den acht Durchschnittspuncten des Kegelschnittes K mit der Curve (1) fallen fünf in die Spitze, während die drei übrigen die zweiten Durchschnittspuncte der durch diese Spitze gehenden drei geraden Linien Σ_3 mit dieser Curve sind. Es fallen also im Ganzen neun Durchschnittspuncte in der Spitze zusammen, und während überhaupt von einem gegebenen Puncte aus, sich 12 Tangenten an

eine Curve der 4. Ordnung legen lassen, reducirt sich diese Anzahl, wenn wir für den gegebenen Punct die Spitze nehmen und von den Tangenten der Spitze abstrahiren, um 9 Einheiten, und also, indem wir die beiden zusammenfallenden Tangenten derselben noch einschliessen, bloss um 7 Einheiten.

Wenn wir, statt Curven der 4. Ordnung, Curven einer beliebigen n. Ordnung nehmen, so erhalten wir, statt der beiden Gleichungen (1) und (2) nun die folgenden beiden:

$$K^2 + q\Sigma_3 + \Sigma_5 + \cdot\cdot + \Sigma_n = o, \qquad (4)$$

$$2K(2K-q) + 4q\Sigma_3 + 5\Sigma_5 + \cdot\cdot + n\Sigma_n = o, \qquad (5)$$

und, statt der Gleichung (3) die folgende:

$$2Kq - \{ \Sigma_5 + \cdot\cdot + (n-4)\Sigma_n \} = o, \qquad (6)$$

oder auch, indem wir Σ_n zwischen den beiden vorhergehenden Gleichungen (4) und (5) eliminiren:

$$K((n-4)K+2q) + (n-4)q\Sigma_3 + (n-5)\Sigma_5 + \cdot\cdot + \Sigma_{n-1} = o. \qquad (7)$$

Die beiden Curven (4) und (7) schneiden sich, im Allgemeinen, in $n(n-1)$ Puncten, und diese Puncte sind die Berührungspuncte auf eben so vielen Tangenten, welche sich, von der Spitze aus, an die Curve (4) legen lassen. Aber diejenigen dieser Tangenten, auf welchen die Berührungspuncte in die Spitze dieser Curve fallen, hören alle, mit Ausnahme von zwei, auf, Tangenten der Curve zu sein. Die Curve (7) aber hat zwei sich berührende Zweige, welche von denjenigen beiden sich berührenden Kegelschnitten, deren Gleichungen die nachstehenden sind:

$$K = o, \qquad (n-4)K + 2q = o,$$

auf der gemeinschaftlichen Tangente Q, bezüglich, dreipunctig osculirt werden. Denn jeder dieser Kegelschnitte schneidet die Curve so, dass fünf Durchschnitte im Berührungspuncte, von welchen zwei dem der Osculation fremden Curven-Zweige angehören, zusammenfallen. Derjenige Curven-Zweig also, welcher von dem Kegelschnitte K osculirt wird, schneidet die Curve (4) so, dass fünf und der andere Curven-Zweig, der den Kegelschnitt K einfach berührt, so dass vier Durchschnittspuncte in der Spitze zusammenfallen. Zusammen vereinigen sich also in dieser neun Durchschnittspuncte, und somit lassen sich, von der Spitze der Curve n. Ordnung (4) aus, an diese Curve

$$n(n-1) - 7$$

Tangenten legen, in welcher Anzahl die beiden zusammenfallenden der Spitze selbst mitgerechnet sind. Der verlangte Beweis ist somit vollständig geführt.

79. Die Gleichung (4) der 77. Nummer ist unmittelbar gerechtfertigt, wenn wir nur erwägen, dass die Polar-Curve Ω_m, wie die gegebene, eine Spitze zweiter Art hat und also die Ordnung der reciproken Polar-Curve (der gegebenen Curve Ω_n) dieser Spitze wegen um fünf, so wie jedes Doppelpunctes wegen um zwei und jeder Spitze erster Art wegen um drei Einheiten heruntersinkt.

Nachdem auf diese Weise die Richtigkeit der Gleichungen (1), (3) und (4) der 77. Nummer dargethan worden, ist es nicht mehr nothwendig, auch noch die Gleichung (2) unmittelbar herzuleiten. Bei diesen Untersuchungen, welche, nach meiner Meinung, zu den subtilsten gehören, halte ich es jedoch für wünschenswerth, nicht zu Vieles als eine Folgerung aus einer indirecten Combination hinzustellen. Dieser Rücksicht verdanken die analytischen Entwicklungen der folgenden Nummer ihre Stelle.

80. Ich habe in dem „Systeme der analytischen Geometrie" (III, §. 6.) nachgewiesen, dass wir zur Bestimmung der Wendungspuncte einer gegebenen Curve der n. Ordnung Ω_n die folgende Gleichung erhalten:

$$\left(\frac{d\Omega_n}{dp}\right)^2 \frac{d^2\Omega_n}{dq^2} - 2\cdot\frac{d\Omega_n}{dp}\cdot\frac{d\Omega_n}{dq}\cdot\frac{d^2\Omega_n}{dpdq} + \left(\frac{d\Omega_n}{dq}\right)^2\frac{d^2\Omega_n}{dp^2} = o, \tag{8}$$

welche bis zum $(3n-4)$. Grade ansteigt. Aber wir haben zugleich gezeigt, dass die durch diese Gleichung dargestellte Curve die n Asymptoten der gegebenen Curve zu ihren eigenen hat, wonach von den $n(3n-4)$ Durchschnitten der Curven $2n$ unendlich weit liegen, und wir aus der algebraischen Verbindung ihrer beiden Gleichungen, eine Gleichung des $(3n-6)$. Grades herleiten können, welche eine einfachere Curve darstellt, deren Durchschnitte mit der gegebenen die $3n(n-2)$ Wendungspuncte dieser letztern sind. Um diess zu beweisen, haben wir uns des analytischen Hülfs-Satzes bedient, dass, wenn $\Omega_n \equiv pqrs..uv$, diese Function als Factor des ersten Theiles der Gleichung (6) sich herausstellt. Derselbe Satz besteht offenbar auch dann, wenn $r \equiv p+\varrho q$, $s \equiv p+\sigma q\ldots$ und demnach $\Omega_n \equiv \Sigma_n$, so dass auch:

$$\left(\frac{d\Sigma_n}{dp}\right)^2 \frac{d^2\Sigma_n}{dq^2} - 2\,\frac{d\Sigma_n}{dp}\cdot\frac{d\Sigma_n}{dq}\cdot\frac{d^2\Sigma_n}{dpdq} + \left(\frac{d\Sigma_n}{dq}\right)^2\frac{d^2\Sigma_n}{dp^2} \equiv \Sigma_n\,\Sigma_{2n-4},$$

und wird uns so dienen, um Aufschluss darüber zu erhalten, nach welchen Gesetzen die Wendungspuncte einer gegebenen Curve von besondern Arten singulärer Puncte verschlungen werden.

Nehmen wir ferner auch noch:

$$\Omega_n \equiv K^2,$$

wobei K irgend eine Function von p und q ist, so ergibt sich:

$$\frac{d\Omega_n}{dp} \equiv 2K\cdot\frac{dK}{dp}, \qquad \frac{d\Omega_n}{dq} \equiv 2K\cdot\frac{dK}{dq},$$

$$\frac{d^2\Omega_n}{dp^2} \equiv 2\left\{\left(\frac{dK}{dp}\right)^2 + K\cdot\frac{d^2K}{dp^2}\right\},$$

$$\frac{d^2\Omega_n}{dpdq} \equiv 2\left\{\frac{dK}{dp}\cdot\frac{dK}{dq} + K\frac{d^2K}{dpdq}\right\},$$

$$\frac{d^2\Omega_n}{dq^2} \equiv 2\left\{\left(\frac{dK}{dq}\right)^2 + K\,\frac{d^2K}{dq^2}\right\},$$

und wenn wir hiernach den ersten Theil der Gleichung (8) entwickeln, so kommt nach einer einfachen Reduction:

$$8K^3\left\{\left(\frac{dK}{dp}\right)^2\frac{d^2K}{dq^2} - 2\,\frac{dK}{dp}\cdot\frac{dK}{dp}\cdot\frac{d^2K}{dpdq} + \left(\frac{dK}{dq}\right)^2\frac{d^2K}{dp^2}\right\}.$$

Wenn insbesondere endlich:

$$K \equiv q + \varkappa p^2 + \alpha pq,$$

so gibt die vollständige Entwicklung des letzten Ausdrucks:

$$16K^3(1+\alpha p)(\varkappa - \alpha\varkappa p - \alpha^2 q) \equiv K^3 tu.$$

81. Nach diesen vorbereitenden analytischen Erörterungen, wollen wir nun wiederum für die allgemeine Gleichung einer Curve mit einer Spitze zweiter Art, die folgende nehmen:

$$\Omega_n \equiv K^2 + q\Sigma_3 + \Sigma_5 + \cdot\cdot + \Sigma_n = o. \tag{9}$$

und, von dieser Gleichung ausgehend, die Gleichung (8) entwickeln. Dann finden wir:

$$K^3 tu + q\Sigma_3\Sigma_4 + \Sigma_5\Sigma_6 + \cdot\cdot + \Sigma_n\Sigma_{2n-4} = o, \tag{10}$$

wobei die Functionen Σ_3, Σ_5, Σ_n die frühern geblieben, Σ_4, Σ_6, Σ_{2n-4} aber neu eingeführt sind. Die durch die letzte Gleichung (10) dargestellte Curve schneidet die gegebene Curve (9) in den Wendungspuncten dieser letztern. Nach dem oben Angeführten beträgt die Anzahl derselben, weil $2n$ Durchschnittspuncte unendlich weit liegen, $3n(n-2)$. Es bleibt uns hier nur noch zu untersuchen übrig, wie viele von diesen Wendungspuncten, indem sie in

die Spitze fallen, aufhören Wendungspuncte zu sein. Zu diesem Ende bemerken wir, dass die neue Curve (10) drei verschiedene Zweige hat, welche alle drei den Kegelschnitt K, auf der Tangente Q, dreipunctig osculiren. *) Jeder dieser drei Zweige schneidet also auch, wie dieser Kegelschnitt selbst, die gegebene Curve so, dass fünf Durchschnitte in der Spitze der Curve zusammenfallen. Hiernach reducirt sich die Anzahl der fraglichen Wendungspuncte, weil die Spitze deren dreimal fünf verschlungen hat, auf:

$$3n(n-2) - 15.$$

82. Wenn wir die Gleichungen (1), (2), (3) und (4) der 77. Nummer, welche wir hiernach vollständig bewiesen haben, mit den gleichbezeichneten Gleichungen der 76. Nummer vergleichen, so tritt uns sogleich die Bemerkung entgegen, dass jene vier Gleichungen in diesen enthalten sind, wenn wir $g=2\frac{1}{2}$ setzen. Eine Spitze zweiter Art vertritt hiernach, wenn der Ausdruck gestattet ist, zwei sich $2\frac{1}{2}$punctig osculirende Curven-Zweige, oder auch $2\frac{1}{2}$ consecutive, nicht auf derselben geraden Linie liegende, Doppelpuncte.

---

*) Um diess zu zeigen, bemerken wir, dass die Gleichung (10) befriedigt wird, wenn wir zugleich:

$$K^3 = o, \qquad q\Sigma_3\Sigma_4 + \Sigma_5\Sigma_6 + \ldots + \Sigma_n\Sigma_{2n-4} = o,$$

setzen. Hieraus folgt, dass neun Durchschnitte der Curve (10) mit dem Kegelschnitte K in dem Berührungspuncte auf der Tangente Q zusammenfallen; denn die durch die zweite der vorstehenden Gleichungen dargestellte Curve hat acht Zweige, die in diesem Puncte sich schneiden, und von welchen überdiess der eine den Kegelschnitt berührt. Hieraus folgt, dass die Curve (10) drei Zweige hat, welche alle drei diesen Kegelschnitt dreipunctig osculiren.

Zu demselben Resultate gelangen wir auch, wenn wir, nach der folgenden Schlussweise, die Ordnung der Annäherung der Curve an den Kegelschnitt K bestimmen. Der Einfachheit wegen, wollen wir, was, unbeschadet der Allgemeinheit, erlaubt ist, p und q in der Bedeutung rechtwinkliger Parallel-Coordinaten nehmen. Wenn wir solche Puncte betrachten, die auf irgend einem Curven-Zweige, der die Linie Q in ihrem Durchschnitte mit der Linie P berührt, in unendlich kleiner Entfernung vom Berührungspuncte liegen, so ist für diese p ein unendlich Kleines von derselben Ordnung, während andrerseits q erst mit p^2 verglichen und gegen p vernachlässigt werden kann. Da sich überdiess die beiden linearen Functionen t und u auf Constante reduciren, so gibt, bei gehörigen Vernachlässigungen, die Gleichung der Curve für solche Puncte:

$$K^3 = \mu q p^7 = \lambda p^9,$$

mithin ist K unendlich klein von der dritten Ordnung. Es bedeutet aber K dasjenige Segment, das auf dem, von dem Puncte der Curve aus auf die Tangente Q gefallten Perpendikel, zwischen diesem Puncte und dem Kegelschnitte, liegt. Demjenigen Puncte nemlich, in welchem dieses Perpendikel den Kegelschnitt schneidet, entspricht derselbe Werth von p und wenn wir den entsprechenden Werth von q durch einen Accent unterscheiden, so kommt:

$$q' + \varkappa p^2 + \alpha p q' = o,$$

und wenn wir diese Gleichung von der identischen Gleichung:

$$q + \varkappa p^2 + \alpha p q \equiv K,$$

abziehen:

$$(1+\alpha p)(q-q') = K,$$

woraus, wenn wir αp gegen 1 vernachlässigen,

$$K = q - q'$$

sich ergibt. Somit ist dargethan, dass die Ordnung der Annäherung der verschiedenen Curven-Zweige an den Kegelschnitt die zweite ist.

Ich habe diese Erörterung der Behauptung des Textes hier aus dem Grunde noch beigefügt, weil wir in allen ähnlichen Fällen, auf gleiche Weise verfahren können; und bemerken in dieser Hinsicht schliesslich nur noch, dass überhaupt die allgemeinere Function:

$$\Omega \equiv q + \Sigma_1 + \Sigma_3 + \ldots$$

dieselbe Bedeutung hat als die Function K, wenn sie auf denselben Punct, wie diese in dem Vorstehenden, bezogen wird.

Wir setzen uns keiner Gefahr zu irren aus, wenn wir, auch ohne directe Bestätigung der Resultate, diese Anschauung weiter ausdehnen. Es kann nemlich eine Spitze zweiter Art, während sie mit ihrer Tangente nur einen gewöhnlichen Contact behält, von zwei solchen Zweigen gebildet werden, die unter einander einen Contact von irgend einer $\frac{2h+1}{2}$ Ordnung haben, und bildet dann die Uebergangs-Stufe von einem Contacte der h. zu einem Contacte der $(h+1)$. Ordnung. Auch dann behalten, indem wir $g \equiv h + \frac{1}{2}$ setzen, so dass g irgend eine ganze Zahl, vermehrt um eine halbe Einheit, bedeutet, die eben angezogenen Gleichungen der 76. Nummer ihre Geltung. Es ist:

$$m = n(n-1) - 2g,$$
$$v = 3n(n-2) - 6g,$$
$$u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - g[n(n-1) - (g+4\tfrac{1}{2})],$$
$$n = m(m-1) - 2u - 3v - 2g.$$

Die Curven der 4. Ordnung liefern hier die folgenden beiden Beispiele:

$$n = 0, \quad g = 2\tfrac{1}{2}, \quad m = 7, \quad v = 9, \quad u = 3;$$
$$\text{»} \quad g = 3\tfrac{1}{2}, \quad m = 5, \quad v = 3, \quad u = 0.$$

83. Nach dem Princip der bisherigen Erörterungen ist es leicht, auch denjenigen Fall zu discutiren, dass die Curve überhaupt, neben x Doppelpuncten und y Spitzen erster Art, z Spitzen zweiter Art hat. Wir wollen hier indess die Beschränkung machen, dass diese Spitzen gewöhnliche sind, das heisst solche, deren Schenkel unter einander einen $2\frac{1}{2}$punctigen Contact haben. Hier ergeben sich die folgenden vier Relationen:

$$m = n(n-1) - 2x - 3y - 5z,$$
$$v = 3n(n-2) - 6x - 8y - 15z,$$
$$u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2x+3y)(n(n-1)-6) - 5z(n(n-1)-7) + 2x(x-1) + \tfrac{9}{2}y(y-1)$$
$$+ \tfrac{25}{2}z(z-1) + 6xy + 10xz + 15yz,$$
$$n = m(m-1) - 2u - 3v - 5z.$$

Die Curven der 4. Ordnung liefern hier zwei Beispiele, sie können, neben einer Spitze zweiter Art, einen Doppelpunct oder auch eine Spitze erster Art haben. Diesem entspricht:

$$n = 4, \quad z = 1, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad m = 5, \quad v = 3, \quad u = 1,$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad y = 1, \quad x = 0, \quad m = 4, \quad v = 1, \quad u = 0.$$

Fig 38. Ein merkwürdiges, hierher gehöriges Beispiel bieten die Curven der 5. Ordnung, welche, wenn sie drei Spitzen zweiter Art haben, alle ihre Doppeltangenten und Wendungspuncte verlieren. Alsdann ist:

$$n = m = 5, \quad y = v = 0, \quad x = u = 0.$$

Die Anschauung einer solchen Curve mit einer einzigen reellen Asymptote gibt die 38. Figur. —

84. Um alle untergeordneten Arten von Doppelpuncten zu erschöpfen, bleiben uns noch zwei Fälle zu discutiren übrig. Es können sich zwei solche Curven-Zweige berühren, welche mit ihrer gemeinschaftlichen Tangente nicht bloss einen gewöhnlichen, sondern einen mehrpunctigen Contact haben, und es kann eine Spitze erster Art auch von zwei solchen Schenkeln gebildet werden, welche unter einander mit ihrer gemeinschaftlichen Tangente einen Contact von einer höhern Ordnung haben.

Hier können wir nur den erstgenannten Fall, und zwar nur unter der Voraussetzung, dass von den beiden sich berührenden Zweigen, der eine mit ihrer gemeinschaftlichen Tangente einen gewöhnlichen Contact hat, während die Ordnung des Contacts für den andern Zweig jede beliebige sein kann, behandeln. Wir wollen zunächst annehmen, ein Fall, der schon bei Curven der 5. Ordnung eintreten kann, dass ein Zweig mit der Tangente einen dreipunctigen und der andere einen gewöhnlichen Contact habe. Dieser Annahme entspricht die nachstehende Gleichung:

$$q^2 + q(\Sigma_2+\Sigma_3) + \Sigma_5 + \cdots + \Sigma_n = 0, \text{*)}$$

mit einer überzähligen Constanten, welche darauf kommt, dass die Richtung der geraden Linie P jede beliebige sein kann. Differentiiren wir diese Gleichung in Beziehung auf q, so kommt, indem wir nur die Form der resultirenden Gleichung berücksichtigen,

$$2q + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \cdots + \Sigma_{n-1} = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Curve dar, welche die Curve (1) in $n(n-1)$ Puncten schneidet. Von diesen fallen aber, weil jene Curve einen solchen Zweig hat, der die Linie Q und also auch die beiden sich berührenden Zweige der Curve (1) einfach berührt, vier in dem Berührungspuncte zusammen. Also gibt es, wie wenn die beiden Zweige der Curve sich bloss einfach berührten, $(n(n-1)-4)$ Tangenten, die sich, nach gegebener Richtung an die Curve legen lassen.

Wenn wir die Gleichung (8) der 80. Nummer entwickeln, indem wir

$$\Omega_n \equiv q^2 + q(\Sigma_2+\Sigma_3) + \Sigma_5 + \cdots + \Sigma_n$$

setzen, so erhalten wir, mit Berücksichtigung der in der genannten Nummer aufgestellten analytischen Relationen, für die resultirende Gleichung die nachstehende Form:

$$q\Sigma_2\Sigma'_2 + q\Sigma_3\Sigma'_4 + \Sigma_5\Sigma_6 + \cdots + \Sigma_n\Sigma'_{2n-4} = 0.$$

Die bezügliche Curve hat einen fünffachen Punct mit fünf osculirenden Tangenten, von welchen die eine mit der Tangente Q der gegebenen Curve (1) zusammenfällt. Also fallen von den Durchschnitten der beiden Curven 13 in den Berührungspunct. Von diesen kommen 5 auf den an der Tangente Q sich hinziehenden Zweig und 2 auf jeden der vier übrigen Zweige, welche den fünffachen Punct bilden. Eben so viele Wendungspuncte der gegebenen Curve verschwinden, mit Ausnahme eines einzigen, der in den Berührungspunct fällt, und dem einen Curven-Zweige angehört. Also verschlingt der Berührungspunct hier keine grössere Anzahl von Wendungspuncten, als wenn zwei gewöhnliche Zweige sich berührten.

Hiernach bedarf der fragliche Fall keiner weitern Discussion mehr. Dasselbe gilt, wenn der dreipunctig osculirende Zweig durch einen mehrpunctig osculirenden Zweig ersetzt wird. Es gelten hier ebenfalls die Zahlbestimmungen der 76. Nummer (wo wir $g=2$ nehmen müssen). Nur ist zu bemerken, dass in dem Berührungspuncte auf einer $m$punctig osculirenden Tangente $(m-2)$ Wendungspuncte zusammenfallen. Auf diesen Fall bezieht sich die folgende Gleichung:

$$q^2 + q(\Sigma_2+\Sigma_3+\cdots+\Sigma_m) + \Sigma_{m+2} + \cdots + \Sigma_n = 0. -$$

85. Wir wollen uns nun zur Betrachtung solcher **drei- und mehrfachen Puncte** wenden, welche entstehen, indem drei oder mehrere vollständige (reelle oder imaginäre) Curven-Zweige in demselben Puncte sich schneiden. Die allgemeine Gleichung einer Curve der n. Ordnung mit einem solchen dreifachen Puncte ist, mit Beibehaltung der bisherigen Be-

---

*) Wir überzeugen uns, auch ohne zu der 11. Nummer zurückzugehen, direct davon, dass diese Form dem fraglichen Falle wirklich entspricht, wenn wir berücksichtigen, dass für Nachbarpuncte des Berührungspunctes, aus der Gleichung des Textes die nachstehende zwiefache Relation sich ergibt:

$$q + \Sigma_2 + \Sigma_3 = -\frac{\Sigma_5}{q} = \frac{\Sigma_4}{\Sigma_2} = \varkappa p^3,$$

$$q = -\frac{\Sigma_5}{q+\Sigma_2+\Sigma_3} = -\frac{\Sigma_4}{\Sigma_2} = -\varkappa p^3.$$

Die Curve hat also einen Zweig, welcher von der durch die Gleichung:

$$q + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 0,$$

dargestellten Curve dreipunctig osculirt und von deren Tangente Q also einfach berührt wird, während dieselbe Tangente einen andern Zweig dreipunctig osculirt.

zeichnung, die folgende:

$$\Sigma_3 + \Sigma_4 + \cdot \cdot + \Sigma_n = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung hat zwei überzählige Constanten, welche auf die willkührliche Richtung der, den beiden linearen Functionen p und q entsprechenden und in dem dreifachen Puncte sich schneidenden, geraden Linie kommen. Die drei Tangenten dieses Punctes werden durch die Gleichung:

$$\Sigma_3 = 0,$$

dargestellt; wir setzen hier voraus, dass nicht zwei dieser drei Tangenten zusammenfallen. Differentiiren wir diese Gleichung, etwa in Beziehung auf q, so kommt zur Bestimmung der Berührungspuncte auf den mit der geraden Linie Q parallelen Tangenten der gegebenen Curve eine Gleichung von der folgenden Form:

$$\Sigma'_2 + \Sigma'_3 + \cdot \cdot + \Sigma'_{n-1} = 0. \tag{2}$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Curve der $(n-1)$. Ordnung hat zwei solche Zweige, welche beide durch den dreifachen Punct der gegebenen Curve gehen. Sechs Durchschnittspuncte der beiden Curven fallen hiernach in dem dreifachen Puncte zusammen und um eben so viele Einheiten vermindert sich die Anzahl derjenigen Tangenten, welche, im Allgemeinen, nach gegebener Richtung an die gegebene Curve sich legen lassen. Hiernach ist

$$m = n(n-1) - 6.$$

Es ist augenfällig, dass, wenn wir an die Stelle der Curve (1) eine Curve mit einem $g$fachen Puncte setzen, die Curve (2) durch eine Curve mit einem $(g-1)$fachen Puncte, dessen Tangenten mit den Tangenten des $g$fachen Punctes im Allgemeinen nicht zusammenfallen, vertreten wird, und dass alsdann also die beiden Curven sich nur in $\{n(n-1) - g(g-1)\}$ Puncten schneiden, so dass also überhaupt:

$$m = n(n-1) - g(g-1).$$

86. Um die Anzahl der Wendungspuncte, welche eine Curve dadurch verliert, dass sie einen drei- oder überhaupt $g$fachen Punct erhält, zu bestimmen, wenden wir uns wiederum zur Gleichung (8) der 80. Nummer, indem wir hier die folgende Functions-Bestimmung zu Grunde legen:

$$\Omega_n \equiv \Sigma_g + \Sigma_{g+1} + \cdot \cdot + \Sigma_n,$$

wobei wir, damit die Tangenten des $g$fachen Punctes nicht zusammenfallen, zugleich voraussetzen, dass Σ_g keine gleichen Factoren habe. Wenn wir mit Rücksicht auf die analytischen Entwicklungen der eben angeführten Nummer entwickeln, so kommt:

$$\Sigma_g \, \Sigma'_{2g-4} + \Sigma_{g+1} \Sigma'_{2g-2} + \cdot \cdot + \Sigma_n \, \Sigma'_{2n-4} = 0. \tag{3}$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Curve schneidet die gegebene in den Wendungspuncten dieser letztern. Wir haben hier nur zu untersuchen, wie viele von diesen Puncten, indem sie in den $g$fachen Punct der gegebenen Curve fallen, aufhören Wendungspuncte dieser Curve zu sein; denn, in dem allgemeinen Falle, den wir betrachten, hat keiner der g Zweige, welche den $g$fachen Punct bilden, in diesem Puncte einen Wendungspunct. Die Curve (3) hat einen $(3g-4)$fachen Punct und unter den $(3g-4)$ Zweigen, welche in demselben sich schneiden, befinden sich g solche, welche bezüglich mit denjenigen g Zweigen, welche den $g$fachen Punct der gegebenen Curve bilden, die g geraden Linien Σ_g zu gemeinschaftlichen Tangenten haben. Jeder der g Zweige der gegebenen Curve schneidet also die Curve (3) so, dass von den $3n(n-2)$ nicht unendlich weit liegenden Durchschnittspuncten $3(g-1)$ in den $g$fachen Punct fallen. Dieser Punct verschlingt also im Ganzen $3g(g-1)$ Wendungspuncte und somit erhalten wir:

$$v = 3\{n(n-2) - g(g-1)\}.$$

Ein Doppelpunct nimmt hiernach (wie früher schon nachgewiesen worden ist): 6, ein

dreifacher Punct: $18 \equiv 6\cdot\frac{3.2}{1.2}$, ein vierfacher Punct: $36 \equiv 6\cdot\frac{4.3}{1.2}$, ein $g$facher Punct: $6\cdot\frac{g(g-1)}{1.2}$ Wendungspuncte in sich auf.

87. Nach den beiden vorhergehenden Nummern können wir die Formeln der 68. Nummer nun auch auf den Fall mehrfacher Puncte ausdehnen.

Zuerst wollen wir den Fall betrachten, dass eine Curve der n. Ordnung einen einzelnen $g$fachen Punct, aber keine Doppelpuncte, hat. Alsdann ergeben sich die nachstehenden vier Gleichungen:

$$m = n(n-1) - g(g-1),$$
$$v = 3[n(n-2) - g(g-1)],$$
$$u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - g(g-1)[n(n-1) - \tfrac{1}{2}g(g-1) - 5],$$
$$n = m(m-1) - 2u - 3v.$$

Die vierte dieser Gleichungen ergibt sich unmittelbar, weil die Polar-Curve der gegebenen keinen singulären Punct hat, der durch den $g$fachen Punct hervorgerufen wird, sondern nur, diesem entsprechend, eine singuläre gerade Linie, welche zugleich g Zweige berührt. Die dritte der vorstehenden Gleichungen wollen wir vorerst als eine algebraische Folge aus den drei übrigen ansehen.

Als Beispiel möge eine Curve der 5. Ordnung mit einem vierfachen Punct dienen, alsdann ist:

$n=5$, $g=4$, $m=20-12\equiv8$, $v=45-36\equiv9$, $u=120-12.9\equiv12$, $n=56-3.9-2.12\equiv5$.

Ist der mehrfache Punct ein bloss dreifacher, so kommt, indem wir $g=3$ setzen:

$$m = n(n-1) - 6,$$
$$v = 3n(n-2) - 18,$$
$$u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - 6(n(n-1) - 8),$$
$$n = m(m-1) - 2u - 3v.$$

Die Curven der vierten Ordnung bieten hier das einfachste Beispiel:

$n=4$, $g=3$, $m=12-6\equiv6$, $v=24-18\equiv6$, $u=28-6.4\equiv4$, $n=30-3.6-2.4\equiv4$.

88. Die Theorie der vielfachen Puncte lässt sich auf die Theorie der Doppelpuncte zurückführen. In der 39. Figur schneiden sich drei Curven-Zweige paarweise in den drei Puncten a, a_1 und a_2 und bilden so drei Doppelpuncte. Fallen diese drei Doppelpuncte, nach allmähliger Annäherung, zusammen, so dass die drei Zweige in einem einzigen Puncte sich schneiden, so entsteht ein dreifacher Punct. Für die Tangenten dieses Punctes können wir die drei geraden Linien PP, QQ und RR nehmen, welche die drei Doppelpuncte paarweise verbinden. Jede andere gerade Linie MM, die mit diesen nicht als zusammenfallend zu betrachten ist, enthält nur drei Durchschnitte mit der Curve. Fig. 39.

Vier Curven-Zweige, die durch denselben Punct gehen, bilden einen vierfachen Punct; verrückt man diese Zweige um geringe Strecken, so schneiden sie sich in der Umgegend des frühern vierfachen Punctes in sechs Puncten und bilden so sechs Doppelpuncte. Als die Tangenten des vierfachen Punctes können wir diejenigen vier geraden Linien ansehen, welche zwei beliebige der drei, auf jedem der vier Zweige liegenden, Doppelpuncte verbinden.

Auf gleiche Weise fallen in einem fünffachen Puncte zehn und in einem $g$fachen Puncte überhaupt $\tfrac{1}{2}g(g-1)$ Doppelpuncte zusammen.

89. Nach den Betrachtungsweisen der vorigen Nummer reducirt ein $g$facher Punct einer gegebenen Curve die Ordnung der Polar-Curve um so viele Einheiten, als ein System von $\tfrac{1}{2}g(g-1)$ Doppelpuncten, nemlich, in Einklang mit der 85. Nummer, um $g(g-1)$ Einheiten.

Es ergibt sich auf diesem Wege auch dieselbe Reduction in der Anzahl der Wendungspuncte, welche wir in der 86. Nummer auf analytischem Wege erhalten haben.

Endlich erhalten wir auch noch unmittelbar die Bestimmung der Anzahl der übrig bleibenden Doppel-Tangenten, eine Bestimmung, die wir bisher nur auf indirectem Wege erhalten haben. Denn nach der 65. Nummer beträgt die Reduction der Doppeltangenten für eine Anzahl von $\frac{1}{2}g(g-1)$ Doppelpuncten, und also auch für einen $g$fachen Punct:

$$(n(n-1)-6)\,g(g-1)-g(g-1)(\tfrac{1}{2}g(g-1)-1),$$
$$\equiv [n(n-1)-\tfrac{1}{2}g(g-1)-5]\,g(g-1).$$

Diese Reduction beträgt also insbesondere für einen dreifachen Punct $6(n(n-1)-8)$, für einen vierfachen Punct $12(n(n-1)-11)$, und so fort.

90. Die folgenden Erörterungen füge ich hinzu, damit wir die Nothwendigkeit der letzten Resultate einsehen.

Wir wollen in dieser Absicht zuvörderst die Anzahl derjenigen Tangenten bestimmen, welche, von dem $g$fachen Puncte der gegebenen Curve:

$$\Sigma_g+\Sigma_{g+1}+\cdots+\Sigma_n=0,$$

aus, an diese sich legen lassen. Zu diesem Ende wollen wir, wie in der 65. Nummer, die vorstehende Gleichung vollständig differentiiren und dann, nach der Differentiation dp durch p und dq durch q ersetzen. Auf diesem Wege gelangen wir, mit Berücksichtigung des Theorems über homogene Functionen zu der nachstehenden Gleichung:

$$g\Sigma_g+(g+1)\Sigma_{g+1}+\cdots+n\Sigma_n=0,$$

und aus der Zusammenstellung dieser Gleichung mit der Gleichung der Curve ergibt sich:

$$(n-g)\Sigma_g+(n-g-1)\Sigma_{g+1}+\cdots+\Sigma_{n-1}=0.$$

Diese Gleichung stellt eine Curve der $(n-1)$. Ordnung dar, welche ebenfalls im Durchschnitte der beiden geraden Linien P und Q einen $g$fachen Punct hat und zwar in der Art, dass die g Tangenten der beiden $g$fachen Puncte zusammenfallen. Jeder der g Zweige der einen Curve, welcher durch den $g$fachen Punct geht, schneidet die andere Curve so, dass $(g+1)$ Durchschnittspuncte in diesem Puncte zusammenfallen. Hiernach reducirt sich die Anzahl der Durchschnittspuncte der beiden Curven, wenn wir von denjenigen, welche in den $g$fachen Punct fallen, absehen, auf:

$$n(n-1)-g(g+1).$$

Dasselbe ist also auch die Anzahl derjenigen Tangenten, welche sich, von dem $g$fachen Puncte aus, an die gegebene Curve legen lassen, und auf welchen die Berührungspuncte nicht mit diesem Puncte zusammenfallen. Jede solche Tangente, welche, des $g$fachen Punctes wegen, $g(g-1)$ Mal gezählt werden muss, ist als eine Pseudo-Doppeltangente anzusehen. Diess gibt in der Anzahl der Doppeltangenten eine erste Reduction von

$$g(g-1)\{n(n-1)-g(g+1)\}$$

Einheiten. Die noch übrige Reduction betrifft diejenigen Doppeltangenten, die der $g$fache Punct unmittelbar verschlingt, in der Art, dass, wenn wir diesen Punct in $\frac{1}{2}g(g-1)$ Doppelpuncte auflösen, je zwei dieser Doppelpuncte, im Allgemeinen, vier gemeinschaftliche Tangenten haben. Ich sage im Allgemeinen, denn der Gedanke liegt nicht fern, dass es hierbei einen Unterschied mache, ob die beiden Doppelpuncte auf demselben Zweige liegen oder nicht. Es beträgt aber die noch übrigbleibende Reduction:

$$g(g-1)\{n(n-1)-\tfrac{1}{2}g(g-1)-5\}-g(g-1)\{n(n-1)-g(g+1)\}$$
$$\equiv \tfrac{1}{2}g(g-1)\{g(g+3)-10\}\equiv r.$$

Wir wollen, der Kürze halber,

$$\tfrac{1}{2}g(g-1)\{\tfrac{1}{2}g(g-1)-1\} \equiv s,$$
$$\tfrac{1}{4}g(g-1)\{\tfrac{1}{2}g(g-5)-3\} \equiv s',$$
$$\tfrac{1}{2}g(g-1)(g-2) \quad \equiv s'',$$

setzen, dann haben wir $s'+s''=s$, und die obige Anzahl der Doppeltangenten, welche der $g$fache Punct unmittelbar verschlingt, ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$4s' + 8s'' = r.$$

In Beziehung auf diesen Ausdruck bemerken wir Folgendes. Es lassen sich überhaupt die $\tfrac{1}{2}g(g-1)$ Doppelpuncte auf $s$malige Weise paarweise zusammenstellen. Von diesen Doppelpuncten liegen $(g-1)$ auf jedem Zweige; diese lassen sich auf $\tfrac{1}{2}(g-1)(g-2)$malige Weise zu zwei combiniren; wonach unter s Combinationen s'' Combinationen von solchen zwei Puncten, die demselben Zweige und also s' Combinationen von Puncten, die zwei verschiedenen Zweigen angehören, sich befinden. Wir kommen auf diesem Wege zu der wahrscheinlichen Erklärung, dass jede Combination zweier derjenigen Doppelpuncte, in welche der $g$fache Punct sich auflösen lässt, je nachdem diese Puncte auf zwei verschiedenen oder auf demselben Zweige liegen, vier oder acht Doppeltangenten fortnimmt. Es würde eine grosse Divinations-Gabe dazu gehören, ohne einen analytischen Fingerzeig ein solches Resultat aus unmittelbarer Anschauung herzunehmen, und viel Kühnheit, bloss auf diese gestützt, es zu behaupten. —

91. Wir können die Formeln der 87. Nummer, nach dem ihrer Construction zu Grunde liegendem Princip, auch unmittelbar auf denjenigen Fall erweitern, dass die Curve mehrere vielfache Puncte und neben diesen zugleich auch Doppelpuncte und Spitzen erster Art hat. Wir wollen hier aber nicht über dreifache Puncte hinausgehen.

Wenn eine Curve der n. Ordnung w dreifache Puncte aber keine Doppelpuncte hat, so bestehen die folgenden Zahl-Bestimmungen:

$$\begin{aligned} m &= n(n-1) - 6w, \\ v &= 3n(n-2) - 18w, \\ u &= \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - 6w(n(n-1)-8) + 18w(w-1),^{*)} \\ n &= m(m-1) - 2u - 3v. \end{aligned}$$

Für Curven der 6. Ordnung ergeben sich hier die folgenden drei Fälle:

$$\begin{array}{llll} w=1, & m=24, & v=54, & u=192, \\ w=2, & m=18, & v=36, & u=96, \\ w=3, & m=12, & v=18, & u=36. \end{array}$$

Wir könnten auch $w=4$ setzen, und erhielten dann:

$$m=6, \qquad v=0, \qquad u=12.$$

In diesem Falle aber löset sich die Curve der 6. Ordnung in ein System dreier durch dieselben vier Puncte gehenden Kegelschnitte auf, welche, in Uebereinstimmung mit den letzten Resultaten, keine Wendungspuncte und zu je zwei vier gemeinschaftliche Tangenten haben.

92. Wenn eine Curve, neben w dreifachen Puncten, zugleich noch x Doppelpuncte und y Spitzen erster Art hat, so ergibt sich das System der folgenden vier Gleichungen:

---

*) Die Reduction in diesem Falle ist nemlich offenbar das $w$fache derjenigen, die in dem Falle eines einzigen dreifachen Punctes Statt findet, weniger 36 Mal (zwei dreifache Puncte haben 36 gemeinschaftliche Pseudo-Tangenten) die Anzahl der Combinationen der w dreifachen Puncte zu zwei.

$$m = n(n-1) - 2x - 3y - 6w\,,$$
$$v = 3n(n-2) - 6x - 8y - 18w\,,$$
$$u = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2x+3y)(n(n-1)-6) - 6w(n(n-1)-8)$$
$$+ 2x(x-1) + \tfrac{9}{2}y(y-1) + 18w(w-1) + 6xy + 12xw + 18yw\,,$$
$$n = m(m-1) - 2u - 3v.$$

Bei Curven der 5. Ordnung mit einem dreifachen Puncte stellen sich hiernach die folgenden möglichen Fälle heraus:

$w = 1$

x	y	m	v	u
—	—	14	27	48
1	—	12	21	32
—	1	11	19	24
2	—	10	15	20
1	1	9	13	14
—	2	8	11	9
3	—	8	9	12
2	1	7	7	8
1	2	6	5	5
—	3	5	3	3

Die Entwicklungen des vorstehenden Paragraphen könnten wir weiter verfolgen, und insbesondere auch auf diejenigen Fälle ausdehnen, wo, indem die Tangenten eines mehrfachen Punctes alle oder zum Theil zusammenfallen, die Curve in diesem Puncte irgend eine der mannigfaltigen Gestaltungen erhält, die überhaupt möglich sind und mit denen wir uns im ersten Paragraphen dieses Abschnittes beschäftigt haben. Doch diese Untersuchungen würden uns hier zu sehr ins Besondere führen. Wir brechen dieselben darum hier ab. —

§. 5.

Ueber Doppel-Tangenten der Curven, insofern man sich diese durch einen Punct beschrieben, vorstellt. Discussion der allgemeinen Gleichung der Curven der vierten Ordnung unter der Form: $pqrs + \mu\Omega_2^2 = 0$.

93. Sobald wir uns eine Curve durch eine gerade Linie umhüllt vorstellen und, dem entsprechend, durch eine Gleichung zwischen Linien-Coordinaten ausdrücken, so sind die Untersuchungen über Doppel-Tangenten den Untersuchungen über Doppelpuncte, wie wir sie in den ersten Paragraphen dieses Abschnittes, wo wir uns die Curve, als durch einen Punct beschrieben, vorstellen, ganz analog, und alle bisher gewonnenen Resultate lassen sich durch das Princip der Reciprocität unmittelbar übertragen. Eine ganz andere Gestalt aber nimmt die Frage an, wenn wir die bisher vorzugsweise zu Grunde gelegte Vorstellung von der Beschreibung einer Curve durch einen Punct und die Darstellung derselben durch Punct-Coordinaten (wenn wir wollen, gewöhnliche Parallel-Coordinaten) festhalten, und dann nach den Doppel-Tangenten der Curve fragen. Hierüber existiren, soviel ich weiss, noch keine Untersuchungen. In der ersten Nummer des ersten Paragraphen dieses Abschnittes habe ich bereits darauf hingedeutet, wovon, im Allgemeinen, die analytische Bestimmung der Doppel-Tangenten abhängt. Ich finde indess auf diesem Wege Schwierigkeit, auch nur die Anzahl

der Doppel-Tangenten einer Curve der 4. Ordnung zu bestimmen.*) Unsere Betrachtungsweisen gestatten uns indess, diesen Gegenstand, so weit er die Curven dieser Ordnung be-

---

*) Um diese analytische Bestimmung zu machen, bietet sich mir kein kürzerer Weg dar, als der folgende, der aus demselben Princip hervorgeht, auf welches Euler, am Ende des 19. Capitels des 2. Buches seiner Einleitung in die Analysis, seine Eliminations-Methode gegründet hat.

Wenn wir zwischen der Gleichung einer gegebenen Curve der vierten Ordnung:

$$\Omega_4 \equiv F(q, p) = o,$$

und der Gleichung:

$$q = \varkappa p + \gamma,$$

welche, bei gehöriger Bestimmung der beiden Constanten $\varkappa$ und γ jede beliebige gerade Linie darstellen kann, die eine der beiden linearen Functionen, etwa q, eliminiren, so ergibt sich eine Gleichung von der folgenden Form:

$$Ap^4 + Bp^3 + Cp^2 + Dp + E = o. \qquad (a)$$

Die Coefficienten in dieser Gleichung enthalten, neben den 14 linearen Constanten der gegebenen Curve, die beiden unbestimmten Coefficienten bis zur 4. Potenz. Machen wir die doppelte Bestimmung, dass die vorstehende Gleichung zwei Paare gleicher Wurzeln habe, so erhalten wir dadurch zwei Bedingungs-Gleichungen zwischen den Coefficienten dieser Gleichung, welche zur Bestimmung von $\varkappa$ und γ hinreichen. Die bezügliche gerade Linie wird alsdann zur Doppel-Tangente und die beiden gleichen Wurzeln der vorstehenden Gleichung geben die beiden Berührungspuncte auf den beiden Doppel-Tangenten.

Differentiiren wir zuvörderst, um jene beiden Bedingungs-Gleichungen abzuleiten, die Gleichung (a), so kommt:

$$4Ap^3 + 3Bp^2 + 2Cp + D = o, \qquad (b)$$

und es bleibt nur noch übrig auszudrücken, dass die beiden Gleichungen (a) und (b) einen gemeinschaftlichen Factor des zweiten Grades haben. Stellen wir diesen durch:

$$p^2 + Fp + G,$$

dar, so ergeben sich, indem wir durch T, U und V drei unbestimmte Coefficienten bezeichnen, die folgenden beiden Form-Bestimmungen:

$$\frac{Ap^4+Bp^3+Cp^2+Dp+E}{p^2+Fp+G} \equiv Ap^2+Tp+U,$$

$$\frac{4Ap^3+3Bp^2+2Cp+D}{p^2+Fp+G} \equiv 4Ap+V;$$

und hieraus die identische Gleichung:

$$\frac{Ap^4+Bp^3+Cp^2+Dp+E}{Ap^2+Tp+U} \equiv \frac{4Ap^3+3Bp^2+2Cp+D}{4Ap+V},$$

welche bis zum 5. Grade ansteigt, und in welcher die Coefficienten aller einzelnen Potenzen von p verschwinden müssen. Hiernach finden wir die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} A(V-4T+B) &= o, \\ BV-3BT-4AU+2AC &= o, \\ CV-2CT-3BU+3AD &= o, \\ DV-DT-2CU+4AE &= o, \\ EV &= DU. \end{aligned}$$

Wenn wir zwischen diesen fünf Gleichungen die drei unbestimmten Coefficienten T, U und V eliminiren, so erhalten wir die beiden verlangten Gleichungen. Eliminiren wir zuvörderst, durch Hülfe der letztern aus der zweiten, dritten und vierten den Coefficienten U, so kommt:

$$\begin{aligned} V - 4T + B &= o, \\ (BD-4AE)V - 3BDT + 2ACD &= o, \\ (CD-3BE)V - 2CDT + 3AD^2 &= o, \\ (D^2-2CE)V - D^2T + 4AED &= o; \end{aligned}$$

und wenn wir ferner, durch Hülfe der ersten Gleichung, T eliminiren, ergibt sich:

trifft, direct anzugreifen und in gewisser Hinsicht zu erschöpfen. Bei Curven der dritten Ordnung kann von Doppel-Tangenten noch nicht die Rede sein, weil die Existenz derselben voraussetzt, dass die Curve von einer geraden Linie wenigstens in vier Puncten geschnitten werde. Bei Curven der vierten Ordnung beträgt die Anzahl der Doppeltangenten plötzlich schon 28 und bei Curven höherer Ordnungen steigt dieselbe so schnell, dass von einer vollständigen Discussion derselben füglich nicht mehr die Rede sein kann.

94. Indem wir die vier Asymptoten einer Curve der vierten Ordnung in Evidenz treten lassen, erhalten wir, nach den frühern Betrachtungsweisen, für eine solche Curve die folgende Gleichung:

$$pqrs + \mu\Omega_2 = 0.$$

Diese Gleichung ist, weil sie **vierzehn** von einander unabhängige Constanten enthält, die allgemeine der Curven der genannten Ordnung. Schreiben wir im zweiten Theile der vorstehenden Gleichung, statt Ω_2, das Quadrat dieser Function, so bleibt sie vom vierten Grade und behält ihre vierzehn, von einander unabhängigen, Constanten. Sie ist also, nach wie vor, die allgemeine Gleichung der Curven der vierten Ordnung. Die in der neuen Gleichung:

$$pqrs + \mu\Omega_2^2 = 0, \tag{1}$$

vorkommenden Functionen erhalten aber, in Beziehung zur Curve, eine ganz andere Bedeutung, welche sich sogleich aus der Form dieser Gleichung ergibt.

Die Gleichung (1) wird auf viermalige Weise befriedigt, indem wir

$$\left.\begin{array}{l} p = 0, \\ q = 0, \\ r = 0, \\ s = 0, \end{array}\right\} \text{ und zugleich } \Omega_2^2 = 0,$$

setzen. Jede der vier geraden Linien P, Q, R und S, welche den vier linearen Functionen p, q, r und s entsprechen, schneidet also die gegebene Curve vierter Ordnung so, dass die jedesmaligen vier Durchschnittspuncte paarweise zusammenfallen und zwar in den beiden Durchschnittspuncten derselben geraden Linie mit dem, durch die folgende Gleichung:

$$\Omega_2 = 0$$

dargestellten Kegelschnitte. Hieraus folgt, dass die genannten vier geraden Linien, im Allgemeinen, **Doppel-Tangenten** der gegebenen Curve vierter Ordnung sind und dass ein und derselbe Kegelschnitt Ω_2, durch die viermal zwei Berührungspuncte auf diesen vier Doppel-Tangenten geht. Wenn wir also drei Doppel-Tangenten, P, Q, R, einer gegebenen Curve der vierten Ordnung kennen und auf jeder der beiden ersten, P, Q, die beiden und auf der dritten, R, einen der beiden Berührungspuncte: so können wir durch diese fünf Puncte immer einen einzigen Kegelschnitt legen. Dieser Kegelschnitt, Ω_2, schneidet alsdann die dritte Tangente R auch noch in ihrem zweiten Berührungspuncte mit der gegebenen Curve vierter Ordnung. Derselbe Kegelschnitt schneidet diese Curve ausserdem noch in zwei Puncten; diejenige gerade Linie, welche diese beiden Puncte verbindet, ist die vierte Doppel-Tangente S und die beiden Puncte selbst die Berührungspuncte auf ihr.

$$\begin{array}{r} (BD-16AE)V + (8AC-3B^2)D = 0, \\ (CD-6BE)V + (6AD-BC)D = 0, \\ (3D^2-8CE)V + (16AE-BD)D = 0. \end{array}$$

Hiernach brauchen wir bloss die drei Werthe für $\frac{V}{D}$ aus diesen Gleichungen zu nehmen und einander gleich zu setzen.

Die Form der Gleichung (1) spricht also, weil diese Gleichung die nothwendige und hinreichende Anzahl von Constanten einschliesst, den nachstehenden Satz aus:

Die drei Paare von Berührungspuncten auf irgend drei Doppel-Tangenten einer gegebenen Curve vierter Ordnung bilden ein solches Sechseck, um welches ein Kegelschnitt sich beschreiben lässt. Derselbe Kegelschnitt geht ausserdem auch noch durch die beiden Berührungspuncte auf einer vierten Doppeltangente.

95. Wenn wir in der Gleichung der Curve den constanten Coefficienten isoliren, so kommt:

$$\mu = -\frac{pqrs}{\Omega_2^2}.$$

Auf welchen Punct die Function Ω_2 auch bezogen werden mag, der Werth von Ω_2^2 bleibt immer positiv; für eine gegebene Curve hat μ einen gegebenen Werth. Hiernach zeigt die vorstehende Gleichung, dass, wenn für verschiedene Puncte der Curve die vier linearen Functionen p, q, r und s ihr Zeichen ändern, diess immer nur in der Art geschehen kann, dass das Zeichen des Productes aller vier immer dasselbe bleibt. Um also von einem Puncte der Curve zu einem andern zu gelangen, müssen wir nothwendig eine gerade Anzahl der vier Doppel-Tangenten P, Q, R und S überschreiten, wenn überhaupt eine von diesen Tangenten überschritten wird. Wenn wir also irgend einen Punct der Curve kennen und diese vier Doppeltangenten derselben gegeben sind, so können wir unmittelbar darüber entscheiden, in welchen der elf von diesen Doppel-Tangenten gebildeten Flächen-Räumen die Curve sich erstrecken kann.

96. Jede der vier geraden Linien P, Q, R und S kann, unabhängig von den drei übrigen, den Kegelschnitt Ω_2 in zwei reellen Puncten schneiden, diesem Kegelschnitte gar nicht begegnen oder endlich denselben berühren. Es sind, dem entsprechend, in der Voraussetzung, dass die Doppel-Tangenten, und hiernach auch die linearen Functionen p, q, r und s reell sind, in Beziehung auf jede der Doppel-Tangenten, drei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

1) Zwei reelle Zweige der Curve berühren die Doppel-Tangente in zwei verschiedenen Puncten;

2) die beiden Curven-Zweige und zugleich mit ihnen also auch die beiden Berührungspuncte sind imaginär;

3) die beiden Berührungspuncte fallen, in dem Uebergangs-Falle, zusammen.

So wie die beiden Durchschnittspuncte einer geraden Linie mit dem Kegelschnitte Ω_2 nothwendig beide reell oder beide imaginär sind, so sind auch die beiden Curven-Zweige, welche eine Doppel-Tangente berühren, beide reell oder beide imaginär. In dem Uebergangs-Falle ist von den beiden Erstreckungen jedes der beiden berührenden Curven-Zweige, vom Berührungspuncte aus, die eine verschwunden; die übrig gebliebene des einen Zweiges setzt sich in der übrig gebliebenen des andern Zweiges fort, so dass diese beiden Zweige, welche wir uns als einen einzigen Zug bildend vorstellen können, durch einen einzigen ersetzt werden, der in demjenigen Puncte, in welchem die beiden Berührungspuncte zusammengefallen sind, von der Doppel-Tangente vierpunctig osculirt wird. Zugleich gewinnen wir auf diesem Wege die Anschauung, wie in einem solchen Osculationspuncte zwei Wendungspuncte sich vereinigen.

Der Uebergang von reellen zu imaginären Berührungspuncten auf einer reellen Doppel-Tangente setzt hiernach voraus, dass die beiden reellen Zweige diese Doppel-Tangente auf derselben Seite berühren. Ob überhaupt diese Berührung auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite einer Doppel-Tangente P Statt findet, ergibt sich unmittelbar, wenn wir

berücksichtigen, wie, auf dieser Doppel-Tangente die beiden Puncte, K_1 und K_2, in welchen sie von dem Kegelschnitte Ω_2 geschnitten wird, in Beziehung auf ihre drei Durchschnitte Q_1, R_1 und S_1, mit den drei zugehörigen Doppel-Tangenten Q, R und S liegen. Liegt keiner dieser drei letztgenannten Puncte oder liegen zwei derselben zwischen den beiden Puncten K_1 und K_2, so berühren zwei reelle Curven-Zweige die fragliche Doppel-Tangente P auf derselben Seite. Liegt hingegen einer der drei Puncte Q_1, R_1 und S_1, oder liegen diese Puncte alle drei zwischen K_1 und K_2, so berühren die beiden reellen Curven-Zweige ihre gemeinschaftliche Tangente P auf entgegengesetzter Seite. Diese Behauptung ist eine unmittelbare Folge aus den Bemerkungen der vorigen Nummer.

Die Situations-Bestimmungen, die wir so eben in Beziehung auf die Doppel-Tangente P gemacht haben, übertragen sich unmittelbar auch auf die drei zugehörigen Doppel-Tangenten Q, R und S. Wenn, zum Beispiel, der Kegelschnitt Ω_2 die Durchschnittspuncte je zweier der vier Doppel-Tangenten alle sechs umschliesst, so wird jede dieser Doppel-Tangenten auf entgegengesetzter Seite berührt. Jede derselben wird beidesmal auf derselben Seite berührt, wenn diese vier Doppel-Tangenten etwa ein Trapez bilden, dessen Seiten den Kegelschnitt Ω_2 so schneiden, dass die vier Winkelpuncte ausserhalb desselben liegen.

Die Form der Gleichung (1) zeigt, dass auch dem nichts entgegensteht, dass die Doppel-Tangenten P, Q, R und S alle vier in demselben Puncte sich schneiden, und insbesondere auch alle vier parallel sind. Den Lauf der Curve können wir hier im Allgemeinen leicht bestimmen.

97. Jede der fraglichen Doppel-Tangenten kann allein für sich und zugleich mit andern eine vierpunctig osculirende sein. Insbesondere können auch alle vier osculirende sein, was dann der Fall ist, wenn der Kegelschnitt Ω_2 die geraden Linien P, Q, R und S alle vier berührt. Aus dem ersten Theile des Satzes der 94. Nummer folgt, dass, wenn eine Curve der vierten Ordnung drei vierpunctig osculirende Tangenten hat, ein und derselbe Kegelschnitt diese drei Tangenten in den drei Osculationspuncten berührt. Dieses Resultat können wir auch auf die nachstehende Weise ausdrücken.

Wenn eine Curve vierter Ordnung drei vierpunctig osculirende Tangenten hat, so schneiden sich diejenigen drei geraden Linien, welche man erhält, wenn man den Durchschnitt je zweier dieser Tangenten mit dem Osculationspuncte auf der dritten verbindet, in demselben Puncte.

98. Wenn sich zwei der vier geraden Linien P, Q, R und S, etwa die beiden ersten, in demselben Puncte des Kegelschnittes Ω_2 schneiden, so muss die Curve vierter Ordnung, welche durch die Gleichung (1) dargestellt wird, damit auf jeder der beiden geraden Linien P und Q zwei Durchschnittspuncte zusammenfallen, einen Doppelpunct haben, der in den Durchschnitt dieser Linien fällt. Diese Linien selbst sind hiernach zwei Tangenten, welche, von dem Doppelpuncte aus, an die Curve gelegt sind.

Wenn der Kegelschnitt Ω_2 durch zwei der sechs Durchschnittspuncte der vier geraden Linien P, Q, R und S geht, so hat die Curve zwei Doppelpuncte, welche mit diesen beiden Durchschnitten zusammenfallen. Es kann hier ein doppelter Fall Statt finden. Es wird entweder eine jener geraden Linien, etwa P, von zwei der drei andern, etwa von Q und R auf dem Kegelschnitte Ω_2 geschnitten, oder es schneiden sich die vier geraden Linien, paarweise, etwa P und Q, R und S, auf diesem Kegelschnitte. Im ersten Falle ist P diejenige gerade Linie, welche die beiden Doppelpuncte verbindet, Q und R sind zwei Tangenten, welche, von den beiden Doppelpuncten aus, an die Curve gelegt sind, während S eine eigentliche Doppel-Tangente geblieben ist. Im zweiten Falle sind P und Q zwei, von dem einen, und R und S zwei, von dem andern Doppelpuncte aus, an die Curve gelegten Tan-

genten. Im ersten Falle erhalten wir, indem wir eine neue lineare Function t einführen, unmittelbar die folgende Form-Bestimmung:

$$\Omega_2 \equiv pt + \varkappa qr,$$

und mithin für die Gleichung der Curve selbst die folgende mit ihren nothwendigen $\frac{4 \cdot 7}{1 \cdot 2} - 2 \equiv 12$ Constanten:

$$pqrs + \mu(pt+\varkappa qr)^2 = o.$$

Im zweiten Falle können wir, nach Einführung dreier constanten Coefficienten,

$$\Omega_2 \equiv p(r+\lambda s) + \varkappa q(r+\lambda' s)$$

setzen und erhalten alsdann für die Gleichung der Curve die folgende mit den nothwendigen 12 Constanten:

$$pqrs + \mu[p(r+\lambda s) + \varkappa q(r+\lambda' s)]^2.$$

Wenn der Kegelschnitt Ω_2 durch drei der sechs Durchschnittspuncte der vier geraden Linien P, Q, R und S geht, die natürlich nicht in gerader Linie liegen können, so hat die Curve drei Doppelpuncte. Wir haben hier wiederum eine doppelte Unterscheidung zu machen. Es können die drei Durchschnittspuncte die Winkelpuncte des von irgend drei der vier geraden Linien, etwa von P, Q und R, gebildeten Dreiecks sein, oder auch drei Winkelpuncte irgend eines der drei, von jenen vier Linien gebildeten, einfachen Vierecks, etwa die Durchschnitte von P mit Q und von R mit P und S. Im ersten Falle sind die geraden Linien P, Q und R diejenigen, welche die drei Doppelpuncte zu je zwei verbinden, während S eine eigentliche Doppeltangente bleibt. Im zweiten Falle verbinden P und R den einen Doppelpunct mit den beiden andern, während Q und S zwei solche Tangenten der Curve sind, welche bezüglich durch die letztgenannten beiden Doppelpuncte gehen. Im ersten Falle können wir die Function Ω_2 auf nachstehende Art näher bestimmen:

$$\Omega_2 \equiv pq + \varkappa pr + \lambda qr,$$

und erhalten alsdann, für die Gleichung der Curve, die nachstehende mit den $\frac{4 \cdot 7}{1 \cdot 2} - 3 \equiv 11$ nothwendigen Constanten:

$$pqrs + \mu(pq+\varkappa pr+\lambda qr)^2 = o.$$

Im zweiten Falle können wir

$$\Omega_2 \equiv p(r+\lambda s) + \varkappa qr$$

setzen, wonach die Gleichung der Curve die folgende Form mit den nothwendigen 11 Constanten annimmt:

$$pqrs + \mu[p(r+\lambda s)+\varkappa qr]^2 = o.$$

Es kann endlich der Kegelschnitt Ω_2 auch durch vier der sechs Durchschnittspuncte der geraden Linien P, Q, R und S gehen, etwa durch die vier Durchschnitte von P und S mit Q und R. Dann erhalten wir:

$$\Omega_2 \equiv ps + \varkappa qr,$$

wonach die Gleichung der Curve, welche dann nur noch 10 Constante einschliesst, die folgende wird:

$$pqrs + \mu(ps+\varkappa qr)^2 = o,$$

die wir auch folgendergestalt schreiben können:

$$\left\{ps + \left(\varkappa + \frac{1}{2\mu}\right)qr\right\}^2 - \frac{4\mu\varkappa+1}{4\mu^2} \cdot q^2r^2 = o.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Gleichung der Curve in dem fraglichen Falle in zwei Gleichungen des zweiten Grades sich auflöset, die reell oder imaginär sind, je nachdem

$$4\mu\varkappa + 1 > o \qquad \text{oder} \qquad 4\mu\varkappa + 1 < o.$$

Wir finden also auch hier die Bestätigung davon, dass eine Curve vierter Ordnung, wenn sie vier Doppelpuncte hat, in zwei, reelle oder imaginäre Kegelschnitte zerfällt.

99. Wir wollen fortfahren, die einzelnen untergeordneten Fälle hervorzuheben.

Wenn eine der vier geraden Linien, etwa P, die Curve berührt und zugleich eine der übrigen, etwa Q, durch den Berührungspunct geht, so wird die Curve von P in vier zusammenfallenden Puncten geschnitten und hat zugleich im Durchschnitte von P und Q einen Doppelpunct. In diesem schneiden sich also zwei solche Curven-Zweige, von welchen der eine in demselben einen Wendungspunct mit der Tangente P hat. Die Gleichung der Curve hat alsdann von ihren Constanten, der doppelten Beziehung der beiden Linien P und Q zum Kegelschnitte Ω_2 wegen, zwei verloren.

In dem Falle der folgenden Form mit nur 10 Constanten:

$$pqrs + \mu(pq+\varkappa r^2)^2 = 0$$

hat die Curve zwei Doppelpuncte in den beiden Durchschnittspuncten der Linie R mit den Linien P und Q. Zwei Curven-Zweige haben beide einen Wendungspunct in den beiden Doppelpuncten und bezüglich P und Q zu Tangenten.

100. Die folgende Form mit 12 Constanten:

$$p^2qr + \mu\Omega_2^2 = 0$$

ist die allgemeine der Gleichung einer Curve der vierten Ordnung mit zwei Doppelpuncten. Die gerade Linie P ist alsdann diejenige, welche die beiden Doppelpuncte verbindet, und den Kegelschnitt Ω_2 in diesen Doppelpuncten schneidet. Zugleich mit den Durchschnitten der Linie P und des Kegelschnittes, werden auch die beiden Doppelpuncte imaginär.

Die beiden Doppelpuncte fallen, wenn die Linie P den Kegelschnitt Ω_2 berührt, in den Berührungspunct zusammen. Alsdann hat die Curve zwei Zweige, welche sich berühren und P ist ihre gemeinschaftliche Tangente. Die beiden geraden Linien Q und R sind irgend zwei beliebige Doppeltangenten. Sie können insbesondere auch vierpunctig osculirende Tangenten sein, oder auch in einem neuen Doppelpuncte der Curve sich schneiden.

101. Die folgende Form:

$$p^3q + \mu\Omega_2^2 = 0,$$

schliesst 10 Constante ein, und zeigt, dass die bezügliche Curve von dem Kegelschnitte Ω_2 so geschnitten wird, dass von den acht Durchschnittspuncten zwei auf Q liegen und zweimal drei auf P zusammenfallen. Diesem entspricht, dass die Curve zwei Spitzen erster Art hat, dass die gerade Linie P diese beiden Spitzen verbindet, dass der Kegelschnitt Ω_2 durch diese Spitzen geht und die beiden Tangenten derselben zugleich auch Tangenten dieses Kegelschnittes sind; dass endlich die gerade Linie Q eine Doppel-Tangente der Curve ist und die Berührungspuncte auf ihr ebenfalls auf dem Kegelschnitte Ω_2 liegen. *) Diese Dop-

---

*) Vielleicht ist es nicht ganz überflüssig, den Nerv dieser und aller ähnlichen Bestimmungen, noch deutlicher in das rechte Licht zu stellen. Dass die Gleichung des Textes eine Curve der fraglichen Art darstellen kann, ist aus ihrer Form erwiesen; dass sie eine solche Curve aber wirklich darstellt, folgt daraus, dass diese von gerade so vielen Constanten abhängt als die Form dieser Gleichung einschliesst. Es können zwei, auf zwiefache Art particularisirte Curven, welche von derselben Anzahl von Constanten abhängen, nicht durch dieselbe Form ausgedrückt werden, wenn diese nicht überzählige Constanten enthält. Denn die Particularisation der Curve hält mit der Particularisation der Form ihrer Gleichung gleichen Schritt, in der Art, dass jede Constante, welche diese verliert, eine bestimmte Particularisation der Curve hervorruft. Wenn daher Alles, was eine Curve particularisirt, in der Form ihrer Gleichung ausgedrückt ist, so kann diese Gleichung nicht mehr Constanten haben, als die Anzahl derjenigen Constanten beträgt, von denen die particularisirte Curve abhängt. Sie kann weniger Constanten haben, dann aber ist ihre Form

pel-Tangente ist nach der Tabelle der 74. Nummer die einzige der Curve, und also immer reell. Die Berührungspuncte auf ihr können indess, je nachdem sie dem Kegelschnitt Ω_2 begegnet oder nicht, oder ihn berührt, reell oder imaginär sein, oder, indem sie in eine vierpunctig osculirende Tangente übergeht, zusammenfallen.

Wenn die Linie P insbesondere den Kegelschnitt Ω_2 berührt, so erhält die Curve, dem Zusammenfallen der beiden Spitzen erster Art entsprechend, zwei sich einander, so wie den Kegelschnitt Ω_2 dreipunctig osculirende Zweige, welche die Linie P zur gemeinsamen Tangente haben. Die Linie Q bleibt, nach wie vor, die einzige Doppel-Tangente der Curve. Der Satz der 94. Nummer verliert hier seine Bedeutung, weil immer ein Kegelschnitt sich beschreiben lässt, der den einen und also auch den andern der beiden sich osculirenden Curven-Zweige im Osculationspuncte dreipunctig osculirt und zugleich durch zwei gegebene Puncte, die beiden Berührungspuncte auf Q, geht.

102. Der Kegelschnitt Ω_2 kann in ein System von zwei geraden Linien ausarten, und diess wird jedesmal dann geschehen, wenn auf drei Doppel-Tangenten der Curve drei Berührungspuncte in gerader Linie liegen. Dann ist die allgemeine Gleichung der Curve die folgende mit 13 Constanten:

$$pqrs + \mu t^2u^2 = o.$$

Diese Form enthält also den folgenden Satz:

Wenn auf irgend drei Doppel-Tangenten drei Berührungspuncte in gerader Linie liegen, so liegen die drei zweiten Berührungspuncte auf einer zweiten geraden Linie und diese beiden geraden Linien schneiden die Curve noch in zwei, immer reellen Puncten, in welchen dieselbe von einer vierten Doppel-Tangente berührt wird.

Die beiden geraden Linien T und U können sowohl reell als auch imaginär sein. In dem letztern Falle reduciren sie sich auf ihren, immer reellen, Durchschnittspunct. Die letzte Gleichung können wir alsdann durch die folgende ersetzen:

$$pqrs + \mu(t^2+\varkappa^2u^2)^2 = o.$$

Es ist klar, dass in dem Falle, wo die beiden fraglichen geraden Linien reell sind, jede der vier Doppel-Tangenten die Curve in zwei reellen Puncten berührt; dass aber in dem Falle, wo diese beiden geraden Linien imaginär sind, auch die Berührungspuncte auf den vier Doppel-Tangenten, alle acht zugleich, imaginär werden. Den untergeordneten Fall, dass die beiden geraden Linien T und U zusammenfallen, werden wir in der folgenden Nummer besonders hervorheben.

Wenn eine der vier Doppel-Tangenten durch den Durchschnitt der beiden geraden Linien T und U geht, so schneiden sich in diesem Puncte zwei reelle Curven-Zweige, von denen der eine, mit der Tangente P, in demselben einen Wendungspunct hat. Die geraden Linien Q, R und S sind drei gewöhnliche Doppel-Tangenten, berühren aber die Curve entweder alle drei zugleich, in reellen oder, alle drei zugleich, in imaginären Puncten. Die allgemeine Gleichung der Curve, mit den 12 nothwendigen Constanten ist die folgende:

$$(t+\varkappa u)qrs + \mu t^2u^2 = o.$$

---

nicht die allgemeine der fraglichen Curven und bezieht sich also auf Curven, die mehr noch particularisirt sind.

Je weiter wir in unsern Untersuchungen vordringen, desto mehr werden wir davon durchdrungen, wie gross die Rolle ist, welche in denselben das Zählen der Constanten spielt. Dieses Zählen ist eine so einfache Sache, aber ohne zu zählen, würden wir oft in Unbestimmtheit uns verlieren.

Wenn zugleich zwei der vier Doppel-Tangenten, etwa P und Q, durch den Durchschnitt der beiden geraden Linien T und U gehen, so haben beide Curven-Zweige zugleich in dem Doppelpuncte einen Wendungspunct. P und Q sind die beiden Tangenten des Wendungspunctes; R und S zwei gewöhnliche Doppel-Tangenten, welche beide die Curve in reellen oder beide in imaginären Puncten berühren. Allgemeine Form mit 11 Constanten:

$$(t+\varkappa u)(t+\varkappa' u)rs + \mu t^2u^2 = o.$$

Die beiden Tangenten P und Q können sowohl imaginär als reell sein.

Zugleich erhalten wir, da eine Curve mit einem Doppelpuncte der fraglichen Art, allein dieses Punctes wegen, drei ihrer Constanten verloren hat, den folgenden Satz:

Wenn eine Curve der vierten Ordnung einen solchen Doppelpunct hat, in welchem zwei ihrer Zweige, beide mit einem Wendungspuncte, sich schneiden, so ordnen sich die Doppel-Tangenten der Curve in der Art paarweise zusammen, dass man die beiden Berührungspuncte auf einer Doppel-Tangente jedes Paares mit den beiden Berührungspuncten auf der andern Doppel-Tangente desselben Paares durch zwei gerade Linien, welche in dem Doppelpuncte sich schneiden, verbinden kann.

Wenn die beiden Tangenten P und Q zusammenfallen, so hängt die Curve nur von 10 Constanten ab und ihre Gleichung nimmt die nachstehende Form an:

$$(t+\varkappa u)^2rs + \mu t^2u^2 = o.$$

Die Curve hat alsdann zwei sich berührende Zweige, wozu aber noch, weil dadurch allein die Anzahl der Constanten sich nur auf 11 reduciren würde, die neue Bedingung kommt, dass zwei Berührungspuncte auf zwei Doppel-Tangenten, R und S, mit dem Berührungspuncte der beiden Curven-Zweige in gerader Linie liegen. Dann liegen auch die beiden übrigen Berührungspuncte, auf den beiden Doppel-Tangenten, mit dem Berührungspuncte der beiden Curven-Zweige in gerader Linie.

Wenn drei der vier Doppel-Tangenten, nach unserer ursprünglichen Bezeichnung, etwa P, Q und R durch den Durchschnitt der beiden geraden Linien T und U gehen, so fallen auf jeder derselben, in diesem Durchschnitte, vier Puncte zusammen. Die Curve hat alsdann einen dreifachen Punct; die bezeichneten drei geraden Linien P, Q und R sind die drei Tangenten dieses Punctes, während S allein eine eigentliche Doppel-Tangente geblieben ist. Es ist klar, dass auch hier, je nachdem die beiden geraden Linien T und U reell oder imaginär sind, diese Doppel-Tangente die Curve in reellen oder imaginären Puncten berührt. Die Gleichung der Curve mit den, vom vorliegenden Falle geforderten, 10 Constanten ist die folgende:

$$(t+\varkappa u)(t+\varkappa' u)(t+\varkappa'' u)s + \mu t^2u^2 = o.$$

Es werden also die drei Tangenten des dreifachen Punctes durch die drei Gleichungen:

$$t + \varkappa u = o, \qquad t + \varkappa' u = o, \qquad t + \varkappa'' u = o,$$

dargestellt. Es können von diesen drei Tangenten zwei imaginär sein. Dann geht ein Zweig der Curve durch einen conjugirten Punct derselben, so dass dem Auge die Singularität sich verbirgt.

Wenn zwei der drei Tangenten des Doppelpunctes zusammenfallen, und demgemäss eine Spitze erster Art auf einem Zweige der Curve steht, so geht die Gleichung der Curve, indem die Anzahl ihrer Constanten sich auf 9 reducirt, in die folgende über:

$$(t+\varkappa u)^2(t+\varkappa u)s + \mu t^2u^2 = o.$$

Endlich können auch die Tangenten des dreifachen Punctes alle drei zusammenfallen; dann geht nur ein einziger Zweig der Curve durch diesen Punct. Die Gleichung der Curve,

mit den 8 nothwendigen Constanten, ist dann die folgende:

$$(t+\varkappa u)^3 + \mu t^2u^2 = o.$$

103. Wenn die beiden, den Kegelschnitt Ω_2 vertretenden geraden Linien in eine einzige zusammenfallen, so ergibt sich die folgende Form mit 11 Constanten:

$$pqrs + \mu t^4 = o.$$

Alsdann hat die bezügliche Curve vier vierpunctig osculirende Tangenten, und die vier Osculationspuncte auf diesen vier Tangenten liegen in gerader Linie. Zugleich ergibt sich, weil die Form der vorstehenden Gleichung nur drei Constante verloren hat, der folgende Satz:

Wenn eine Curve der vierten Ordnung drei vierpunctig osculirende Tangenten hat, und auf diesen die Osculationspuncte in gerader Linie liegen, so hat sie auch noch eine vierte solche Tangente und dieselbe gerade Linie geht auch durch den Osculationspunct auf dieser.

Wenn sich zwei der vier Tangenten auf der geraden Linie T schneiden, so geht die Gleichung der Curve, indem sie nur 10 Constante behält, in die folgende über:

$$p(p+\lambda t)rs + \mu t^4 = o.$$

Die Curve hat alsdann einen Doppelpunct und die Zweige derselben, welche in diesem Doppelpuncte sich schneiden, haben in demselben beide einen Wendungspunct. Damit aber die Anzahl der Constanten, von welchen eine solche Curve abhängt, auf 10 heruntersinke, bedürfen wir noch einer Bedingung und diese finden wir darin, dass die Curve eine vierpunctig osculirende Tangente habe. Hiernach tritt uns zugleich der nachstehende Satz entgegen:

Wenn eine Curve der vierten Ordnung einen solchen Doppelpunct, in welchem zwei ihrer Zweige, beide mit einem Wendungspuncte, sich schneiden und zugleich eine vierpunctig osculirende Tangente hat, so hat sie ausserdem noch eine zweite solche Tangente, und die beiden Osculationspuncte auf diesen beiden Tangenten liegen mit dem Doppelpuncte in gerader Linie.

Die beiden Tangenten P und Q können reell und imaginär sein und insbesondere auch zusammenfallen. In diesem letztern Falle erhalten wir die folgende Form mit 9 Constanten:

$$p^2rs + \mu t^4 = o.$$

Die Curve hat alsdann *zwei sich berührende Zweige*, und zwei vierpunctig osculirende Tangenten, auf welchen die Berührungspuncte mit dem Berührungspuncte der beiden Zweige in gerader Linie liegen.

Wenn *drei* der vier Tangenten, etwa P, Q und R, in demselben Puncte der Linie T sich schneiden, so ergeben sich die folgenden drei Formen, welche bezüglich von 9, 8 und 7 Constanten abhängen:

$$p(p+\varkappa u)(p+\varkappa' u)s + \mu t^4 = o,$$
$$p^2(p+\varkappa u)s + \mu t^4 = o,$$
$$p^3s + \mu t^4 = o.$$

Dann hat die Curve einen *dreifachen Punct* und ausserdem eine vierpunctig osculirende Tangente. Der dreifache Punct particularisirt sich hier, wie am Ende der vorigen Nummer.

104. Wir haben noch nicht alle Formen erschöpft; es können auch, indem wir wiederum von der allgemeinen Form:

$$pqrs + \mu\Omega_2^2 = o, \tag{1}$$

ausgehen, mehr als zwei der vier geraden Linien P, Q, R und S *in demselben Puncte des Kegelschnittes Ω_2 sich schneiden.*

Nach der 98. Nummer erhält die Curve, indem sie eine ihrer Constanten verliert, einen

so erhält die Curve neben einer gewöhnlichen Spitze zweiter Art, einmal (100) einen gewöhnlichen Doppelpunct, das andere Mal (101) eine Spitze erster Art.

106. Der Werth der Function Ω_2 wird, wenn zwei der drei linearen Functionen unter dem Wurzel-Zeichen, etwa p und q, für einen Punct der Curve beide zugleich unendlich kleine Werthe der zweiten Ordnung erhalten, ebenfalls ein unendlich Kleines dieser Ordnung, vorausgesetzt, dass die beiden übrigen linearen Functionen, bezogen auf denselben Punct, endliche Werthe behalten. Die erstgenannten beiden linearen Functionen können zugleich aber nur dann für denselben Punct der Curve unendlich kleine Werthe der zweiten Ordnung haben, wenn die bezüglichen geraden Linien beide Tangenten der Curve in jenem Puncte sind und also zusammenfallen. Dann erhalten wir also den schon am Ende der 100. Nummer bezeichneten Fall zweier sich berührenden Curven-Zweige.

Es ordnet sich diesem Falle derjenige unter, wo, ausser dass zwei der vier linearen Functionen identisch geworden sind und für denselben Punct der Curve unendlich kleine Werthe zweiter Ordnung erhalten, für eben diesen Punct auch noch eine dritte der vier linearen Functionen unendlich klein wird. Diesem entspricht die nachstehende Form mit 10 Constanten:

$$p^2qr + \mu[p+\Sigma_2]^2 = o.$$

Die Function Ω_2 hat alsdann einen unendlich kleinen Werth von der Ordnung $2\frac{1}{2}$ und also die Curve eine gewöhnliche Spitze zweiter Art. P ist die Tangente dieser Spitze, Q eine von der Spitze aus an die Curve gelegte Tangente, und R eine eigentliche Doppel-Tangente, auf welcher die Berührungspuncte reell und imaginär sein und auch zusammenfallen können.

Wenn wir weiter particularisiren und zu der folgenden Form mit 9 Constanten übergehen:

$$p^2q(p+\varkappa q) + \mu[p+\Sigma_2]^2 = o,$$

so wird der Werth von Ω_2 ein unendlich Kleines der dritten Ordnung. Es hat die Curve alsdann zwei, reelle oder imaginäre, sich dreipunctig osculirende Zweige, welche in demselben Puncte von dem Kegelschnitte Ω_2 ebenfalls dreipunctig osculirt werden. P ist die Tangente in diesem gemeinsamen Osculationspuncte, und die beiden übrigen in Evidenz tretenden geraden Linien, sind Tangenten, welche, von diesem Puncte aus, an die Curve gelegt sind.

107. Wenn für denselben Punct der Curve drei der vier linearen Functionen unendlich kleine Werthe der zweiten Ordnung erhalten sollen, so müssen sie, indem die ihnen entsprechenden geraden Linien eine Tangente der Curve in eben jenem Puncte sind, identisch dieselben sein. Wenn alsdann die vierte lineare Function einen endlichen Werth behält, so wird Ω_2 ein unendlich Kleines der dritten Ordnung, und dann ergibt sich der schon am Ende der 101. Nummer betrachtete Fall einer Curve mit zwei sich dreipunctig osculirenden Zweigen.

Es ordnet sich diesem Falle derjenige unter, dem die folgende Form mit 8 Constanten entspricht:

$$p^3q + \mu(p+\Sigma_2)^2 = o.$$

In diesem Falle wird, weil q für denselben Punct der Curve, für welchen p ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist, ebenfalls unendlich klein wird, Ω_2 ein unendlich Kleines von der Ordnung $3\frac{1}{2}$. Dann hat die Curve eine Spitze zweiter Art, welche von zwei solchen Zweigen gebildet wird, deren gegenseitige Annäherung von höchster Ordnung ist.

Wir wollen hier nicht mehr auf diejenigen Fälle zurückkommen, wo der Kegelschnitt Ω_2 durch ein System von zwei geraden Linien vertreten wird und haben somit alle möglichen Arten von Singularitäten berührt, mit Ausnahme derjenigen Fälle, in welchen auf den Doppel-Tangenten ein oder beide Berührungspuncte, oder in welchen die Doppel-Tangenten selbst unendlich weit rücken.

108. Wenn eine Asymptote der Curve zugleich die Curve berührt, so ist sie offenbar als eine Doppel-Tangente anzusehen, auf welcher ein Berührungspunct unendlich weit gerückt ist. Hierin liegt die Voraussetzung, dass der Kegelschnitt eine Hyperbel (oder insbesondere auch eine Parabel) ist und dass die fragliche Asymptote der Curve einer Asymptote dieser Hyperbel parallel ist. Diesem Falle entspricht die folgende Form:

$$pqrs + \mu\{(p+\pi)t + \lambda\}^2 = 0. \text{*)} \qquad [13] \qquad (1)$$

Es ist P die fragliche Asymptote, welche zugleich die Curve berührt und Q, R und S sind drei eigentliche Doppel-Tangenten.

Aus der Particularisation der vorstehenden Form gehen die folgenden Formen hervor:

$$p(p+\alpha)rs + \mu\{(p+\pi)t + \lambda\}^2 = 0, \qquad [12] \qquad (2)$$

$$p(p+\alpha)(p+\alpha')s + \mu\{(p+\pi)t + \lambda\}^2 = 0, \qquad [11] \qquad (3)$$

$$p(p+\alpha)(p+\alpha')(p+\alpha'') + \mu\{(p+\pi)t + \lambda\}^2 = 0. \qquad [10] \qquad (4)$$

In dem Falle der Gleichung (2) hat die Curve einen Doppelpunct, welcher nach der Richtung von P unendlich weit liegt, oder, was dasselbe heisst, zwei mit dieser geraden Linie parallele Asymptoten. In dem Falle der Gleichung (3) hat die Curve, auf der durch die Gleichung: $p+\pi=0$, dargestellten geraden Linie P in unendlicher Entfernung eine Spitze erster Art. In dem Falle der Gleichung (4) berühren sich zwei vollständige, reelle oder imaginäre, Curven-Zweige auf der eben bezeichneten geraden Linie.

Nach neuen Particularisationen ergeben sich die nachstehenden Formen:

$$p^2rs + \mu\{(p+\pi)t + \lambda\}^2 = 0, \qquad [11] \qquad (5)$$

$$p^2(p+\alpha)s + \mu\{(p+\pi)t + \lambda\}^2 = 0, \qquad [10] \qquad (6)$$

$$p^2(p+\alpha)(p+\alpha') + \mu\{(p+\pi)t + \lambda\}^2 = 0, \qquad [9] \qquad (7)$$

$$p^3s + \mu\{(p+\pi)t + \lambda\}^2 = 0, \qquad [9] \qquad (8)$$

$$p^3(p+\alpha) + \mu\{(p+\pi)t + \lambda\}^2 = 0. \qquad [8] \qquad (9)$$

In dem Falle der Gleichung (5) hat die Curve zwei Doppelpuncte, von welchen der eine auf der Linie P, der andere nach der Richtung dieser geraden Linie unendlich weit liegt. In den Fällen der folgenden beiden Gleichungen ist der unendlich weit liegende Doppelpunct einmal eine Spitze erster Art, das andere Mal der Berührungspunct zweier vollständigen, reellen oder imaginären, Zweige. In dem Falle der Gleichung (8) hat die Curve zwei Spitzen erster Art, von welchen die eine die Linie P zu ihrer Tangente hat, während die andere auf der geraden Linie $(p+\pi=0)$ unendlich weit liegt. In dem Falle der letz-

*) Der Kürze und Uebersichtlichkeit wegen, ist unmittelbar nach jeder Gleichung die Anzahl ihrer Constanten bemerkt.

Auch ohne die Form jeder einzelnen Gleichung des Textes besonders zu discutiren, ergibt sich, nach den vorhergehenden Nummern, ihre geometrische Bedeutung sogleich, wenn wir erwägen, dass eine Asymptote des Kegelschnittes Ω_2 als eine Tangente desselben, auf welcher der Berührungspunct unendlich weit liegt, und eine ihr parallele gerade Linie, als durch diesen Berührungspunct gehend, zu betrachten ist. Die früher betrachteten Singularitäten sind hiernach, in den Fällen der nachstehenden Nummern, bloss auf einem Hyperbel-Zweige unendlich weit gerückt. Solche Singularitäten sind übrigens im ersten Abschnitte mit grosser Ausführlichkeit behandelt worden.

ten Gleichung wird die unendlich weit liegende Spitze erster Art durch zwei vollständige, sich berührende Curven-Zweige vertreten.

109. Wenn auf einer Doppel-Tangente beide Berührungspuncte unendlich weit liegen, so geht sie in eine vierpunctig osculirende Asymptote über. Die entsprechende Form ist die folgende:

$$pqrs + \mu\{pt+\lambda\}^2 = o. \qquad [12] \qquad (10)$$

Neuen Particularisationen entsprechen die folgenden Formen:

$$p(p+\alpha)rs + \mu\{pt + \lambda\}^2 = o, \qquad [11] \qquad (11)$$

$$p(p+\alpha)(p+\alpha')s + \mu\{pt + \lambda\}^2 = o, \qquad [10] \qquad (12)$$

$$p(p+\alpha)(p+\alpha')(p+\alpha'') + \mu\{pt + \lambda\}^2 = o. \qquad [9] \qquad (13)$$

Die Curve vierter Ordnung hat in den Fällen dieser drei Gleichungen, 1) zwei parallele Asymptoten, von welchen die eine, P, die Curve dreipunctig osculirt, 2) zwei auf P in unendlicher Entfernung sich berührende Zweige, 3) eine gewöhnliche Spitze zweiter Art.

Wenn wir weiter particularisiren, so treten uns die folgenden Formen entgegen:

$$p^2rs + \mu\{pt + \lambda\}^2 = o, \qquad [10] \qquad (14)$$

$$p^2(p+\alpha)s + \mu\{pt + \lambda\}^2 = o, \qquad [9] \qquad (15)$$

$$p^2(p+\alpha)(p+\alpha') + \mu\{pt + \lambda\}^2 = o, \qquad [8] \qquad (16)$$

$$p^3s + \mu\{pt + \lambda\}^2 = o, \qquad [8] \qquad (17)$$

$$p^3(p+\alpha) + \mu\{pt + \lambda\}^2 = o. \qquad [7] \qquad (18)$$

In dem Falle der Gleichung (14) bilden zwei in unendlicher Entfernung auf der Asymptote P zusammenfallenden Doppelpuncte einen Berührungspunct zweier vollständigen, reellen oder imaginären Curven-Zweige. In dem Falle der folgenden Gleichung hat die Curve in unendlicher Entfernung auf der Doppel-Asymptote P eine Spitze zweiter Art. In dem Falle der Gleichung (16) osculiren sich dreipunctig auf der Doppel-Asymptote P zwei vollständige, reelle oder imaginäre, Zweige der Curve. Dasselbe findet Statt in dem Falle der Gleichung (17). Diese letzten beiden übrigens identischen Fälle unterscheiden sich, was die Darstellungsweise betrifft, bloss darin, dass als die vier zusammengehörigen Doppel-Tangenten einmal die Doppel-Asymptote P, doppelt gerechnet, und zwei ihr parallele Tangenten, das andere Mal die Doppel-Asymptote P, dreifach gerechnet, und eine eigentliche Doppel-Tangente S genommen worden sind. In dem Falle der letzten Gleichung endlich hat die Curve auf der Doppel-Asymptote P in unendlicher Entfernung eine Spitze zweiter Art, welche von zwei solchen Schenkeln gebildet wird, die unter einander einen Contact von der Ordnung $2\frac{1}{2}$ haben.

110. Es können auch zugleich zwei der vier Asymptoten einer Curve vierter Ordnung überdiess die Curve berühren. Dieser Voraussetzung entspricht die folgende Form:

$$pqrs + \mu\{(p+\pi)(q+\varkappa) + \lambda\}^2 = o. \qquad [12] \qquad (19)$$

Wenn auf einer der beiden Doppel-Tangenten auch der zweite Berührungspunct unendlich weit rückt, und diese Doppel-Tangente in eine vierpunctig osculirende Asymptote übergeht, so kommt:

$$pqrs + \mu\{p(q+\varkappa) + \lambda\}^2 = o, \qquad [11] \qquad (20)$$

und wenn beide Doppel-Tangenten in vierpunctig osculirende Asymptoten übergehen:

$$pqrs + \mu\{pq + \lambda\}^2 = o. \qquad [10] \qquad (21)$$

Wenn wir die drei vorstehenden Gleichungen in ihrem ersten Gliede particularisiren, so ergeben sich mehrfache Formen, deren geometrische Deutung, nach der 108. und 109. Nummer, durchaus keine Schwierigkeit darbietet. Wir wollen hier nur diejenigen dieser Formen besonders hervorheben, denen solche Curven entsprechen, welche auf jeder der beiden Asymptoten, P und Q, in unendlicher Entfernung einen Doppelpunct haben. Dann ergeben sich die

folgenden:

$$p(p+\alpha)q(q+\beta) + \mu\{(p+\varkappa)(q+\varkappa) + \lambda\}^2 = o, \quad [10] \quad (22)$$
$$p^2q(q+\beta) + \mu\{(p+\pi)(q+\varkappa) + \lambda\}^2 = o, \quad [9] \quad (23)$$
$$p(p+\alpha)q(q+\beta) + \mu\{p(q+\varkappa) + \lambda\}^2 = o, \quad [9] \quad (24)$$
$$p(p+\alpha)q^2 + \mu\{p(q+\varkappa) + \lambda\}^2 = o, \quad [8] \quad (25)$$
$$p^2q(q+\beta) + \mu\{p(q+\varkappa) + \lambda\}^2 = o, \quad [8] \quad (26)$$
$$p(p+\alpha)q(q+\beta) + \mu\{pq + \lambda\}^2 = o, \quad [8] \quad (27)$$
$$p^2q(q+\beta) + \mu\{pq + \lambda\}^2 = o. \quad [7] \quad (28)$$

In dem Falle der Gleichung (22) hat die Curve zwei unendlich weit liegende Doppelpuncte oder, mit andern Worten, zwei Paare paralleler Asymptoten. In dem Falle (23) ist ein Doppelpunct in endlicher Entfernung hinzugekommen, im Falle (24) ist eine Tangente, P, des einen Paares eine osculirende. Im Falle (25) verbindet sich Beides. Im Falle (26) hat die Curve in unendlicher Entfernung, zugleich mit einem Doppelpuncte, eine Berührung. Im Falle (27) hat die Curve zwei Paare paralleler Asymptoten und in jedem Paare eine osculirende, im Falle (28) ein solches Paar und eine Berührung.

111. **Wenn drei der vier Asymptoten einer Curve der vierten Ordnung diese Curve überdiess berühren, so thut es nothwendig auch die vierte Asymptote und dann liegen die Berührungspuncte auf diesen Asymptoten alle vier in gerader Linie.**

In dieser Voraussetzung hat die Gleichung der Curve die nachstehende Form:

$$pqrs + \mu t^2 = o, \quad [11] \quad (29)$$

und darin, dass diese Gleichung nur eine einzige Constante weniger hat, als die Gleichung (19) der vorigen Nummer, liegt der Beweis der vorstehenden Behauptung.

Wir wollen bei der Discussion dieser Gleichung, in welcher die vier Asymptoten der Curve in Evidenz treten, und der genauern Bestimmung der Natur der unendlichen Zweige dieser Curve hier nicht verweilen, weil wir im ersten Abschnitte uns ausführlich hiermit beschäftigt haben.

112. Es bleiben uns jetzt nur noch diejenigen Fälle zu discutiren übrig, in welchen die Doppel-Tangenten selbst unendlich weit rücken. Gehen wir hierbei wiederum von der allgemeinen Form:

$$pqrs + \mu\Omega_2^2 = o,$$

aus, so wird das **unendlich weit Rücken einer solchen Doppel-Tangente** dadurch ausgedrückt, dass die bezügliche lineare Function auf eine blosse Constante sich reducirt und also aus der vorstehenden Form verschwindet. Die resultirende Gleichung:

$$pqr + \mu\Omega_2^2 = o, \quad [12] \quad (1)$$

stellt, im Allgemeinen, eine solche Curve dar, die zwei Systeme parabolischer Asymptoten hat, deren Durchmesser-Richtung dieselbe ist, als die Richtung der beiden Asymptoten des Kegelschnittes Ω_2. Diese Gleichung particularisirt sich, indem wir voraussetzen, dass die drei Doppel-Tangenten P, Q und R den Asymptoten des Kegelschnittes Ω_2 entweder alle oder theilweise parallel sind oder zusammenfallen. Dann erhält die Curve statt eines oder statt beider Systeme parabolischer Asymptoten in unendlicher Entfernung einen oder zwei singuläre Puncte. Wenn sich, um nur zwei Beispiele hervorzuheben, die vorstehende Gleichung folgendermassen particularisirt:

$$p^3 + \mu[pt + \lambda]^2 = o, \quad [6]$$
$$p^2q + \mu[pq + \lambda]^2 = o, \quad [6]$$

so hat die Curve einmal, neben einem Systeme parabolischer Asymptoten, auf der Linie P, in unendlicher Entfernung, eine Spitze zweiter Art, welche von zwei solchen Schenkeln ge-

bildet wird, für welche die Ordnung der Annäherung $2\frac{1}{2}$ beträgt, das andere Mal hat sie, in unendlicher Entfernung, auf der Linie Q, eine Spitze erster und auf der Linie P, eine Spitze zweiter Art.

Wenn zwei Doppel-Tangenten unendlich weit rücken und demnach in unendlicher Entfernung als zusammenfallend zu betrachten sind, so nimmt die Gleichung der Curve die folgende Form an:

$$pq + \mu\Omega_2^2 = o. \qquad [10] \qquad (2)$$

Dann liegen die beiden Doppelpuncte des allgemeinern Falles der 98. Nummer nach der Richtung der beiden Asymptoten des Kegelschnittes Ω_2 unendlich weit und sind, mit diesen Asymptoten, zugleich reell und imaginär; oder mit andern Worten, es hat die Curve zwei Paare paralleler Asymptoten. Wenn wir particularisiren, so kommt:

$$pq + \mu[(p+\pi)t + \lambda]^2 = o, \qquad [9]$$
$$pq + \mu[(p+\pi)(q+\varkappa) + \lambda]^2 = o, \qquad [8]$$
$$pq + \mu[pt + \lambda]^2 = o, \qquad [8]$$
$$pq + \mu[p(q+\varkappa) + \lambda]^2 = o, \qquad [7]$$
$$p(p+\alpha) + \mu[(p+\pi)t + \lambda]^2 = o, \qquad [8]$$
$$p(p+\alpha) + \mu[pt + \lambda]^2 = o. \qquad [7]$$

Dann hat die Curve, in unendlicher Entfernung, bezüglich einen gewöhnlichen Doppelpunct und eine Spitze erster Art, zwei Spitzen erster Art, einen gewöhnlichen Doppelpunct und eine Berührung, eine Spitze erster Art und eine Berührung; ferner, in den Fällen der beiden letzten Formen, neben einem gewöhnlichen Doppelpuncte einmal eine Berührung, das andere Mal eine gewöhnliche Spitze zweiter Art.

Wenn endlich drei Doppel-Tangenten unendlich weit rücken und demnach in unendlicher Entfernung als zusammenfallend zu betrachten sind, so ergibt sich die folgende Form:

$$p + \mu\Omega_2^2 = o. \qquad [8] \qquad (3)$$

Dann liegen die beiden Spitzen erster Art des allgemeinern Falles der 101. Nummer nach der Richtung der beiden Asymptoten des Kegelschnittes Ω_2 unendlich weit, und sind mit diesen Asymptoten zugleich reell oder imaginär. Einer Particularisation entsprechen die folgenden Formen:

$$p + \mu[(p+\pi)t + \lambda]^2 = o, \qquad [7]$$
$$p + \mu[pt + \lambda]^2 = o. \qquad [6]$$

Dann hat die Curve, in unendlicher Entfernung, neben einer Spitze erster Art einmal eine Berührung, das andere Mal eine gewöhnliche Spitze zweiter Art.

113. Diejenigen Fälle, in welchen die unendlich weit gerückte Doppel-Tangente den Kegelschnitt Ω_2 berührt, fordern, dass dieser Kegelschnitt in eine Parabel übergehe. Demgemäss verwandelt sich die Gleichung (1) der vorigen Nummer in die folgende:

$$pqr + \mu[t^2 + \lambda s]^2 = o. \qquad [11]$$

Dann wird die unendlich weit gerückte Doppel-Tangente von der Curve vierpunctig osculirt, während P, Q und R eigentliche Doppel-Tangenten geblieben sind. Die Curve selbst ist alsdann die (Seite 146) als 138. Art der Curven vierter Ordnung aufgezählte. Die vorstehende Gleichung particularisirt sich, wenn eine oder mehrere der drei Doppel-Tangenten die Durchmesser-Richtung der, den Kegelschnitt Ω_2 vertretenden, Parabel annehmen. Demnach ergibt sich:

$$pqr + \mu[p^2 + \lambda s]^2 = o, \qquad [10]$$
$$p(p+\alpha)r + \mu[p^2 + \lambda s]^2 = o, \qquad [9]$$
$$p(p+\alpha)(p+\alpha') + \mu[p^2 + \lambda s] = o, \qquad [8]$$

und nach Analogie der frühern Entwicklungen (105) können wir sagen, dass die entsprechenden Curven auf der unendlich weit gerückten Doppel-Tangente eine Spitze erster Art, eine Berührung, eine gewöhnliche Spitze zweiter Art haben. Diese Curven sind aber die, als die 140., die 142. (143.) und 144. Art der Curven vierter Ordnung aufgezählten.

Wenn zwei Doppel-Tangenten zusammenfallen und den Kegelschnitt Ω_2 berühren, so hat die Curve zwei, reelle oder imaginäre, sich berührende Zweige. Sind die zusammenfallenden Doppel-Tangenten unendlich weit gerückt, so erhalten wir für die entsprechende Form aus der Gleichung (2) der vorigen Nummer die folgende:

$$pq + \mu[t^2 + \lambda s]^2 = o. \qquad [9]$$

Die bezügliche Curve ist die 142. (143.) Art der Curven vierter Ordnung. Particularisiren wir, ähnlich wie eben, so kommt:

$$pq + \mu[p^2 + \lambda s]^2 = o, \qquad [8]$$

$$p(p+\alpha) + \mu[p^2 + \lambda s]^2 = o. \qquad [7]$$

Der ersten dieser beiden Gleichungen entspricht die 144. Art von Curven vierter Ordnung, der zweiten die 145. (146.) Art. In diesem letztern Falle hat die Curve zwei sich dreipunctig osculirende parabolische Zweige, mit derselben Durchmesser-Richtung und gleichem Parameter.

Wenn drei Doppel-Tangenten zusammenfallen und den Kegelschnitt Ω_2 berühren, so hat die Curve zwei, reelle oder imaginäre, sich dreipunctig osculirende Zweige; diese beiden Zweige werden parabolische, wenn die zusammenfallenden Doppel-Tangenten unendlich weit gerückt sind. Dann gibt die Gleichung (3) der vorigen Nummer die folgende Form:

$$p + \mu[t^2 + \lambda]s^2 = o, \qquad [7]$$

und die bezügliche Curve ist wiederum die 145. (146.) Art. Particularisiren wir, wie vorhin, so kommt:

$$p + \mu[p^2 + \lambda s]^2 = o. \qquad [6]$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Curve (die 147. Art) hat auf der Parabel

$$p^2 + \lambda s = o$$

eine Spitze zweiter Art. Es entspricht dieselbe einer nicht unendlich weit liegenden Spitze zweiter Art, die von zwei solchen Schenkeln gebildet wird, die unter einander einen Contact höherer Ordnung haben. —

Ich habe länger bei den mannigfach particularisirten Formen verweilt, weil sie für die, schon im ersten Abschnitte gemachte Behauptung, dass alle Singularitäten der Curven sich auch in unendlicher Entfernung wiederfinden, eine bemerkenswerthe Bestätigung bieten. Wir wenden uns nun wiederum zu den allgemeinen Untersuchungen zurück.

114. Wenn eine Curve der vierten Ordnung, wie sie nur vier Asymptoten hat, auch nur vier Doppel-Tangenten hätte, so würde man ihrer Gleichung nur auf einmalige Art die Form:

$$pqrs + \mu\Omega_2^2 = o,$$

geben und das System der vier linearen Functionen p, q, r und s, so wie die Function Ω_2 und den Coefficienten μ, nur auf einzige Weise bestimmen können. Da aber eine solche Curve 28 Doppel-Tangenten hat, so muss die Gleichung derselben so oft die vorstehende Form annehmen können, als diese 28 Doppel-Tangenten auf verschiedene Art zu vier sich so combiniren lassen, dass alle Combinationen zu drei vorkommen, aber jede derselben nur ein einziges Mal. Die Anzahl der Combinationen zu drei beträgt $\frac{28.27.26}{1.2.3}$ und da eine Combination zu vier vier Combinationen zu drei enthält, so ist die Anzahl aller fraglichen Combinationen zu vier dem vierten Theile

aller Combinationen zu drei gleich und beträgt hiernach:

$$\frac{28 . 27 . 26}{2 . 3 . 4} = 819.$$

Auf eben so viele verschiedene Arten lässt sich eine gegebene Curve der vierten Ordnung durch eine Gleichung von der Form der Gleichung (1) darstellen. Die Möglichkeit der fraglichen Combinations-Weisen ist hiermit zugleich durch geometrische Betrachtungen erwiesen. *)

---

*) Nicht jede Anzahl von Elementen kann in der Art zu vier combinirt werden, dass jede Combination zu drei ein einziges Mal vorkommt. Nennen wir überhaupt die Anzahl der zu combinirenden Elemente p, so muss zunächst

$$\frac{p(p-1)(p-2)}{2 . 3 . 4}$$

eine ganze Zahl sein, was aber bloss voraussetzt, dass p eine gerade Zahl ist. Ferner muss, wenn wir beliebig irgend ein Element absondern, die Zahl der übrig bleibenden Elemente so beschaffen sein, dass sich dieselben zu drei so combiniren lassen, dass in diesen Combinationen jede Combination zu zwei vorkommt, aber nur ein einziges Mal. Die Anzahl der Combinationen von $(p-1) = q$ Elementen zu zwei beträgt aber $\frac{q(q-1)}{1 . 2}$, und da diese, zu drei genommen, die fraglichen Combinationen zu drei bilden, so muss auch

$$\frac{q(q-1)}{2 . 3}$$

eine ganze Zahl sein. Diess setzt voraus, dass q durch eine der beiden folgenden Formen bestimmt ist:

$$q = 3n, \qquad q - 1 = 3n.$$

Wenn aber q Elemente sich in der fraglichen Art zu drei combiniren lassen sollen, so muss, wenn wir von diesen Elementen ein beliebiges absondern, die Anzahl der übrig bleibenden Elemente so beschaffen sein, dass sich dieselben zu zwei so combiniren lassen, dass jedes Element in diesen Combinationen nur ein einziges Mal vorkommt; mit andern Worten, es muss $(q-1)$ eine gerade, also q eine ungerade Zahl sein. Hiernach particularisiren sich die beiden letzten Form-Bestimmungen weiter in die folgenden:

$$q = 6n + 3,$$
$$q = 6n + 1,$$

woraus sich, ohne weitere Beschränkung, für die Zahl p die nachstehende zwiefache Form-Bestimmung ergibt:

$$p = 6n + 4,$$
$$p = 6n + 2. -$$

Wir können diese combinatorischen Erörterungen, die uns, für den Fall der Combinationen zu drei, schon bei der Discussion der Wendungspuncte einer gegebenen Curve der dritten Ordnung entgegengetreten sind (System, dritter Abschnitt, §. 8., N°. 322), und uns hier für den Fall von Combinationen zu vier beschäftigen, auch auf den Fall von Combinationen zu mehr als vier Elementen ausdehnen und uns zunächst fragen, wie eine Zahl m beschaffen sein muss, dass m Elemente sich so zu fünf combiniren lassen, dass in diesen Combinationen jede Combination zu vier ein einziges Mal vorkomme. $(m-1)$ muss offenbar dieselbe Form haben, als in dem Vorstehenden p, mithin besteht eine der beiden nachstehenden Formen:

$$m = 6p + 5,$$
$$m = 6p + 3.$$

Hier kommt aber die neue Bedingung hinzu, dass

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 . 3 . 4 . 5}$$

eine ganze Zahl sein muss, welches eine der folgenden Bestimmungen fordert:

115. Wir wollen zuvörderst nachweisen und zugleich anschaulich machen, dass die 28 Doppel-Tangenten einer Curve vierter Ordnung alle reell sein, und dabei alle auch die Curve in reellen Puncten-Paaren berühren können.

Wenn sich, indem wir die Form:

$$pqrs + \mu\Omega_2^2 = o, \tag{1}$$

zu Grunde legen, die drei geraden Linien P, Q und R zu je zwei auf dem Kegelschnitte Ω_2 schneiden, so hat nach der 98. Nummer die bezügliche Curve drei Doppelpuncte, welche mit diesen Durchschnittspuncten zusammenfallen. Nehmen wir daher insbesondere, indem wir uns gewöhnlicher rechtwinkligen Coordinaten bedienen, für den Kegelschnitt Ω_2, den durch die folgende Gleichung dargestellten Kreis:

$$y^2 + x(x-2) = o,$$

und für die eben genannten drei geraden Linien die durch die nachstehenden drei Gleichungen dargestellten:

$$p \equiv y + x = o, \qquad q \equiv y - x = o, \qquad r \equiv x - 1 = o,$$

so stellt die obige Gleichung (1) eine Curve der vierten Ordnung mit drei Doppelpuncten dar, wie auch immerhin die, der vierten geraden Linie S entsprechende lineare Function s angenommen werden mag. Von dieser Annahme hängt die nähere Bestimmung der Curve vierter Ordnung ab, welche immer diese gerade Linie S in ihren beiden Durchschnittspuncten mit dem oben bestimmten Kreise berührt. Die beiden Berührungspuncte können reell und imaginär sein. Wir wollen den Fall hervorheben, dass sie reell sind und dem entsprechend,

$$s \equiv x - \tfrac{3}{2}$$

setzen. Ueberdiess sei, um die Curve vollständig zu bestimmen, $\mu = -2$. Diese Curve erhält alsdann, indem sie durch die Gleichung:

$$\Omega_4 \equiv (y^2-x^2)(x-1)(x-\tfrac{3}{2}) - 2\{y^2 - x(x-2)\}^2 = o \tag{2}$$

dargestellt wird, die Gestalt, welche in der 40. Figur stärker ausgedrückt ist. Wenn wir hiernach die folgenden beiden in eine einzige Gleichung zusammengezogenen Gleichungen bilden:

$$\Omega_4 \pm \varkappa = o, \tag{3}$$

so verliert die ursprüngliche Curve, indem sie in eine der beiden, durch diese Gleichung dargestellten, Curven übergeht, ihre drei Doppelpuncte. Es ist aber klar, dass sie hierbei um so weniger, und zwar bis zum Unmerkbaren hin, von der ursprünglichen Form abweicht, je kleiner $\varkappa$ angenommen wird. Was nun die Unterscheidung der beiden neuen Curven unter einander betrifft, so ist klar, dass keine derselben die ursprüngliche schneidet, und dass also eine der beiden Curven diese ganz umschlingt, während die andere, welche wir hier zunächst betrachten, aus vier von einander abgesonderten Ovalen besteht, welche innerhalb der vier, von der ursprünglichen Curve gebildeten, Menisken liegen, und diesen bis zum Zusammenfallen sich annähern können. Jedes der vier Ovale hat hiernach seine

---

$$m = 5n,$$
$$m = 5n + 1,$$
$$m = 5n + 2,$$
$$m = 5n + 3.$$

Combiniren wir diese vier Form-Bestimmungen der Zahl m mit den beiden frühern, so ergeben sich, als einzig möglich, die folgenden acht:

$$m = 30n + 5, \qquad m = 30n + 15,$$
$$m = 30n + 11, \qquad m = 30n + 21,$$
$$m = 30n + 17, \qquad m = 30n + 27,$$
$$m = 30n + 23, \qquad m = 30n + 3.$$

eigene Doppel-Tangente, ferner lassen sich dieselben zu zwei auf sechsmalige Weise zusammenstellen, und dann haben je zwei Ovale vier gemeinschaftliche Tangenten. Auf diese Weise ergibt sich, dass die Curve im Ganzen 28 reelle Tangenten hat.

Was die erstgenannte der beiden Curven betrifft, so hat sie offenbar nur 4 reelle und folglich 24 imaginäre Doppel-Tangenten.

116. Wir können also als Normal-Fall denjenigen betrachten, in welchem die Curve 28 reelle Doppel-Tangenten hat. Dann lässt sich die Gleichung der Curve 819 Mal auf reelle Weise auf die Form der Gleichung:

$$pqrs + \mu\Omega_2^2 = 0, \tag{1}$$

bringen und dann gibt es 819 verschiedene und reelle Kegelschnitte Ω_2, deren jeder durch die acht Berührungspuncte auf vier von jenen 28 Doppel-Tangenten geht. Wir wollen zunächst jetzt diejenigen coordinirten Fälle discutiren, in welchen diese Doppel-Tangenten, alle oder zum Theil, imaginär sind.

Es ist klar, dass, wenn die Curve imaginäre Doppel-Tangenten hat, diese in gerader Anzahl vorhanden sind, und dann paarweise durch Gleichungen von der Form der nachstehenden dargestellt werden:

$$\begin{aligned} p' \pm p''\sqrt{-1} &= 0, \\ q' \pm q''\sqrt{-1} &= 0, \\ r' \pm r''\sqrt{-1} &= 0, \\ s' \pm s''\sqrt{-1} &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir ferner:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu' \pm \mu''\sqrt{-1}, \\ \Omega_2 &= \Omega'_2 \pm \Omega''_2\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

so erhalten wir, für die allgemeinste Form, welche die Gleichung der Curve, in Beziehung auf das Imaginäre überhaupt, annehmen kann, die nachstehende:

$$(p'+p''\sqrt{-1})(q'+q''\sqrt{-1})(r'+r''\sqrt{-1})(s'+s''\sqrt{-1}) + (\mu'+\mu''\sqrt{-1})\{\Omega'_2+\Omega''_2\sqrt{-1}\}^2 = 0. \tag{2}$$

Wenn wir diese Gleichung entwickeln, so muss aus ihr das Imaginäre von selbst ausfallen. In Folge hiervon ergibt sich:

$$\begin{aligned} p'q'r's'' + p'q'r''s' + p'q''r's' + p''q'r's' - \{p'q''r''s'' + p''q'r''s'' + p''q''r's'' + p''q''r''s'\} \\ + \mu''(\Omega'^2_2-\Omega''^2_2) + \mu'\Omega'_2\Omega''_2 \equiv 0, \end{aligned} \tag{3}$$

und dann erhalten wir für die Curve die nachstehende Gleichung:

$$\begin{aligned} p'q'r's' - \{p'q'r''s'' + p'q''r's'' + p''q'r's'' + p'q''r''s' + p''q'r''s' + p''q''r's'\} + p''q''r''s'' \\ + \mu'(\Omega'^2_2-\Omega''^2_2) - \mu''\Omega'_2\Omega''_2 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir bemerken zugleich, dass dieselbe Curve, welche alsdann durch die Gleichung (2) dargestellt wird, auch durch folgende Gleichung dargestellt werden kann:

$$(p'-p''\sqrt{-1})(q'-q''\sqrt{-1})(r'-r''\sqrt{-1})(s'-s''\sqrt{-1}) + (\mu'-\mu''\sqrt{-1})\{\Omega'_2-\Omega''_2\sqrt{-1}\}^2 = 0, \tag{5}$$

denn beide Gleichungen reduciren sich, in Folge der identischen Gleichung (3), gleichmässig auf die Gleichung (4). Die 28 Constanten der Gleichungen (2) und (5) reduciren sich, in Folge der identischen Gleichung (3) um 14; so dass nur noch die 14 nothwendigen übrig bleiben. Eben so viele Constanten verbleiben also auch der Gleichung (4).

Weil die Gleichung (3) eine identische ist, so stellen die beiden Gleichungen:

$$p'q'r's'' + p'q'r''s' + p'q''r's' + p''q'r's' - \{p'q''r''s'' + p''q'r''s'' + p''q''r's'' + p''q''r''s'\} = 0, \tag{6}$$

$$\mu''(\Omega'^2_2-\Omega''^2_2) + \mu'\Omega'_2\Omega''_2 = 0, \tag{7}$$

wie je zwei andere, welche wir durch eine beliebige Zerlegung derselben erhalten, identisch dieselbe Curve dar. Die Form der zweiten dieser Gleichungen zeigt, dass diese Curve in ein System von zwei Kegelschnitten ausartet, deren immer reelle Gleichungen die folgenden sind:

$$2\mu''\Omega'_2 - \{\mu' \pm \sqrt{(\mu'^2+4\mu''^2)}\}\Omega''_2 = 0.$$

117. Wenn die drei ersten Doppel-Tangenten reell sind, so ist es die zugehörige vierte ebenfalls.

Es folgt diess schon daraus, dass, wenn die Form:

$$pqr(s'+s''\sqrt{-1}) + (\mu'+\mu''\sqrt{-1})\{\Omega'^2_2 + \Omega''^2_2\sqrt{-2}\}^2 = o,$$

möglich wäre, diese Form, nach der vorigen Nummer, die folgende bedingen würde:

$$pqr(s'-s''\sqrt{-1}) + (\mu'-\mu''\sqrt{-1})\{\Omega'^2_2-\Omega''^2_2\sqrt{-1}\}^2 = o.$$

Dann würden also mit denselben drei reellen Doppel-Tangenten P, Q und R zwei verschiedene imaginäre Doppel-Tangenten als vierte zusammengehören, was unstatthaft ist.

Wir können uns von demselben Resultate auch direct überzeugen. Denn derjenige Kegelschnitt, welcher durch die (reellen oder imaginären) Berührungspuncte auf drei reellen Doppel-Tangenten geht, ist nothwendig reell, wonach in dem fraglichen Falle, neben p'', q'' und r'' auch Ω''_2 identisch gleich Null ist, und also die identische Gleichung (3) in die folgende sich vereinfacht:

$$p'q'r's'' + \mu''\Omega'^2_2 \equiv o.$$

Diese Form kann, weil p', q', r' gegebene, von einander verschiedene, lineare Functionen sind, nicht anders befriedigt werden, als wenn das zweite Glied derselben, durch das Verschwinden des Coefficienten μ'', ausfällt. Der Bedingung:

$$p'q'r's'' \equiv o,$$

kann aber nur dann Genüge geschehen, wenn auch die Function s'' identisch gleich Null ist, das heisst, wenn auch die vierte Doppel-Tangente reell ist.

Wenn wir in der letzten Erörterung

$$pq \equiv (p'+p''\sqrt{-1})(p'-p''\sqrt{-1}) \equiv (p'^2+p''^2)$$

setzen, so gelangen wir unmittelbar zu dem neuen Resultate, **dass zu den beiden imaginären Doppel-Tangenten desselben Paares und irgend einer dritten reellen Doppel-Tangente, eine vierte gehört, die ebenfalls reell ist.**

118. Zu zwei imaginären Doppel-Tangenten zweier verschiedenen Paare und einer dritten Doppel-Tangente gehört, als vierte, eine solche, die ebenfalls reell ist.

Wir wollen für die beiden imaginären Tangenten die beiden folgenden nehmen:

$$p' + p''\sqrt{-1} = o, \qquad q' + q''\sqrt{-1} = o;$$

und, der dritten reellen entsprechend, $r'' \equiv o$ setzen; dann muss, indem wir in Beziehung auf das Imaginäre die allgemeinste Form beibehalten, die Gleichung:

$$r'\{p'q's'' + p'q''s' + p''q's' - p''q''s''\} = o,$$

in welche alsdann die Gleichung (6) übergeht, entweder ein System von zwei Kegelschnitten darstellen, oder identisch gleich Null werden. Letzteres kann nie der Fall sein. Ersteres fordert, dass der eingeklammerte Ausdruck des dritten Grades einen linearen Factor erhalte, wie auch die, als gegeben zu betrachtenden, vier linearen Functionen p', p'', q' und q'' bestimmt sein mögen. Diess geschieht nur dann, wenn $s'' \equiv o$, und hiernach kommt:

$$r's'\{p'q'' + p''q'\} = o.$$

Es ist also erwiesen, dass die vierte zugehörige Doppel-Tangente nothwendig reell ist.

119. Da endlich, wie eben bewiesen worden ist, zu zwei imaginären und einer reellen Doppel-Tangente, niemals eine dritte imaginäre Doppel-Tangente gehören kann, so kann auch zu drei imaginären Doppel-Tangenten dreier verschiedenen Paare niemals eine reelle Doppel-Tangente gehören. Der folgende Satz ist hiermit bewiesen.

Drei imaginäre Doppel-Tangenten dreier verschiedenen Paare fordern eine vierte imaginäre Doppel-Tangente eines vierten Paares.

Eine Bestätigung dieses Satzes erhalten wir auf directem Wege, wenn wir zur allge-

meinen Gleichung (6) zurückgehen, und in dieser Gleichung, den drei ersten Doppel-Tangenten entsprechend, p', p'', q' q'', r' und r'' als gegeben betrachten. Diese Gleichung stellt alsdann überhaupt eine Curve der vierten Ordnung dar, welche von 14 Constanten abhängt. Soll diese Gleichung ein System zweier Kegelschnitte darstellen, so müssen wir, damit die Constanten sich auf 10 reduciren, über vier Constanten disponiren können. Diese finden wir in den vier Constanten der beiden linearen Functionen s' und s''. Aber s'' kann nicht identisch gleich Null sein. Denn alsdann käme:

$$s'\{p'q'r'' + p'q''r' + p''q'r' - p''q''r''\} = o.$$

Die umklammerte Function ist von s' ganz unabhängig; es kann also auch bei keiner besondern Bestimmung derselben, die vorstehende Gleichung in zwei Gleichungen des zweiten Grades sich auflösen. Es kann auch die vorstehende Gleichung nicht identisch gleich Null werden, denn dann müsste, neben s'', auch s' identisch gleich Null sein, was unstatthaft ist. Also ist auch die vierte Doppel-Tangente nothwendig imaginär.

120. **Zu zwei reellen Doppel-Tangenten und einer imaginären gehört eine zweite imaginäre. Die beiden imaginären Doppel-Tangenten gehören entweder demselben Paare oder zwei verschiedenen Paaren an.**

Wenn R und S die beiden reellen Doppel-Tangenten sind, so geht die Gleichung (6) wie in der 117. Nummer, in die folgende über:

$$r's'(p'q''+p''q') = o,$$

und zerfällt von selbst in zwei Gleichungen des zweiten Grades. Sie wird dann identisch gleich Null, in welchem Falle der Kegelschnitt Ω_2 reell ist, wenn:

$$q' \equiv p', \qquad q'' \equiv -p'',$$

wo alsdann den beiden imaginären Doppel-Tangenten der folgende reelle Factor des zweiten Grades entspricht:

$$(p'^2 + p''^2).$$

121. Wenn wir zusammenfassen, so sind also die folgenden sechs Formen die einzig möglichen:

$$pqrs + \mu\Omega_2^2 = o,$$

$$(p'^2+p''^2)qr + \mu\Omega_2^2 = o,$$

$$(p'^2+p''^2)(q'^2+q''^2) + \mu\Omega_2^2 = o,$$

$$(p'+p''\sqrt{-1})(q'+q''\sqrt{-1})rs + (\mu'+\mu''\sqrt{-1})\{\Omega'_2+\Omega''_2\sqrt{-1}\}^2 = o,$$

$$(p'+p''\sqrt{-1})(q'+q''\sqrt{-1})(r'^2+r''^2) + (\mu'+\mu''\sqrt{-1})\{\Omega'_2+\Omega''_2\sqrt{-1}\}^2 = o,$$

$$(p'+p''\sqrt{-1})(q'+q''\sqrt{-1})(r'+r''\sqrt{-1})(s'+s''\sqrt{-1}) + (\mu'+\mu''\sqrt{-1})\{\Omega'_2+\Omega''_2\sqrt{-1}\}^2 = o.$$

122. Wir haben bereits nachgewiesen, dass die 28 Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung alle reell sein können. Indem wir von diesem Falle, als Normal-Falle, ausgehen, überzeugen wir uns leicht, dass, wenn eine von diesen Doppel-Tangenten imaginär wird, überdiess nicht bloss eine zweite, sondern dass dann eine grössere Anzahl von Doppel-Tangenten imaginär wird. Die zu erörternde Frage ist hiernach die folgende:

Wie gross ist die Anzahl derjenigen Doppel-Tangenten einer Curve vierter Ordnung, welche imaginär sein können?

Wenn wir die früher schon näher bestimmten 819 Combinationen der 28 Doppel-Tangenten zu vier hinschrieben (was hier nicht wohl ausführbar ist), so sähen wir sogleich, dass ein Paar imaginärer Doppel-Tangenten zugleich mehrere andere Paare imaginärer Doppel-Tangenten fordert, und nach dem Satze der letzten Nummern könnten wir alsdann die Anzahl derjenigen Doppel-Tangenten, die, nothwendiger Weise, zugleich imaginär werden müssen, bestimmen. Auf diese Weise werden wir finden, dass, wenn überhaupt imaginäre Doppel-Tangenten vorhanden sind, die Anzahl derselben wenigstens **zwölf** beträgt. Dass diese sich paarweise zusammenordnen, ist von selbst klar.

Aber eine indirecte Betrachtung überhebt uns diesen Entwicklungen. Es ist nemlich offenbar, dass, wenn unter den 28 reellen Doppel-Tangenten irgend eine Anzahl paarweise imaginär werden soll, sie zuvor paarweise zusammenfallen muss; und dass diese Doppel-Tangenten offenbar dann nicht imaginär werden können, wenn es nicht möglich ist, dass sie paarweise zusammenfallen. Es können zwei Doppel-Tangenten aber nur dann zusammenfallen, wenn die Curve einen Doppelpunct erhält; dann aber fallen nothwendig zwölf Doppel-Tangenten zugleich paarweise zusammen, wobei sie durch die sechs, von dem Doppelpuncte aus, an die Curve gelegten Tangenten, welche, des Doppelpunctes wegen, doppelt zu zählen sind, vertreten werden. E s g i b t a l s o a u c h , w e n n ü b e r h a u p t i m a g i n ä r e D o p p e l - T a n g e n t e n v o r h a n d e n s i n d , d e r e n w e n i g s t e n s z w ö l f.

Die Anzahl der übrigbleibenden reellen Doppel-Tangenten beträgt hiernach 16. Diese müssen, weil je drei reelle Doppel-Tangenten eine einzige vierte fordern, unter sich $\frac{16\,.\,15\,.\,14}{4\,.\,3\,.\,2} = 140$ Combinationen zu vier bilden. Diese sind in dem folgenden Schema zusammengestellt, wobei wir die 16 reellen Doppel-Tangenten durch:

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ Q,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ R,\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ S,\ S_1,\ S_2,\ S_3,$$

bezeichnen.

1. $P\ P_1P_2P_3$	$Q\ Q_1Q_2Q_3$	$R\ R_1R_2R_3$	$S\ S_1S_2S_3$
5. $P\ P_1Q\ Q_1$	$P\ P_1Q_2Q_3$	$P_2P_3Q\ Q_1$	$P_2P_3Q_2Q_3$
$P\ P_2Q\ Q_2$	10. $P\ P_2Q_1Q_3$	$P_1P_3Q\ Q_2$	$P_1P_3Q_1Q_3$
$P\ P_3Q\ Q_3$	$P\ P_3Q_1Q_2$	15. $P_1P_2Q\ Q_3$	$P_1P_2Q_1Q_2$
$P\ P_1R\ R_1$	$P\ P_1R_2R_3$	$P_2P_3R\ R_1$	20. $P_2P_3R_2R_3$
$P\ P_2R\ R_2$	$P\ P_2R_1R_3$	$P_1P_3R\ R_2$	$P_1P_3R_1R_3$
25. $P\ P_3R\ R_3$	$P\ P_3R_1R_2$	$P_1P_2R\ R_3$	$P_1P_2R_1R_2$
$Q\ Q_1R\ R_1$	30. $Q\ Q_1R_2R_3$	$Q_2Q_3R\ R_1$	$Q_2Q_3R_2R_3$
$Q\ Q_2R\ R_2$	$Q\ Q_2R_1R_3$	35. $Q_1Q_3R\ R_2$	$Q_1Q_3R_1R_3$
$Q\ Q_3R\ R_3$	$Q\ Q_3R_1R_2$	$Q_1Q_2R\ R_3$	40. $Q_1Q_2R_1R_2$
$P\ P_1S\ S_1$	$P\ P_1S_2S_3$	$P_2P_3S\ S_1$	$P_2P_3S_2S_3$
45. $P\ P_2S\ S_2$	$P\ P_2S_1S_3$	$P_1P_2S\ S_2$	$P_1P_3S_1S_3$
$P\ P_3S\ S_3$	50. $P\ P_3S_1S_2$	$P_1P_2S\ S_3$	$P_1P_2\ S_1S_2$
$Q\ Q_1S\ S_1$	$Q\ Q_1S_2S_3$	55. $Q_2Q_3S\ S_1$	$Q_2Q_3S_2S_3$
$Q\ Q_2S\ S_2$	$Q\ Q_2S_1S_3$	$Q_1Q_2S\ S_2$	60. $Q_1Q_3S_1S_3$
$Q\ Q_3S\ S_3$	$Q\ Q_3S_1S_2$	$Q_1Q_2S\ S_3$	$Q_1Q_2S_1S_2$
65. $R\ R_1S\ S_1$	$R\ R_1S_2S_3$	$R_2R_3S\ S_1$	$R_2R_3S_2S_3$
$R\ R_2S\ S_2$	70. $R\ R_2S_1S_3$	$R_1R_2S\ S_2$	$R_1R_3S_1S_3$
$R\ R_3S\ S_3$	$R\ R_3S_1S_2$	75. $R_1R_2S\ S_3$	$R_1R_2S_1S_2$
$P\ Q\ R\ S$	$P\ Q\ R_1S_1$	$P\ Q\ R_2S_2$	80. $P\ Q\ R_3S_3$
$P\ Q_1R\ S_1$	$P\ Q_1R_1S_2$	$P\ Q_1R_2S_3$	$P\ Q_1R_3S$
85. $P\ Q_2R\ S_2$	$P\ Q_2R_1S_3$	$P\ Q_2R_2S$	$P\ Q_2R_3S_1$
$P\ Q_3R\ S_3$	90. $P\ Q_3R_1S$	$P\ Q_3R_2S_1$	$P\ Q_3R_3S_2$
$P_1Q\ R\ S_1$	$P_1Q\ R_1S_2$	95. $P_1Q\ R_2S_3$	$P_1Q\ R_3S$
$P_1Q_1R\ S_2$	$P_1Q_1R_1S_3$	$P_1Q_1R_2S$	100. $P_1Q_1R_3S_1$
$P_1Q_2R\ S_3$	$P_1Q_2R_1S$	$P_1Q_2R_2S_1$	$P_1Q_2R_3S_2$
105. $P_1Q_3R\ S$	$P_1Q_3R_1S_1$	$P_1Q_3R_2S_2$	$P_1Q_3R_3S_3$
$P_2Q\ R\ S_2$	110. $P_2Q\ R_1S_3$	$P_2Q\ R_2S$	$P_2Q\ R_3S_1$
$P_2Q_1R\ S_3$	$P_2Q_1R_1S$	115. $P_2Q_1R_2S_1$	$P_2Q_1R_3S_2$
$P_2Q_2R\ S$	$P_2Q_2R_1S_1$	$P_2Q_2R_2S_2$	120. $P_2Q_2R_3S_3$
$P_2Q_3R\ S_1$	$P_2Q_3R_1S_2$	$P_2Q_3R_2S_3$	$P_2Q_3R_3S$
125. $P_3Q\ R\ S_3$	$P_3Q\ R_1S$	$P_3Q\ R_2S_1$	$P_3Q\ R_3S_2$
$P_3Q_1R\ S$	130. $P_3Q_1R_1S_1$	$P_3Q_1R_2S_2$	$P_3Q_1R_3S_3$
$P_3Q_2R\ S_1$	$P_3Q_2R_1S_2$	135. $P_3Q_2R_2S_3$	$P_3Q_2R_3S$
$P_3Q_3R\ S_2$	$P_3Q_3R_1S_3$	$P_3Q_3R_2S$	140. $P_3Q_3R_3S_1$

Wenn, ausser den sechs Paaren zusammenfallender Doppel-Tangenten, noch ein siebentes Paar solcher Doppel-Tangenten vorhanden sein soll, so wird dadurch bedingt, dass die Curve, neben einem ersten Doppelpuncte noch einen zweiten habe. Dann aber hat die Curve zehn Paare zusammenfallender Doppel-Tangenten (zweimal vier von diesen fallen in die zweimal vier Tangenten, welche, von den beiden Doppelpuncten aus, an die Curve sich legen lassen, und zwei fallen unter sich und mit derjenigen geraden Linie, welche die beiden Doppelpuncte verbindet, zusammen). Hiernach ergibt sich der folgende Satz:

Wenn also eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpuncte eine eigentliche imaginäre Doppel-Tangente hat, so hat sie deren wenigstens vier Paare und behält also höchstens acht reelle Doppel-Tangenten.

An diesen Satz scheint sich sogleich der folgende anzuschliessen.

Wenn eine Curve vierter Ordnung mehr als sechs Paare imaginärer Doppel-Tangenten hat, so hat sie deren wenigstens zehn und behält also höchstens acht reelle Doppel-Tangenten.

Wir können uns von der Richtigkeit des ersten Satzes direct überzeugen, wenn wir, auf einem Wege, der oben schon für den allgemeinen Fall angedeutet worden ist, von dem vorstehenden Schema ausgehen. Wir wollen annehmen, es sei S_3 eine imaginäre Doppel-Tangente. Dann fordert die 4. Combination (117, 119), dass überdiess bloss eine der drei Doppel-Tangenten S, S_1, S_2 oder dass alle drei zugleich imaginär sind. In der letztern Voraussetzung fordern die Combinationen 41—76, dass die Doppel-Tangenten jeder einzelnen der drei ersten Gruppen alle vier reell oder alle vier imaginär sind; und hiernach die Combinationen 77—140, dass nur die Doppel-Tangenten einer einzigen der eben genannten Gruppen, oder dass die Doppel-Tangenten dieser Gruppen alle drei imaginär sind. Also bringt in dieser Voraussetzung das Imaginär-Werden von S_3 mit sich, dass wenigstens acht Doppel-Tangenten imaginär werden. In der andern Voraussetzung, dass S_3 und S_2 imaginär und S_1 und S reell sind, fordert die 76. Combination, dass entweder R_1 oder R_2, oder nur eine dieser beiden Doppel-Tangenten imaginär sei. Es sei demnach R_2 imaginär und R_1 reell. Dann fordert die 65. Combination, dass R reell, die 67. dass R_3 imaginär ist. Hiernach bieten die Combinationen 65—76 nichts Unmögliches dar. Auf gleiche Weise folgt aus den Combinationen 53—64, dass von den vier Doppel-Tangenten Q, Q_1, Q_2 und Q_3 und aus den Combinationen 41—52, dass von den Doppel-Tangenten P, P_2, P_1 und P_3 zwei reell und zwei imaginär sind. In dieser zweiten Voraussetzung sind also von den acht Paaren von Doppel-Tangenten vier reell und vier imaginär.

123. Wenn die vier Paare Doppel-Tangenten bevor sie imaginär werden, zusammenfallen, so erhält die Curve zwei Doppelpuncte und die Zahl der eigentlichen Doppel-Tangenten reducirt sich auf die folgenden 8: P, P_1, P_2, P_3, Q, Q_1, Q_2, Q_3. Diese bilden $\frac{8.7.6}{4.3.2} = 14$ Combinationen zu vier, nemlich die Combinationen 1—2. und 5—16. des Schemas der 122. Nummer. Setzen wir voraus, dass eine der 8 Doppel-Tangenten, etwa Q_3 imaginär sei, so ist es nothwendig eine zweite Doppel-Tangente der zweiten Combination ebenfalls. Für diese können wir Q_2 nehmen. Diese beiden imaginären Doppel-Tangenten sind aber nicht die einzigen. Die 16. Combination fordert nemlich, dass entweder von den drei Doppel-Tangenten P_2, P_1 und Q_1 nur eine einzige, oder dass alle drei, neben Q_3 und Q_2, imaginär werden. In der letzten Annahme sind nothwendig alle Doppel-Tangenten imaginär, denn nach der 2., 6. und 7. Combination sind es bezüglich Q, P und P_3. Wenn eine der drei Doppel-Tangenten P_2 oder P_1 oder Q_1 allein imaginär ist, so sind von den obigen 8 Doppel-Tangenten vier imaginär. Wenn nemlich bloss Q_1 imaginär ist, so ist es zu-

vörderst nach der 2. Combination auch Q, und dann sind nothwendig mit P_2 und P_1 zugleich auch P und P_3 reell. Wenn P_2 imaginär ist und P_1 und Q_1 reell bleiben, so ist, nach der 2. Combination, auch Q und hiernach, der 7. Combination gemäss, auch P_3 reell. Dann kommen in jeder der fraglichen Combinationen zwei reelle und zwei imaginäre Tangenten vor. Die folgenden beiden Sätze sind hiernach als bewiesen anzusehen.

Wenn eine Curve der vierten Ordnung zwei Doppelpuncte hat, so beträgt die Anzahl ihrer reellen Doppel-Tangenten entweder acht oder vier.

Ich verhehle mir nicht, dass die Frage, wie viele von den 28 Doppel-Tangenten einer Curve der vierten Ordnung imaginär werden können, in dem Vorstehenden noch nicht vollständig erledigt ist, und dass subtile Bemerkungen sich daran anknüpfen liessen. Es ist mir indess wahrscheinlich, dass, in der Voraussetzung, dass die Curven der vierten Ordnung, ihre Allgemeinheit behalten, nur die folgenden fünf coordinirten Fälle Statt finden können, 1) alle Doppel-Tangenten reell, 2) 16 reell und 12 imaginär, 3) 8 reell und 20 imaginär, 4) 4 reell und 24 imaginär, 5) alle imaginär. Weiter kann ich hier nicht gehen, weil es mir nicht gestattet ist Constructionen beizufügen und weil es, ohne geometrische Anschauung, schwer ist, in genauere Discussionen uns einzulassen, ohne dass wir uns der Gefahr zu irren aussetzen. Ueberdiess würde uns die Discussion der untergeordneten Arten von Curven der vierten Ordnung, in Beziehung auf Doppel-Tangenten, hier viel zu weit führen. —

124. Die 28 Doppel-Tangenten stellen sich paarweise so zusammen, dass mit jedem Paare 13 andere Paare zusammengehören. Wenn hiernach mit dem Doppeltangenten-Paare P und Q insbesondere die beiden Paare R und S, T und U zusammengehören, so wird dieselbe Curve durch jede der folgenden beiden Gleichungen dargertellt:

$$pqrs + \mu\Omega_2^2 = o,$$
$$pqtu + \mu'\Omega'^2_2 = o.$$

Diese beiden Gleichungen sind also identisch dieselben, oder werden wenigstens, wenn wir eine dieser Gleichungen mit einem gehörig bestimmten constanten Coefficienten multipliciren, identisch. Wir wollen dieselben hier als solche betrachten, dann kommt:

$$pq(rs—tu) \equiv \mu'\Omega'^2_2 - \mu\Omega_2^2,$$
$$\equiv \{\sqrt{\mu'}.\Omega'_2 + \sqrt{\mu}.\Omega_2\}\{\sqrt{\mu'}.\Omega'_2 - \sqrt{\mu}.\Omega_2\}.$$

Diese beiden Gleichungen können, indem wir durch $\varkappa$ einen constanten Coefficienten bezeichnen, in die folgenden beiden sich auflösen:

$$\varkappa pq \equiv \sqrt{\mu'}.\Omega'_2 \pm \sqrt{\mu}.\Omega_2,$$
$$rs—tu \equiv \varkappa\{\sqrt{\mu'}.\Omega'_2 \mp \sqrt{\mu}.\Omega_2\}.$$

Die erste dieser beiden identischen Gleichungen wird dadurch bedingt, dass die Kegelschnitte Ω_2 und Ω_2, beide, durch die beiden Berührungspuncte auf jeder der beiden Doppel-Tangenten P und Q gehen. Die zweite Gleichung drückt aus, dass durch die Durchschnitte der beiden andern Doppeltangenten-Paare ein Kegelschnitt sich legen lässt, welcher zugleich durch die Durchschnitte von Ω_2 und Ω'_2, also durch die Berührungspuncte auf P und Q, geht. Der hiermit bewiesene Satz ist der nachstehende.

Wenn wir ein Paar Doppel-Tangenten einer Curve der vierten Ordnung mit irgend zwei andern zugehörigen Paaren zusammenstellen, so geht derselbe Kegelschnitt durch die vier Berührungspuncte auf den Doppel-Tangenten des ersten Paares und die vier Durchschnittspuncte der beiden Doppel-Tangenten des einen mit den beiden Doppel-Tangenten des andern zugehörigen Paares.

In die Discussion dieses Satzes wollen wir hier nicht eingehen.



Zusätzliche Bemerkungen.

Seite 24 haben wir, um zur Gleichung (3) zu gelangen, den Ausdruck

$$p\Omega'_{n-m} + \varrho\Omega_{n-m}$$

auf die folgende Form gebracht:

$$(p+\alpha)\Theta_{n-m} + \tau\Omega_{n-m-1}\,.$$

Wir sind aller algebraischen Substitutionen überhoben, wenn wir erwägen, dass der erste Ausdruck, wenn wir ihn gleich Null setzen, eine solche Curve darstellt, welche eine Asymptote hat, die mit der geraden Linie P parallel ist und im zweiten Ausdrucke in Evidenz tritt.

Bemerkungen zum ersten Paragraphen des zweiten Abschnittes, insbesondere zur 17. Nummer.

In dieser Nummer haben wir 19 verschiedene Fälle von dreifachen Puncten mit drei zusammenfallenden Tangenten aufgezählt; wobei wir diese Aufzählung bis zu dem Falle, dass drei vollständige Curven-Zweige, welche alle zugleich ihre gemeinsame Tangente dreipunctig osculiren, den dreifachen Punct bilden, ausgedehnt haben. Diese verschiedenen Fälle treten in den folgenden 19 Gleichungen unmittelbar in Evidenz, wobei P diejenige gerade Linie ist, in welcher die drei Tangenten des dreifachen Punctes zusammenfallen.

I.	$p^3 + \Sigma_4 = o,$	(— 6)
II.	$p^3 + p\Sigma_3 + \Sigma_5 = o,$	(— 7)
III.	$p^3 + p^2\Sigma_2 + \Sigma_5 = o,$	(— 8)
IV.	$p^3 + p[\Sigma_3+\Sigma_4] + \Sigma_6 = o,$	(— 8)
V.	$p^3 + p^2\Sigma_2 + p\Sigma_4 + \Sigma_6 = o,$	(— 9)
VI.	$p^3 + p[\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5] + \Sigma_7 = o,$	(— 9)
VII.	$p^3 + p^2\Sigma_2 + p[\Sigma_4+\Sigma_5] + \Sigma_7 = o,$	(—10)
VIII.	$p^3 + p^2[\Sigma_2+\Sigma_3] + p\Sigma_5 + \Sigma_7 = o,$	(—11)
IX.	$p^3[1+\Sigma_1] + p^2\Sigma_3 + p\Sigma_5 + \Sigma_7 = o,$	(—12)
X.	$p^3 + p[\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5+\Sigma_6] + \Sigma_8 = o,$	(—10)
XI.	$p^3 + p^2\Sigma_2 + p[\Sigma_4+\Sigma_5+\Sigma_6] + \Sigma_8 = o,$	(—11)
XII.	$p^3 + p^2[\Sigma_2+\Sigma_3] + p[\Sigma_5+\Sigma_6] + \Sigma_8 = o,$	(—12)
XIII.	$p^3[1+\Sigma_1] + p^2\Sigma_3 + p[\Sigma_5+\Sigma_6] + \Sigma_8 = o,$	(—13)
XIV.	$p^3[1+\Sigma_1] + p^2[\Sigma_3+\Sigma_4] + p\Sigma_6 + \Sigma_8 = o,$	(—14)
XV.	$p^3 + p[\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5+\Sigma_6+\Sigma_7] + \Sigma_9 = o,$	(—11)
XVI.	$p^3 + p^2\Sigma_2 + p[\Sigma_4+\Sigma_5+\Sigma_6+\Sigma_7] + \Sigma_9 = o,$	(—12)
XVII.	$p^3 + p^2[\Sigma_2+\Sigma_3] + p[\Sigma_5+\Sigma_6+\Sigma_7] + \Sigma_9 = o,$	(—13)
XVIII.	$p^3[1+\Sigma_1] + p^2\Sigma_3 + p[\Sigma_5+\Sigma_6+\Sigma_7] + \Sigma_9 = o,$	(—14)
XIX.	$p^3[1+\Sigma_1] + p^2[\Sigma_3+\Sigma_4] + p[\Sigma_6+\Sigma_7] + \Sigma_9 = o.$	(—15)

Diese Gleichungen stellen Curven der niedrigsten Ordnung dar, welche überhaupt einen Punct der fraglichen Art haben können; wenn die Curve von einer höhern, *n*. Ordnung sein

soll, so brauchen wir bloss alle Glieder, bis Σ_n einschliesslich, hinzuzufügen. Nach jeder Gleichung ist die Anzahl der Constanten bemerkt, welche eine Curve von beliebiger Ordnung dadurch verliert, dass sie einen dreifachen Punct der fraglichen Art erhält.

Die vorstehenden Formen finden in sich selbst ihre Rechtfertigung. Ein paar Beispiele mögen genügen. Die verschiedenen Symbole Σ haben hier dieselbe Bedeutung, die wir ihnen überall beigelegt haben: sie stellen homogene Functionen zwischen p und einer zweiten linearen Function dar und die angehängte Marke bezeichnet den Grad. Für Nachbarpuncte des dreifachen Punctes ist überhaupt der Werth von Σ_g ein unendlich Kleines der g. Ordnung und kann also ohne Weiteres gegen den Werth solcher Functionen, deren Grad ein geringerer ist, vernachlässigt werden. Um hiernach die Natur der unendlichen Zweige in der Nähe des dreifachen Punctes annäherungsweise darzustellen, ergeben sich, wenn wir uns darauf beschränken, die Fälle XVII und XVIII beispielsweise hervorzuheben, die folgenden beiden Gleichungen:

$$p\{p^2 + p\Sigma_2 + \Sigma_5\} + \Sigma_9 = 0, \tag{1}$$
$$p\{p^2 + p\Sigma_3 + \Sigma_5\} + \Sigma_9 = 0. \tag{2}$$

Wir sehen zuvörderst, dass die Curve in beiden Fällen, dem ersten Factor p entsprechend, einen Zweig mit einer vierpunctig osculirenden Tangente hat. Für Nachbarpuncte auf diesem Zweige ist p ein unendlich Kleines der (9—5). Ordnung, die Ausdrücke in den Klammern reduciren sich hiernach auf ihr letztes Glied, und somit stellt die Gleichung:

$$p\Sigma_5 + \Sigma_9 = 0,$$

in erster Annäherung den fraglichen Zweig dar.

Wenn wir uns nun zuvörderst zur Gleichung (2), so ist leicht einzusehen, dass wir das mittlere Glied des umklammerten Ausdrucks vernachlässigen können. Zu diesem Ende brauchen wir bloss diesen Ausdruck, der in Beziehung auf p quadratisch ist, in seine beiden Factoren des ersten Grades zu zerlegen. Es vereinfacht sich also die Gleichung (2) in die folgende:

$$p\{p^2 + \Sigma_5\} + \Sigma_9 = 0,$$

und nun springt in die Augen, dass die beiden übrigen Zweige, die den dreifachen Punct bilden, durch eine solche Spitze erster Art vertreten werden, die annäherungsweise durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$p^2 + \Sigma_5 = 0.$$

Im Gegensatze mit dem eben besprochenen Falle, darf in der Gleichung (1) das mittlere Glied der Klammer nicht vernachlässigt werden; schreiben wir daher diese Gleichung unter der Form:

$$p\{p(p+\Sigma_2) + \Sigma_5\} + \Sigma_9 = 0,$$

so springt in die Augen, dass ein zweiter Zweig der bezüglichen Curve annäherungsweise durch die Gleichung:

$$p + \Sigma_2 = 0,$$

dargestellt wird und also ein gewöhnlicher ist, während für Puncte des andern, damit Σ_5 in der Klammer aufgewogen werde, p ein unendlich Kleines der $(5-2) \equiv 3$. Ordnung sein muss. Dieser Zweig, mit einem Wendungspuncte, wird alsdann, indem wir p gegen Σ_2 vernachlässigen, annäherungsweise durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$p\Sigma_2 + \Sigma_5 = 0.$$

Das Characteristische des Unterschiedes der beiden Gleichungen (1) und (2) liegt darin, dass die Marke des mittlern Gliedes eine solche Zahl darstellt, die einmal kleiner, das andere Mal grösser ist als die Hälfte der, der Marke des letzten Gliedes entsprechenden Zahl. Dazwischen liegt derjenige Fall, für welchen der XVI. Fall ein Beispiel bietet. Hier stellt

[illegible]er Gleichung:

$$p^{[illegible]} - p\Sigma_{[illegible]} - \Sigma_{[illegible]} = [illegible]$$

[illegible] System zweier Zweige dar, welche [illegible] Contact von gleicher Ordnung, hier [illegible]

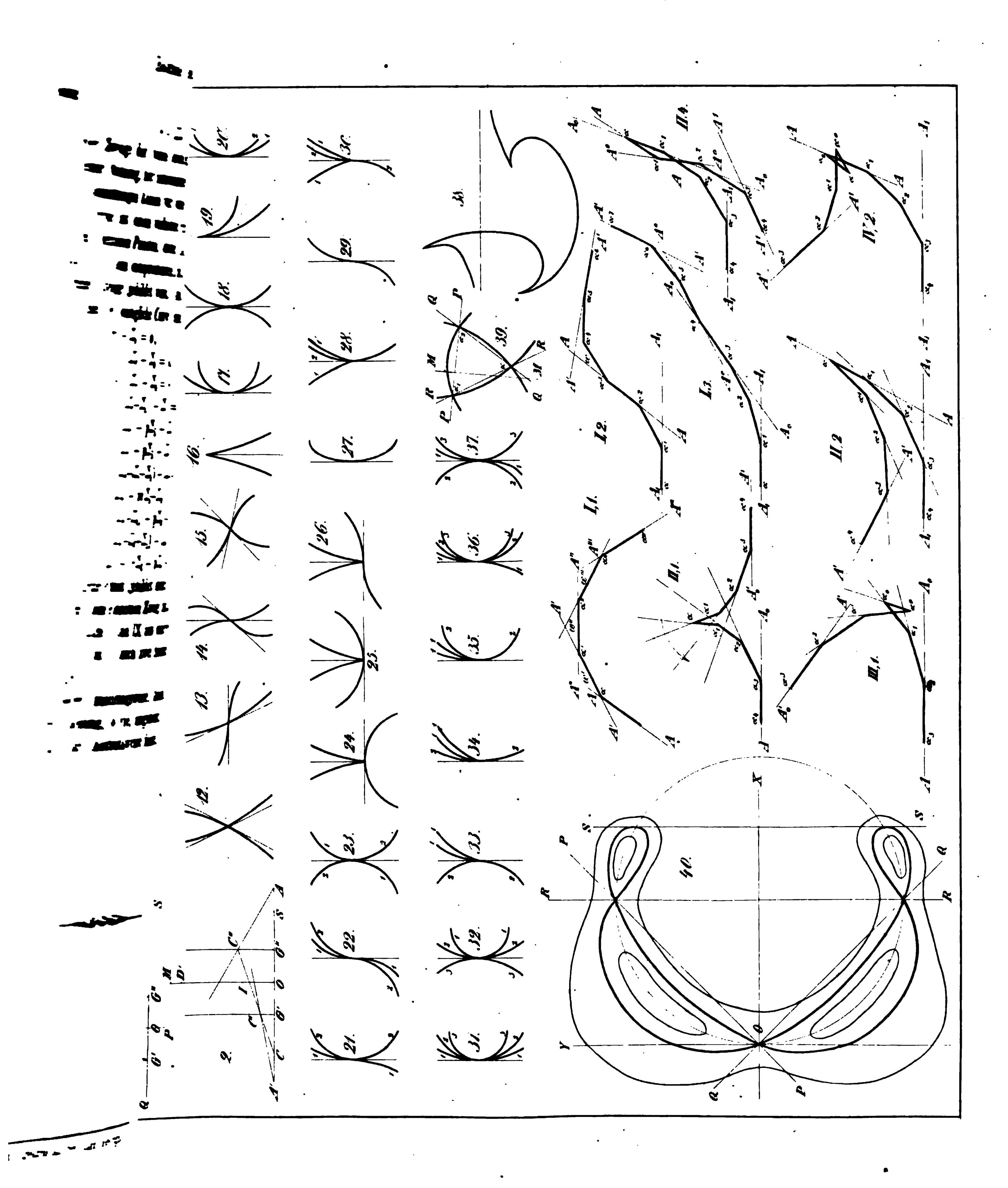
Nach diesen Bemerkungen können wir [illegible] Gleichungen von Curven mit einem [illegible] Punct [illegible] entsprechen solchen vierfachen Puncten, deren [illegible] so weit fortgeführt bis in dem entsprechenden Fall [illegible] [illegible], sich berührende Zweige gebildet wird. [illegible] [illegible] bemerkt, welche die bezügliche Curve [illegible]

I.	$p^4 + \Sigma_{[illegible]} = 0,$
II.	$p^4 + p\Sigma_{[illegible]} + \Sigma_{[illegible]} = 0,$
III.	$p^4 + p^2\Sigma_3 + \Sigma_{[illegible]} = 0,$
IV.	$p^4 + p(\Sigma_{[illegible]} + \Sigma_{[illegible]}) - \Sigma_{[illegible]} = 0,$
V.	$p^4 + p^2\Sigma_3 + p\Sigma_{[illegible]} - \Sigma_{[illegible]} = 0,$
VI.	$p^4 + p^3\Sigma_2 + p\Sigma_{[illegible]} - \Sigma_{[illegible]} = 0,$
VII.	$p^4 + p(\Sigma_{[illegible]} + \Sigma_5 + \Sigma_{[illegible]}) - \Sigma_{[illegible]} = 0,$
VIII.	$p^4 + p^2\Sigma_3 + p(\Sigma_{[illegible]} + \Sigma_{[illegible]}) - \Sigma_{[illegible]} = [illegible]$
IX.	$p^4 + p^2(\Sigma_3 + \Sigma_{[illegible]}) + p\Sigma_{[illegible]} - \Sigma_{[illegible]} = 0,$
X.	$p^4 + p^2(\Sigma_3 + \Sigma_{[illegible]} + \Sigma_{[illegible]}) - \Sigma_{[illegible]} = 0,$
XI.	$p^4 + p^3\Sigma_2 + p^2\Sigma_{[illegible]} + p\Sigma_{[illegible]} - \Sigma_{[illegible]} = 0.$

In dem Falle I wird der vierfache Punct gebildet [illegible] II, IV, VI, VII und VIII durch einen einzelnen Zweig [illegible] [illegible] Zweige, in den Fällen V und IX aus [illegible] [illegible] Zweigen, in den Fällen III und X durch zwei [illegible] XI durch vier [illegible] Zweige.

[illegible], wie überall in unserer Darstellungsweise, [illegible] unmittelbar die geometrische Bedeutung, so wie, umgekehrt, [illegible] sich unmittelbar die analytische Ausdrucksweise findet.

Bonn, gedruckt bei Carl Georgi.



die Gleichung:

$$p^2 + p\Sigma_2 + \Sigma_4 = o,$$

das System zweier Zweige dar, welche beide mit ihrer gemeinschaftlichen Tangente einen Contact von gleicher Ordnung, hier insbesondere einen gewöhnlichen, haben.

Nach diesen Bemerkungen können wir ohne Schwierigkeit die allgemeinen Formen der Gleichungen von Curven mit einem vielfachen Puncte hinschreiben. Die folgenden Formen entsprechen solchen vierfachen Puncten, deren Tangenten alle vier zusammenfallen, und sind so weit fortgeführt bis in dem entsprechenden Falle, der fragliche Punct durch vier vollständige, sich berührende Zweige gebildet wird. Nach jeder Gleichung ist die Anzahl der Constanten bemerkt, welche die bezügliche Curve eingebüsst hat.

I.	$p^4 + \Sigma_5 = o,$	(—11)
II.	$p^4 + p\Sigma_4 + \Sigma_6 = o,$	(—12)
III.	$p^4 + p^2\Sigma_3 + \Sigma_6 = o,$	(—13)
IV.	$p^4 + p(\Sigma_4+\Sigma_5) + \Sigma_7 = o,$	(—13)
V.	$p^4 + p^2\Sigma_3 + p\Sigma_5 + \Sigma_7 = o,$	(—14)
VI.	$p^4 + p^3\Sigma_2 + p\Sigma_5 + \Sigma_7 = o,$	(—15)
VII.	$p^4 + p(\Sigma_4+\Sigma_5+\Sigma_6) + \Sigma_8 = o,$	(—14)
VIII.	$p^4 + p^2\Sigma_3 + p(\Sigma_5+\Sigma_6) + \Sigma_8 = o,$	(—15)
IX.	$p^4 + p^2(\Sigma_3+\Sigma_4) + p\Sigma_6 + \Sigma_8 = o,$	(—16)
X.	$p^4 + p^2(\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5) + \Sigma_8 = o,$	(—17)
XI.	$p^4 + p^3\Sigma_2 + p^2\Sigma_4 + p\Sigma_6 + \Sigma_8 = o.$	(—17)

In dem Falle I wird der vierfache Punct gebildet durch einen einzigen Zweig; in den Fällen II, IV, VI, VII und VIII durch einen einzelnen Zweig mit dreifachem Puncte und einem zweiten einfachen Zweige, in den Fällen V und IX aus einer Spitze erster Art und zwei einfachen Zweigen, in den Fällen III und X durch zwei Spitzen erster Art und endlich im Falle XI durch vier einfache Zweige.

Hier, wie überall in unserer Darstellungsweise, knüpft sich an die analytische Form unmittelbar die geometrische Bedeutung, so wie, umgekehrt, für alle geometrischen Beziehungen sich unmittelbar die analytische Ausdrucksweise findet.

Bonn, gedruckt bei Carl Georgi.

